

## 扩展空间子集模拟的马尔可夫链可靠性优化方法

袁修开<sup>1</sup>, 陈敬强<sup>1</sup>, 张景豫<sup>1</sup>, 谭智勇<sup>2</sup>, 董一巍<sup>1\*</sup>

(1. 厦门大学 航空航天学院, 福建 厦门 361102; 2. 中国航发商用航空发动机有限责任公司, 上海 200241)

**摘要:**针对复杂结构系统的可靠性优化设计问题,提出一种高效的基于扩展空间子集模拟及马尔可夫链模拟的优化方法。在扩展空间中,将设计参数为基本随机变量分布参数的可靠性优化问题进行转化,优化目标失效概率函数,等价转化成参数后验密度函数,通过子集模拟方法获得覆盖全设计域的初始失效样本点,再结合近似序列优化框架,采用高效的马尔可夫链模拟方法在逐步缩小的设计域内进行模拟,逐次更新设计参数后验密度函数的估计,并解耦求解得到优化问题的最优解。与已有方法相比,所提方法仅需一次可靠性分析即可避免局部优化解,得到全局最优解。所给算例说明所提方法在分析计算精度和效率上的优越性及工程适用性。

**关键词:**可靠性优化设计;子集模拟;马尔可夫链模拟;扩展空间;贝叶斯定理

**中图分类号:**V215.7 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2025)03-203-10



## Markov chain reliability optimization method for augmented space subset simulation

YUAN Xiukai<sup>1</sup>, CHEN Jingqiang<sup>1</sup>, ZHANG Jingyu<sup>1</sup>, TAN Zhiyong<sup>2</sup>, DONG Yuwei<sup>1\*</sup>

(1. School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361102, China;

2. AECC Commercial Aircraft Engine Co., Ltd., Shanghai 200241, China)

**Abstract:** Aiming at the reliability-based design optimization problem of complex structural systems, an efficient optimization method based on subset simulation and Markov chain simulation in augmented space was proposed. Considering the reliability-based design optimization problem in which the design parameters were distributed parameters of basic random variables, the target failure probability was transformed into a posterior density function of the design parameters in the augmented space, obtained a set of initial failure samples in the whole design domain through subset simulation, and then adopted the efficient Markov chain simulation to generate more failure samples in the gradually smaller design domain under the sequential approximate optimization framework. The target posterior density function was estimated and updated, and the decoupling approach was used to solve the transformed optimization problem to finally obtain the optimum. Compared with the existing methods, the proposed method requires only one reliability analysis and can avoid local optimal solution, resulting in the global optimal solution. Examples were given to illustrate the applicability of the proposed method in engineering and its superiority in the accuracy and efficiency of analysis and calculation.

**Keywords:** reliability-based design optimization; subset simulation; Markov chain simulation; augmented space; Bayes' theorem

在实际工程中,不确定性的广泛存在给工程结构的分析、设计与制造过程带来了挑战。基于结构可靠性的优化设计(reliability-based design optimization, RBDO)已成为解决考虑不确定性因素下的结构分析设计的有力工具,在实际工程中得到了广泛应用。

在可靠性优化问题的研究过程中,已发展了多种计算方法,主要分为三类:双循环方法<sup>[1-2]</sup>、单循环方法<sup>[3]</sup>和解耦方法<sup>[4-5]</sup>。

双循环方法包括可靠性分析计算与优化求解两个循环的嵌套求解,是最直接的可靠性优化设计方法,其缺点是需要大量的计算代价。

收稿日期:2023-03-27

基金项目:国家自然科学基金资助项目(52475491);国家科技重大专项基金资助项目(J2019-II-0022-0043, J2019-VII-0013-0153);航空科学基金资助项目(20230003068002, 20240003068001);四川省省院省校科技合作资助项目(2025YFHZ0039)

第一作者:袁修开(1981—),男,湖北黄石人,副教授,博士,硕士生导师, E-mail:xiukaiyuan@xmu.edu.cn

\*通信作者:董一巍(1982—),男,安徽阜阳人,副教授,博士,博士生导师, E-mail:yiweidong@xmu.edu.cn

引用格式:袁修开,陈敬强,张景豫,等.扩展空间子集模拟的马尔可夫链可靠性优化方法[J].国防科技大学学报,2025,47(3):203-212.

Citation:YUAN X K, CHEN J Q, ZHANG J Y, et al. Markov chain reliability optimization method for augmented space subset simulation[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2025, 47(3): 203-212.

Enevoldsen 等<sup>[1]</sup>将可靠性分析中的可靠度指标替换为性能约束来求解可靠性优化设计问题; Lehy 等<sup>[6]</sup>利用拉丁超立方抽样及相关控制,提出了一种基于小样本仿真的双循环方法,有效提高了计算效率。

单循环方法通过确定性约束来替代双循环方法中的可靠性分析内层循环<sup>[7]</sup>,能够有效降低计算成本,但在精度方面有所损失。Liang 等<sup>[3]</sup>利用单循环方法思想提出了一种计算效率较高的可靠性优化算法,可同时搜索最优设计和最可能失效点,提高了求解的稳定性;Yang 等<sup>[8]</sup>提出了一种混合自适应 Kriging 单循环算法,在单循环方法中应用构建 Kriging 代理模型,来提高求解的计算效率和精度;Yang 等<sup>[9]</sup>还提出了一种基于单循环方法的局部自适应 Kriging 近似方法,通过 Kriging 代理模型来代替目标函数和约束函数,大大降低了计算代价。

解耦方法通过显式表达出近似概率约束从而将可靠性优化问题解耦转化为确定性的优化问题,利用常规的优化算法对其进行求解,为解决 RBDO 问题提供了一种有效途径。其中,概率约束的近似表达,也就是失效概率函数 (failure probability function, FPF) 的求解是解耦方法中的关键<sup>[10]</sup>。目前已经发展了多种构建失效概率函数的方法,例如,利用响应面法<sup>[11]</sup>对失效概率函数的对数进行一次<sup>[12]</sup>和二次近似拟合<sup>[13]</sup>。类似地,可以利用泰勒级数展开,并基于失效概率函数值及导数值得到失效概率函数的近似表达<sup>[14]</sup>;此外,还可利用其他代理模型方法,如 Kriging 代理模型<sup>[15]</sup>、支持向量机方法<sup>[16-17]</sup>或者多项式展开<sup>[18]</sup>等广泛应用于可靠性分析以及可靠性优化设计中。基于扩展空间的策略能仅在一次可靠性分析中获得失效概率函数<sup>[19]</sup>,可用于解耦求解可靠性优化问题。Faes 等<sup>[4]</sup>针对线性系统获得失效概率函数的近似估计,然后将可靠性优化问题进行解耦。Yuan 等<sup>[5]</sup>通过加权重要抽样方法<sup>[20]</sup>获得失效概率函数的估计,只需执行一次重要抽样模拟就能解耦原优化问题,同时 Yuan 等<sup>[21]</sup>还提出一种基于增强线抽样以及最优化组合算法的解耦可靠性优化方法,显著提高了计算效率。Faes 等<sup>[22]</sup>利用解耦方法的思想,通过提出的算子范数框架建立适当模型,有效解决了受高斯动载荷的线性结构的可靠性优化问题。Zhao 等<sup>[23]</sup>利用改进的极值矩法提出一种新的解耦方法,用于解决时变可靠性优化问题。

虽然结构可靠性的优化方法已经得到广泛应

用,但依然可能出现效率低、鲁棒性差<sup>[24]</sup>、精度损失大<sup>[25]</sup>等情况,这些可靠性优化方法在实际工程应用中还需要进一步深入研究和完善。

本文提出一种基于扩展空间子集模拟抽样及马尔可夫链模拟的可靠性优化方法。通过子集模拟抽样方法<sup>[26-27]</sup>生成覆盖整个设计域的初始失效样本,利用马尔可夫链模拟方法<sup>[27]</sup>在逐步缩小的设计域内进行模拟,结合序列优化及样本重用策略,对目标密度函数进行估计并逐步更新,进而解耦求解原优化问题。

## 1 可靠性优化问题的定义

设随机变量向量  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  ( $n$  为随机变量个数), 其中变量的某些分布参数为对应的设计参数  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n_\theta}]$  ( $n_\theta$  为设计参数个数)。在  $\boldsymbol{\theta}$  取不同值时, 对应的失效概率用  $P_F(\boldsymbol{\theta})$  表示, 即失效概率函数, 即:

$$P_F(\boldsymbol{\theta}) = \int I_F(\mathbf{x})f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})d\mathbf{x} \quad (1)$$

式中:  $I_F(\mathbf{x})$  为指示函数, 若  $\mathbf{x} \in F$ ,  $I_F(\mathbf{x}) = 1$ , 否则,  $I_F(\mathbf{x}) = 0$ ;  $F = \{\mathbf{x}; g(\mathbf{x}) \leq 0\}$  为失效域,  $g(\mathbf{x})$  为极限状态函数;  $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$  为  $\mathbf{x}$  在  $\boldsymbol{\theta}$  条件下的概率密度函数。

可靠性优化问题可以表示为:

$$\begin{aligned} \min P_F(\boldsymbol{\theta}) \\ \text{s. t. } \begin{cases} C_j(\boldsymbol{\theta}) \leq 0 & j=1, 2, \dots, n_c \\ \underline{\theta}_i \leq \theta_i \leq \bar{\theta}_i & i=1, 2, \dots, n_\theta \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $C_j(\boldsymbol{\theta})$  为第  $j$  个确定性约束,  $\underline{\theta}_i$  与  $\bar{\theta}_i$  分别为第  $i$  个设计参数  $\theta_i$  的最小值与最大值。该优化问题为在制造或经济成本的约束下, 使系统的失效概率最小。在求解式(2)中包含的双循环可靠性优化问题时, 如采用传统的模拟方法, 所需的计算代价会十分庞大, 这对于实际工程问题有时变得不可行。

针对该难题, 提出一种高效的方法求解可靠性优化问题。该方法基于扩展空间思想, 将失效概率函数转化为目标分布的期望形式, 从而高效解耦原始可靠性优化问题, 提高了求解效率。

## 2 扩展空间优化方法

### 2.1 可靠性优化问题在扩展空间中的转化

该节给出将原始可靠性优化问题转化为在扩展空间中的等价问题的过程。将设计参数  $\boldsymbol{\theta}$  看作随机变量向量, 且  $\boldsymbol{\theta}$  服从先验概率分布  $\varphi(\boldsymbol{\theta})$ 。依据贝叶斯定理, 式(2)可靠性优化问题的目标函

数可以表示为:

$$P_F(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\varphi(\boldsymbol{\theta}|F)P(F)}{\varphi(\boldsymbol{\theta})} \quad (3)$$

式中,  $P(F)$  表示扩展空间中的失效概率, 由式(4)给出。

$$P(F) = \iint I_F(\mathbf{x})f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})\varphi(\boldsymbol{\theta})d\mathbf{x}d\boldsymbol{\theta} \quad (4)$$

其中:  $I_F(\mathbf{x})$  为失效域指示函数;  $\varphi(\boldsymbol{\theta})$  为先验分布, 可人为选定, 理论上  $\boldsymbol{\theta}$  的分布类型并不影响失效概率函数<sup>[28]</sup>, 一般为均匀分布或正态分布, 在这里选为均匀分布, 即  $\boldsymbol{\theta} \sim U[\underline{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}]$ , 此时  $\varphi(\boldsymbol{\theta})$  可表示为:

$$\varphi(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n_{\theta}} \frac{1}{\theta_i - \underline{\theta}_i} \quad (5)$$

式(3)中的  $\varphi(\boldsymbol{\theta}|F)$  为设计参数  $\boldsymbol{\theta}$  在失效事件发生的条件下的后验分布。由于  $\boldsymbol{\theta}$  服从均匀分布, 因此  $\varphi(\boldsymbol{\theta})$  为确定的常数, 不随  $\boldsymbol{\theta}$  变化而变化。且式(3)中的  $P(F)$  也为常数, 故式(2)可靠性优化问题的目标函数转化为:

$$\min[P_F(\boldsymbol{\theta})] \propto \min[\varphi(\boldsymbol{\theta}|F)] \quad (6)$$

又由条件概率公式可得:

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{\theta}|F) &= \int \varphi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}, F)f(\mathbf{x}|F)d\mathbf{x} \\ &= E_{\mathbf{x}|F}[\varphi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}, F)] \end{aligned} \quad (7)$$

式中,  $E_{\mathbf{x}|F}[\cdot]$  为条件概率密度函数  $f(\mathbf{x}|F)$  的期望。因此, 后验分布  $\varphi(\boldsymbol{\theta}|F)$  可以改写为期望的形式, 如果已知  $\varphi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}, F)$ , 就能通过模拟方法, 利用样本均值来估计期望得到后验分布, 避免使用密度拟合方法来获得。

由贝叶斯理论可知:

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}, F) &= \frac{I_F(\mathbf{x})\varphi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})}{\int I_F(\mathbf{x})\varphi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})d\boldsymbol{\theta}} \\ &= I_F(\mathbf{x})\varphi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\varphi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})\varphi(\boldsymbol{\theta})}{f(\mathbf{x})} \quad (9)$$

式中,  $f(\mathbf{x})$  为  $\mathbf{x}$  在扩展空间  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$  中的边缘分布, 可以近似写为:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}^{\bar{\boldsymbol{\theta}}} f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})\varphi(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta} = \varphi(\boldsymbol{\theta})\Delta(\mathbf{x}) \quad (10)$$

其中,  $\Delta(\mathbf{x}) = \int_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}^{\bar{\boldsymbol{\theta}}} f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}$  表示在设计区间上的积分, 可以直接通过数值计算得到。

由式(9)和式(10)可得:

$$\varphi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})\varphi(\boldsymbol{\theta})}{f(\mathbf{x})} = \frac{f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})}{\Delta(\mathbf{x})} \quad (11)$$

将式(8)和式(11)代入式(7), 得到后验分布  $\varphi(\boldsymbol{\theta}|F)$  的表达式:

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{\theta}|F) &= \int I_F(\mathbf{x})\frac{f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})}{\Delta(\mathbf{x})}f(\mathbf{x}|F)d\mathbf{x} \\ &= E_{\mathbf{x}|F}\left[\frac{f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})}{\Delta(\mathbf{x})}\right] \end{aligned} \quad (12)$$

式中,  $f(\mathbf{x}|F)$  为  $\mathbf{x}$  在失效域  $F$  条件下的概率密度函数。可看出, 后验分布  $\varphi(\boldsymbol{\theta}|F)$  表示为期望的形式, 可由计算样本均值获得。设共有  $N$  个样本由概率分布  $f(\mathbf{x}|F)$  生成(其具体过程会在 2.2 节和 2.3 节说明), 则后验分布  $\varphi(\boldsymbol{\theta}|F)$  的估计量  $\hat{\varphi}(\boldsymbol{\theta}|F)$  为:

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{\theta}|F) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{f(\mathbf{x}^{(j)}|\boldsymbol{\theta})}{\Delta(\mathbf{x}^{(j)})} \quad (13)$$

最终, 原可靠性优化问题就可以改写为:

$$\begin{aligned} \min \hat{\varphi}(\boldsymbol{\theta}|F) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{f(\mathbf{x}^{(j)}|\boldsymbol{\theta})}{\Delta(\mathbf{x}^{(j)})} \\ \text{s. t. } &\begin{cases} C_j(\boldsymbol{\theta}) \leq 0 & j=1, 2, \dots, n_c \\ \underline{\theta}_i \leq \theta_i \leq \bar{\theta}_i & i=1, 2, \dots, n_{\theta} \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

由式(14)可知, 优化目标函数的关键就是计算后验分布  $\varphi(\boldsymbol{\theta}|F)$  的估计, 则需获得后验分布  $\varphi(\boldsymbol{\theta}|F)$  的样本。可以看出, 所提方法是建立在扩展空间的可靠性思想<sup>[19]</sup>上来解决可靠性优化问题<sup>[29-30]</sup>, 能够同时模拟变量和设计参数, 从而实现单循环求解优化目标失效概率函数。

## 2.2 扩展空间子集模拟获取初始失效样本

原扩展空间方法<sup>[28]</sup>随机选取失效点作为初始失效样本, 若选取不当则会导致优化结果达到局部最优解。所提方法则提出通过扩展空间中子集模拟来得到失效样本。与已有方法<sup>[28]</sup>相比, 能够有效避免原方法由于单条马尔可夫链模拟而可能出现的局部优化的情况。

在扩展空间  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$  中, 子集模拟抽样的基本思想是通过引入一系列中间失效事件  $F_k = \{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}) \leq b_k\}$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) 和临界值  $b_1 > b_2 > \dots > b_m = 0$  (中间失效事件满足  $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_m = F$ ), 将小失效概率问题转化为一系列较大的条件概率的乘积, 更高效地获得失效样本。给定条件概率值  $p_0$ , 根据自动分层策略得到中间失效事件个数  $m$ 。同时, 利用马尔可夫链模拟(2.3 节给出)在扩展空间中生成样本点, 直至分层结束。落入最后一层失效域的样本点即为所需的初始失效点。

扩展空间子集模拟法获得失效样本的过程为:

1) 扩展空间蒙特卡罗模拟生成样本<sup>[31]</sup>。根据  $\varphi(\boldsymbol{\theta})$  分布生成样本  $\{\boldsymbol{\theta}^{(j)}, j=1, \dots, N\}$ ; 对每一个样本  $\boldsymbol{\theta}^{(j)}$ , 生成服从  $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}^{(j)})$  分布的样本

$\{\mathbf{x}^{(j)}, j=1, \dots, N\}$ ; 从而得到一组服从  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$  分布的样本集  $\{(\mathbf{x}^{(j)}, \boldsymbol{\theta}^{(j)}), j=1, \dots, N\}$ 。

2) 执行自动分层及马尔可夫链模拟, 直至得到初始失效样本。基于上一步中得到的样本, 根据自动分层策略以及 Metropolis-Hasting 算法在扩展空间中进行模拟, 最终得到落入最后一个失效事件的失效域中的  $N_F$  个样本  $\{(\mathbf{x}^{(j)}, \boldsymbol{\theta}^{(j)}), j=1, \dots, N_F\}$ , 得到的失效样本服从分布  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}|F)$ 。具体的马尔可夫链模拟过程见 2.3 节。

### 2.3 马尔可夫链模拟

根据 Metropolis-Hasting 算法, 取  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}|F)$  为马尔可夫链的平稳分布  $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ , 也叫极限分布, 即:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}|F) = \frac{I_F(\mathbf{x})f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{P(F)} \quad (15)$$

下面简单介绍马尔可夫链模拟生成失效样本的过程<sup>[30]</sup>。

1) 选取落入当前层的失效样本作为马尔可夫链的初始状态点  $(\mathbf{x}^{(j-1)}, \boldsymbol{\theta}^{(j-1)}) (j=1)$ 。

2) 由建议分布  $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}^{(j-1)}, \boldsymbol{\theta}^{(j-1)})$  (一般为高斯分布或均匀分布, 这里选择高斯分布) 产生下一个状态点的备选状态点  $(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\theta}_c)$ , 计算备选状态点与前一个状态点的平稳分布的比值

$$r = I_F(\mathbf{x}^{(j)}, \boldsymbol{\theta}^{(j)}) \frac{f(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\theta}_c)}{f(\mathbf{x}^{(j-1)}, \boldsymbol{\theta}^{(j-1)})}$$

然后根据 Metropolis-Hastings 准则, 按照  $\min\{1, r\}$  的概率接受该备选状态点  $(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\theta}_c)$ , 按照  $1 - \min\{1, r\}$  的概率维持该状态点  $(\mathbf{x}^{(j-1)}, \boldsymbol{\theta}^{(j-1)})$ 。

$$(\mathbf{x}^{(j)}, \boldsymbol{\theta}^{(j)}) = \begin{cases} (\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\theta}_c) & \min\{1, r\} > \text{random}[0, 1] \\ (\mathbf{x}^{(j-1)}, \boldsymbol{\theta}^{(j-1)}) & \min\{1, r\} \leq \text{random}[0, 1] \end{cases} \quad (16)$$

其中,  $\text{random}[0, 1]$  是在  $[0, 1]$  区间内服从均匀分布的随机数。

3) 重复步骤 2, 直至得到一定数量  $N$  的马尔可夫链状态点。

当获得服从分布  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}|F)$  的样本后, 可以得出式(13)中的估计量  $\hat{\varphi}(\boldsymbol{\theta}|F)$ 。

### 2.4 近似序列优化和信息重用策略

所提优化方法是一种解耦优化方法, 通过得到失效概率关于设计参数的显式函数, 将原优化问题解耦为确定性优化问题。在解耦框架基础上, 采用近似序列优化策略<sup>[32]</sup>来保证优化过程的稳健性, 即在一系列子区域中进行解耦优化求解, 直到收敛至最优解。本文还提出在该过程中采用信息重用策略<sup>[28]</sup>, 从而进一步提高计算精度和效率。

假设近似序列优化中的一系列子域为  $\Theta^{(1)} \supseteq \Theta^{(2)} \supseteq \dots \supseteq \Theta^{(m)}$ ,  $m$  代表序列优化的迭代次数。由于子域的选择会影响优化的效果, 因此需要选择适当的子域。优化子域的具体选择可以按照以下方式进行:

假设第一个子域  $\Theta^{(1)} = [\underline{\boldsymbol{\theta}}^{(1)}, \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(1)}]$ , 后续子域  $\Theta^{(k)} = [\underline{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}, \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}] (k=2, 3, \dots, K; K$  为总迭代次数), 其中:

$$\underline{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} = \max\{\boldsymbol{\theta}_{\text{opt}}^{(k-1)}(1 - R_k), \underline{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}\} \quad (17)$$

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} = \min\{\boldsymbol{\theta}_{\text{opt}}^{(k-1)}(1 + R_k), \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}\} \quad (18)$$

$\boldsymbol{\theta}_{\text{opt}}^{(k-1)}$  为第  $k-1$  次迭代中求得的最优值;  $R_k$  表示局部优化子域大小的控制系数, 一般取  $R_k = R_0 \cdot r_c^k, R_0 \in [0.1, 0.5]$  为控制系数的初始值,  $r_c \in [0.8, 1]$  为子域的缩减系数。在每次迭代中求出下一个子域, 下一个子域小于或等于前一个子域, 并嵌套在前一个子域中。

假设在优化过程中的第  $k$  次迭代中, 优化子域为  $[\underline{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}, \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}]$ , 目标密度函数为:

$$\varphi^{(k)}(\boldsymbol{\theta}|F) = \int I_F(\mathbf{x}) \frac{f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})}{\Delta^{(k)}(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}|F) d\mathbf{x} \quad (19)$$

在优化子域变化的过程中, 目标分布  $\varphi^{(k)}(\boldsymbol{\theta}|F)$  也会发生变化, 而  $\Delta^{(k)}(\mathbf{x})$  只取决于子域的边界  $\underline{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$  和  $\bar{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$ , 与  $\boldsymbol{\theta}$  无关, 因此并不会改变原优化问题。若对  $\varphi^{(k)}(\boldsymbol{\theta}|F)$  的估计足够准确, 就可以在每次迭代中筛选出包含最优解的子域, 最终获得一系列收敛到最优解的候选解。

为了进一步提高上述序列优化的效率, 所提方法还采用了一种信息重用策略, 即在本次迭代获得的样本中筛选出合适的样本用到下一次迭代中, 使收敛效果更快更好, 有效节省计算成本。该策略的具体过程如下:

设在序列优化过程的第  $k$  次迭代中, 生成失效域  $F$  中  $N^k$  个样本  $\{(\mathbf{x}^{(j)}, \boldsymbol{\theta}^{(j)}), j=1, 2, \dots, N^k\}$ , 其服从:

$$f^{(i)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}|F) = I_F(\mathbf{x}) \frac{f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\theta})}{\int I_F(\mathbf{x})f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\theta})d\mathbf{x}} \quad (20)$$

式中,  $\boldsymbol{\theta} \in [\underline{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}, \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}]$ 。由于  $\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\theta})$  表示子域  $\Theta^{(k)}$  上的均匀分布, 按照  $\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\theta})$  生成的样本  $\boldsymbol{\theta}^{(j)}$  的分布为  $\varphi^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) \sim U[\underline{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}, \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}]$ 。同时, 将前  $k-1$  次迭代中所有满足子域  $\Theta^{(k)}$  的可重用样本挑选出来, 与当前迭代过程中通过马尔可夫链模拟生成的样本合并, 此时样本总数为:

$$N_T^{(k)} = N^k + \sum_{i=1}^{k-1} N_{re}^i \quad (21)$$

式中,  $N_{re}^i$  为第  $i$  次迭代中可重用的样本数。

因此, 经过信息重用策略后的  $\hat{\varphi}_F^{(k)}(\boldsymbol{\theta} | F)$  的估计值可以写为:

$$\hat{\varphi}_F^{(k)}(\boldsymbol{\theta} | F) = \frac{1}{N_T^{(k)}} \sum_{j=1}^{N_T^{(k)}} \frac{f(\mathbf{x}^{(j)} | \boldsymbol{\theta})}{\Delta(\mathbf{x}^{(j)})} \quad (22)$$

将式(22)代入式(14), 在对应的优化子域中的确定性优化问题可以写为:

$$\begin{aligned} \min \hat{\varphi}_F^{(k)}(\boldsymbol{\theta} | F) &= \frac{1}{N_T^{(k)}} \sum_{j=1}^{N_T^{(k)}} \frac{f(\mathbf{x}^{(j)} | \boldsymbol{\theta})}{\Delta(\mathbf{x}^{(j)})} \\ \text{s. t. } &\begin{cases} C_j(\boldsymbol{\theta}) \leq 0 & j = 1, 2, \dots, n_c \\ \theta_i^{(k)} \leq \theta_i \leq \bar{\theta}_i^{(k)} & i = 1, 2, \dots, n_\theta \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

最终, 通过求解等价的式(23), 即可得到可靠性优化问题的解。需要指出的是, 在求解该优化问题中, 由于没有涉及极限状态函数的计算(解耦后的确定性优化问题), 可以采用各种优化算法来进行求解。

### 2.5 优化方法的过程

所提优化方法的具体过程如下, 流程如图1所示。

1) 扩展空间子集模拟。通过执行一次扩展空间子集模拟得到失效域中的初始失效样本。

2) 马尔可夫链模拟。根据 Metropolis-Hasting 算法, 在设计子域上生成更多所需样本。

3) 估计后验分布  $\varphi(\boldsymbol{\theta} | F)$  并解耦优化问题。根据信息重用策略, 收集前面各次和当前次迭代中可用的样本, 得到后验分布的估计量  $\hat{\varphi}_F^{(k)}(\boldsymbol{\theta} | F)$ , 将原始可靠性优化问题解耦为确定性优化问题。

4) 求解确定性优化问题。在子域中求解该确定性优化问题, 并寻找出下一个候选优化设计,

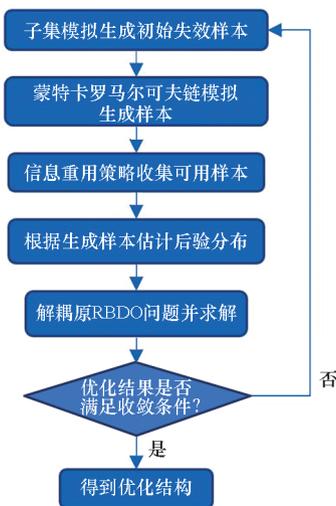


图1 所提方法的流程图

Fig. 1 Flowchart of the proposed method

同时更新下一次优化的子域。

5) 重复步骤2~4, 直至得到的优化候选值收敛到最优值。

### 3 算例

为了说明所提方法的优越性, 本节给出算例进行说明, 并与其他方法进行对比, 包括原扩展空间方法<sup>[30]</sup>、基于一次指数函数拟合<sup>[12]</sup>和二次指数函数拟合<sup>[13]</sup>的解耦方法(可靠性分析部分同样采用子集模拟方法), 以及基于直接蒙特卡罗抽样和重要抽样的双循环方法。取基于直接蒙特卡罗抽样的双循环方法的结果(或不同初始点情况下的均值)作为精确值。各算例的收敛准则设定为  $\frac{1}{n_\theta} \|\boldsymbol{\theta}^{(k)} - \boldsymbol{\theta}^{(k-1)}\| / \|\boldsymbol{\theta}^{(k)}\| < 1\%$ 。

#### 3.1 算例1: 复合材料梁

考虑包含多失效模式的复合材料梁结构(该算例参考文献[33]), 如图2所示。该复合梁的尺寸参数分别为宽度  $A$  (mm)、高度  $B$  (mm)、长度  $L$  (mm), 而复合梁材料的杨氏模量为  $E_w$  (GPa)。同时, 有杨氏模量为  $E_a$  (GPa) 的铝板加固在梁的底部, 其横截面如图3所示, 横截面宽度为  $C$  (mm)、高度为  $D$  (mm)。在梁上施加6个垂直于地面的外力  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  (kN), 这些纵向力的施加位置分别为  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$  (mm)。

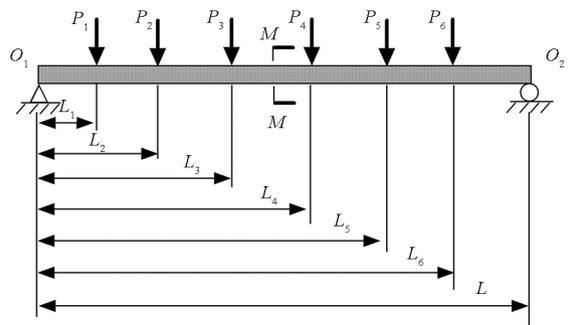


图2 复合材料梁的结构示意图

Fig. 2 Structure diagram of composite beam

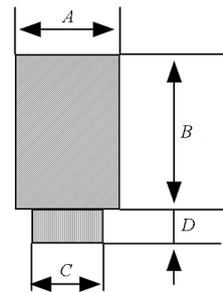


图3 复合材料梁的横截面

Fig. 3 Cross-section of composite beam

该结构失效情况定义为复合梁的最大主应力  $\sigma_{\max}(\mathbf{x})$  大于许用应力  $S = 0.0195 \text{ GPa}$ 。系统的基本随机变量向量  $\mathbf{x}$  中包含 19 个变量, 即  $\mathbf{x} = [A, B, C, D, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, E_a, E_w]$ , 这些随机变量包括梁的尺寸、梁和铝板的弹性模量以及外加垂直作用力的位置和大小等。最大弯曲应力  $\sigma_{\max}(\mathbf{x}) = \max\{\sigma_k(\mathbf{x}) : k = 1, \dots, 6\}$ ,  $\sigma_k(\mathbf{x})$  为第  $k$  个横截面处的应力, 可以通过式(24)得出。

$$\sigma_1(\mathbf{x}) = \frac{[(L_1/L) \sum_{i=1}^6 P_i(L - L_i)] Y_{\max}(\mathbf{x})}{W(\mathbf{x})} \quad (24)$$

$$\sigma_k(\mathbf{x}) = \frac{[(L_k/L) \sum_{i=1}^6 P_i(L - L_i) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i(L_k - L_i)] Y_{\max}(\mathbf{x})}{W(\mathbf{x})} \quad (25)$$

式中,  $k = 2, 3, 4, 5, 6$ 。

$$Y_{\max}(\mathbf{x}) = \frac{0.5AB^2 + DC(B + D)E_a/E_w}{AB + DCE_a/E_w} \quad (26)$$

$$W(\mathbf{x}) = \frac{AB^3}{12} + AB \left[ Y_{\max}(\mathbf{x}) - \frac{B}{2} \right]^2 + \frac{CD^3 E_a}{12 E_w} + \frac{CDE_a}{E_w} \left[ \frac{D}{2} + B - Y_{\max}(\mathbf{x}) \right]^2 \quad (27)$$

该结构的极限状态函数可以表示为:

$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = \min\{g_k(\mathbf{x})\} \\ g_k(\mathbf{x}) = S - \sigma_k(\mathbf{x}) \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (28)$$

本例中随机变量  $A, B, C, D$  的均值为设计参数, 即  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4] = [\mu_A, \mu_B, \mu_C, \mu_D]$ , 设计域为  $\theta_1 \in [95, 105], \theta_2 \in [190, 210], \theta_3 \in [75, 85], \theta_4 \in [18, 22]$ 。本例各变量分布信息如表 1 所示, 且所有随机变量都相互独立。

该例的可靠性优化问题为:

$$\begin{aligned} & \min P_f(\boldsymbol{\theta}) \\ & \text{s. t. } \begin{cases} C(\boldsymbol{\theta}) = \theta_1 \theta_2 + \theta_3 \theta_4 - 22\,000 \leq 0 \\ 95 \leq \theta_1 \leq 105 \\ 190 \leq \theta_2 \leq 210 \\ 75 \leq \theta_3 \leq 85 \\ 18 \leq \theta_4 \leq 22 \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

式(29)中优化目标为最小化失效概率函数, 而确定性约束为梁的横截面积不超过  $22\,000 \text{ mm}^2$ 。

采用不同方法求解该复合材料梁结构的可靠性优化问题, 选取 Case A:  $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = [95, 190, 75, 18]$ , Case B:  $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = [100, 200, 80, 20]$  和 Case C:  $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = [105, 210, 85, 22]$  三个不同参数初始值进

表 1 随机变量分布信息(算例 1)

Tab. 1 Distribution of random variables(example 1)

序号	变量	均值	标准差	分布类型
1	$A/\text{mm}$	$\mu_A = \theta_1 \in [95, 105]$	5	正态
2	$B/\text{mm}$	$\mu_B = \theta_2 \in [190, 210]$	10	正态
3	$C/\text{mm}$	$\mu_C = \theta_3 \in [75, 85]$	4	正态
4	$D/\text{mm}$	$\mu_D = \theta_4 \in [18, 22]$	1	正态
5	$L_1/\text{mm}$	200	2	正态
6	$L_2/\text{mm}$	400	4	正态
7	$L_3/\text{mm}$	600	6	正态
8	$L_4/\text{mm}$	800	8	正态
9	$L_5/\text{mm}$	1 000	10	正态
10	$L_6/\text{mm}$	1 200	12	正态
11	$L/\text{mm}$	1 400	14	正态
12	$P_1/\text{kN}$	15	3	极值
13	$P_2/\text{kN}$	15	3	极值
14	$P_3/\text{kN}$	15	3	极值
15	$P_4/\text{kN}$	15	3	极值
16	$P_5/\text{kN}$	15	3	极值
17	$P_6/\text{kN}$	15	3	极值
18	$E_a/\text{GPa}$	70	0.7	正态
19	$E_w/\text{GPa}$	8.75	0.087 5	正态

行优化。各方法所得结果及所需的样本数列于表 2, 其中误差为优化结果各分量的相对误差的最大值(以双循环蒙特卡罗结果为参考准确值)。

如表 2 所示, 除扩展空间方法外, 各方法的结果较为一致。需要指出的是, 所需样本数  $N$  包括三部分: 子集模拟中间层的样本数、最终层失效样本数以及马尔可夫链模拟样本数。由表 2 看出, 所提方法所需样本数在所有方法中最小(小于 4 000)。而原方法即便采用较多样本, 还是出现了局部解的情况, 误差较大(大于 10%)。而所提方法在不同初始点情况下的最终优化结果误差在 1% 以内(以双循环蒙特卡罗为精确值)。此外, 所提方法所需计算代价仅为同样是解耦的一次指数和二次指数拟合方法的 1/10 左右。而双循环方法由于需要反复进行可靠性分析计算, 因此需要更大的计算代价, 远多于所提方法。

综上, 所提方法相比于原方法, 保证了计算结果的全局性和稳定性, 相比于双循环方法, 则拥有极高的求解效率优势。

表2 复合材料梁的可靠性优化结果  
Tab.2 Reliability optimization results of composite beams

所用方法	初始点 $\theta^{(0)}$	优化结果 $\theta_{opt}^{(k)}$	样本数	误差/%
所提方法	[95,190,75,18]	[95.86,210.00,85.00,22.00]	2 000 + 950 + 950	0.33
	[100,200,80,20]	[95.86,210.00,85.00,22.00]	2 000 + 964 + 964	0.33
	[105,210,85,22]	[95.86,210.00,85.00,22.00]	2 000 + 925 + 925	0.33
原扩展空间方法 <sup>[30]</sup>	[95,190,75,18]	[98.33,210.00,75.00,18.00]	2 × 2 000	18.18
	[105,210,85,22]	[97.47,210.00,85.00,18.00]	2 × 2 000	18.18
一次指数解耦方法 <sup>[12]</sup>	[95,190,75,18]	[96.90,210.00,75.00,22.00]	$7.5 \times 10^4$	11.76
	[100,200,80,20]	[95.86,210.00,85.00,22.00]	$3.4 \times 10^4$	0.33
二次指数解耦方法 <sup>[13]</sup>	[95,190,75,18]	[95.86,210.00,85.00,22.00]	$4.7 \times 10^4$	0.33
	[100,200,80,20]	[95.86,210.00,85.00,22.00]	$5.2 \times 10^4$	0.33
双循环(重要抽样)	[95,190,75,18]	[95.86,210.00,85.00,22.00]	$23 \times 10^5$	0.33
	[105,210,85,22]	[95.86,210.00,85.00,22.00]	$18 \times 10^5$	0.33
双循环(蒙特卡罗)	[105,210,85,22]	[96.18,210.00,85.00,22.00]	$16 \times 10^6$	

### 3.2 算例2:飞机内襟翼结构

该例中,考虑飞机的内襟翼结构的可靠性优化问题(来自文献[34])。该问题包含了有限元的分析,内襟翼三维有限元模型如图4所示。

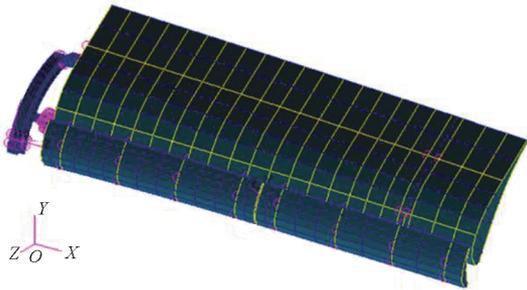


图4 飞机内襟翼结构的有限元模型  
Fig.4 Finite element model of aircraft inner flap structure

该结构受气动载荷作用,将气动载荷等效为有限元模型各节点上的载荷形式。假设在最坏的工况条件下,当结构产生的最大位移超过了最大许用位移  $D_a$  时,即认定为失效。对应包含有限元分析的隐式极限状态函数可表示为:

$$g(\mathbf{x}) = D_a - f(t_1, t_2, t_3, t_4, A_1, A_2, E_1, G_1, E_2, G_2, F_A) \quad (30)$$

式中:  $D_a = 34.1 \text{ mm}$ ;  $t_1, t_2, t_3, t_4$  为内襟翼四根梁的厚度;  $A_1$  和  $A_2$  为其中两个梁的横截面积;  $E_1$ 、 $E_2$  和  $G_1$ 、 $G_2$  分别为模型材料的弹性模量和剪切模量; 随机变量  $F_A$  则与载荷施加到的不同节点

有关,如果载荷施加在节点  $i$  上,则载荷值  $F_i = (1 + F_A)F_{i0}$ , 式中的  $F_{i0}$  为一个常数。本算例中所有随机变量均为服从高斯分布且相互独立,其分布信息如表3所示。

表3 随机变量的分布信息(算例2)  
Tab.3 Distribution of random variables(example 2)

随机变量	均值	变异系数
$t_1$	$\theta_1$	0.05
$t_2$	2 mm	0.05
$t_3$	4 mm	0.05
$t_4$	$\theta_2$	0.05
$A_1$	50 cm <sup>2</sup>	0.05
$A_2$	150 cm <sup>2</sup>	0.05
$E_1$	70 380 MPa	0.05
$G_1$	26 458.6 MPa	0.05
$E_2$	72 450 MPa	0.05
$G_2$	27 236.8 MPa	0.05
$F_A$	0	0.05

本算例中,取  $t_1$  和  $t_4$  的均值分别作为该算例的设计参数  $\theta_1$  与  $\theta_2$ , 其设计域分别为  $\theta_1 = \mu_{t_1} \in [1.5, 2.5]$ ,  $\theta_2 = \mu_{t_4} \in [1.3, 1.7]$ 。该算例的优化问题可以写为:

$$\begin{aligned} & \min P_F(\boldsymbol{\theta}) \\ & \text{s. t. } \begin{cases} C(\boldsymbol{\theta}) = 8\,716.49\theta_1 + 69\theta_2 \leq 17\,557.52 \\ 1.5 \leq \theta_1 \leq 2.5 \\ 1.3 \leq \theta_2 \leq 1.7 \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

式中的确定性约束  $C(\boldsymbol{\theta})$  与内襟翼结构的质量有关。

选取三个不同的参数设计初始点,采用各

方法求解该可靠性优化问题。优化结果如表 4 所示。由于该机翼结构算例包含有限元分析,考虑到计算代价的问题,其他方法在优化过程中均采用基于 Kriging 方法建立极限状态函数的代理模型再进行优化求解。所提方法则分别直接结合有限元模型和结合 Kriging 模型来进行。

表 4 内襟翼结构的可靠性优化结果  
Tab. 4 Reliability optimization results of inner flap structure

所用方法	初始点 $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$	优化结果 $\boldsymbol{\theta}_{\text{opt}}^{(k)}$	样本数	误差/%
所提方法(结合有限元模型)	[1.500 0, 1.300 0]	[2.000 8, 1.700 0]	2 000 + 238 + 509	0
	[2.500 0, 1.300 0]	[2.000 8, 1.700 0]	2 000 + 312 + 507	0
	[2.500 0, 1.700 0]	[2.000 8, 1.700 0]	2 000 + 291 + 436	0
所提方法(结合 Kriging 模型)	[1.500 0, 1.300 0]	[2.000 8, 1.700 0]	2 000 + 226 + 438	0
	[2.500 0, 1.300 0]	[2.000 8, 1.700 0]	2 000 + 252 + 517	0
	[2.500 0, 1.700 0]	[2.000 8, 1.700 0]	2 000 + 273 + 494	0
一次指数解耦方法 <sup>[12]</sup> (结合 Kriging 模型)	[1.500 0, 1.300 0]	[1.500 0, 1.700 0]	$3.8 \times 10^4$	25
	[2.500 0, 1.700 0]	[2.000 8, 1.700 0]	$4.4 \times 10^4$	0
二次指数解耦方法 <sup>[13]</sup> (结合 Kriging 模型)	[1.500 0, 1.300 0]	[2.000 8, 1.700 0]	$6.1 \times 10^4$	0
	[2.500 0, 1.700 0]	[2.000 8, 1.700 0]	$6.7 \times 10^4$	0
原扩展空间方法 <sup>[30]</sup> (结合 Kriging 模型)	[1.500 0, 1.300 0]	[1.500 0, 1.300 0]	$2 \times 1\,400$	25
	[2.500 0, 1.700 0]	[1.500 0, 1.700 0]	$2 \times 1\,400$	25
双循环(蒙特卡罗 + 结合 Kriging 模型)	[2.500 0, 1.700 0]	[2.000 8, 1.700 0]	$7 \times 10^6$	

由表 4 结果可知,在不同初始值下,所提方法结合 Kriging 模型与结合有限元模型的结果均与双循环方法的结果一致,且仅需两次迭代就能够收敛到最优解,所需要的计算量(均小于 3 000)也远小于其他解耦及双循环方法。而原扩展空间方法在同样量级的计算样本数(2 800)的情况下,出现了陷入局部解的情况。而所提方法计算效率高(可直接结合有限元来进行分析),且能够保证全局性。表 4 中显示一次指数解耦方法亦出现局部解情况。从计算代价上来看,所提方法依然比指数拟合方法的解耦方法的计算代价少一个数量级。因此,该工程结构分析结果表明了所提方法的高效性和优越性。

#### 4 结论

针对复杂结构可靠性优化设计问题,提出了

一种高效的扩展空间子集模拟及马尔可夫链的优化方法。所提方法将失效概率函数转化为设计参数的后验分布,并表示为积分的形式,使得求解过程无须密度函数的拟合计算。同时,通过扩展空间中的子集模拟获得多个初始失效样本;采用马尔可夫链模拟高效地生成样本,无须再次进行可靠性分析;还结合了近似序列优化与信息重用策略,将逐次迭代的样本充分利用求解当前目标函数,进一步提高了优化效率。

通过数值算例和机翼结构有限元算例来说明所提方法的优越性,结果表明:

1) 所提方法仅需进行一次子集模拟的可靠性分析,而在马尔可夫链模拟过程中不会涉及可靠性分析,避免了进行重复的可靠性分析;

2) 所提方法对优化问题的失效概率大小不敏感,均能通过数次迭代即可求得优化解,因此适

用于解决小失效概率优化问题;

3)所提方法采用了子集模拟来获取初始失效样本,能够避免出现局部优化,提高了优化计算的稳健性。

需要指出的是,所提方法的高效性建立在仅针对特定的可靠性优化问题上,即设计参数为随机变量的分布参数形式。针对设计参数为包含在极限状态方程中的确定性变量的问题还有待进一步拓展研究。

## 参考文献 (References)

- [1] ENEVOLDSEN I, SØRENSEN J D. Reliability-based optimization in structural engineering[J]. *Structural Safety*, 1994, 15(3): 169 – 196.
- [2] SHIRGIR S, SHAMSADDINLOU A, ZARE R N, et al. An efficient double-loop reliability-based optimization with metaheuristic algorithms to design soil nail walls under uncertain condition [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2023, 232: 109077.
- [3] LIANG J H, MOURELATOS Z P, NIKOLAIDIS E. A single-loop approach for system reliability-based design optimization [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2007, 129(12): 1215 – 1224.
- [4] FAES M G R, VALDEBENITO M A. Fully decoupled reliability-based design optimization of structural systems subject to uncertain loads[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 371: 113313.
- [5] YUAN X K, GU J, WU M Y, et al. Efficient reliability-based optimization of linear dynamic systems with random structural parameters [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2021, 64: 2593 – 2608.
- [6] LEHKÝ D, SLOWIK O, NOVÁK D. Reliability-based design: artificial neural networks and double-loop reliability-based optimization approaches[J]. *Advances in Engineering Software*, 2018, 117: 123 – 135.
- [7] CHEN X G, HASSELMAN T, NEILL D, et al. Reliability based structural design optimization for practical applications[C]// *Proceedings of the 38th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 1997: 1403.
- [8] YANG M D, ZHANG D Q, JIANG C, et al. A hybrid adaptive Kriging-based single loop approach for complex reliability-based design optimization problems[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2021, 215: 107736.
- [9] YANG M D, ZHANG D Q, WANG F, et al. Efficient local adaptive Kriging approximation method with single-loop strategy for reliability-based design optimization [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, 390: 114462.
- [10] 袁修开, 朱海燕, 张保强. 结构可靠性优化求解的解耦融合策略[J]. *工程力学*, 2018, 35(5): 102 – 108, 117. YUAN X K, ZHU H Y, ZHANG B Q. A decoupling-integrated approach for structural reliability-based design optimization [J]. *Engineering Mechanics*, 2018, 35(5): 102 – 108, 117. (in Chinese)
- [11] RAJASHEKHAR M R, ELLINGWOOD B R. A new look at the response surface approach for reliability analysis [J]. *Structural Safety*, 1993, 12(3): 205 – 220.
- [12] JENSEN H A. Structural optimization of linear dynamical systems under stochastic excitation: a moving reliability database approach [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(12/13/14/15/16): 1757 – 1778.
- [13] GASSER M, SCHUËLLER G I. Reliability-based optimization of structural systems[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 1997, 46(3): 287 – 307.
- [14] JENSEN H A, VALDEBENITO M A, SCHUËLLER G I, et al. Reliability-based optimization of stochastic systems using line search[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198(49/50/51/52): 3915 – 3924.
- [15] ZHANG J H, XIAO M, LI P G, et al. Sampling-based system reliability-based design optimization using composite active learning Kriging[J]. *Computers & Structures*, 2020, 239: 106321.
- [16] ROY A, CHAKRABORTY S. Support vector machine in structural reliability analysis: a review [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2023, 233: 109126.
- [17] LEE S. Monte Carlo simulation using support vector machine and kernel density for failure probability estimation [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2021, 209: 107481.
- [18] BHATTACHARYYA B. Structural reliability analysis by a Bayesian sparse polynomial chaos expansion [J]. *Structural Safety*, 2021, 90: 102074.
- [19] AU S K. Reliability-based design sensitivity by efficient simulation[J]. *Computers & Structures*, 2005, 83(14): 1048 – 1061.
- [20] YUAN X K. Local estimation of failure probability function by weighted approach[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2013, 34: 1 – 11.
- [21] YUAN X K, VALDEBENITO M A, ZHANG B Q, et al. Efficient decoupling approach for reliability-based optimization based on augmented Line Sampling and combination algorithm[J]. *Computers & Structures*, 2023, 280: 107003.
- [22] FAES M G R, VALDEBENITO M A. Fully decoupled reliability-based optimization of linear structures subject to Gaussian dynamic loading considering discrete design variables [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 156: 107616.
- [23] ZHAO Z, ZHAO Y G, LI P P. A novel decoupled time-variant reliability-based design optimization approach by improved extreme value moment method [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2023, 229: 108825.
- [24] VALDEBENITO M A, SCHUËLLER G I. A survey on approaches for reliability-based optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 42: 645 – 663.
- [25] AOUES Y, CHATEAUNEUF A. Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization [J].

- Structural and Multidisciplinary Optimization, 2010, 41: 277–294.
- [26] AU S K, BECK J L. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2001, 16(4): 263–277.
- [27] AU S K. On the solution of first excursion problems by simulation with applications to probabilistic seismic performance assessment [R]. California: California Institute of Technology, 2001.
- [28] YUAN X K, LIU S L, VALDEBENITO M A, et al. Decoupled reliability-based optimization using Markov chain Monte Carlo in augmented space [J]. Advances in Engineering Software, 2021, 157: 103020.
- [29] JEREZ D J, JENSEN H A, BEER M. Reliability-based design optimization of structural systems under stochastic excitation: an overview [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 166: 108397.
- [30] CHING J, HSIEH Y H. Approximate reliability-based optimization using a three-step approach based on subset simulation [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2007, 133(4): 481–493.
- [31] YUAN X K, LIU S L, VALDEBENITO M A, et al. Efficient procedure for failure probability function estimation in augmented space [J]. Structural Safety, 2021, 92: 102104.
- [32] JACOBS J H, ETMAN L F P, VAN KEULEN F, et al. Framework for sequential approximate optimization [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2004, 27(5): 384–400.
- [33] 朱海燕, 袁修开. 基于灵敏度的可靠性优化解耦方法 [J]. 航空学报, 2015, 36(3): 881–888.  
ZHU H Y, YUAN X K. A decoupling method of reliability optimization based on sensitivity [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, 36(3): 881–888. (in Chinese)
- [34] YUAN X K, LU Z Z, ZHOU C C, et al. A novel adaptive importance sampling algorithm based on Markov chain and low-discrepancy sequence [J]. Aerospace Science and Technology, 2013, 29(1): 253–261.