

ATK 驱动的 HEO 卫星同步带巡视场景构建与轨道机动协同设计

李林洪^{1,2}, 梁彦刚^{1,2*}, 黎克波^{1,2}, 王嘉欣^{1,2}

(1. 国防科技大学空天科学学院, 湖南长沙 410073; 2. 太空系统运行与控制全国重点实验室, 湖南长沙 410073)

摘要: 异面飞越是一种对同步带高价值目标卫星进行监测的有效方法。以椭圆轨道巡视同步带的任务场景为例, 提出一种求解任意两椭圆轨道最小相遇距离的方法, 证明巡视卫星的最优飞越点为升交点。使用航天任务工具箱 (aerospace tool kit, ATK) 仿真软件对任务进行场景建模, 研究 J2 模型下最优飞越点位置的变化。在不同的当地地方时和不同飞越方向的情况下, 研究飞越点相对距离、太阳角等终端约束条件的变化规律。提出一种满足最大转移时间和终端条件约束的燃料最优转移策略, 结合 ATK 的机动规划模块, 求解了不同摄动力模型的任务参数, 分析了二体模型下不同真近地点角对应的任务参数, 验证了策略的有效性, 为多星巡视顺序的规划提供了依据。

关键词: 航天任务工具箱; 异面飞越; 大椭圆轨道; 最小相遇距离

中图分类号: V412.4 文献标志码: A 文章编号: 1001-2486(2025)04-052-12



论
文
拓
展

ATK-driven HEO satellite synchronous belt surveillance mission architecture and orbital maneuver co-design

LI Linhong^{1,2}, LIANG Yangang^{1,2*}, LI Kebo^{1,2}, WANG Jiaxin^{1,2}

(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. State Key Laboratory of Space System Operation and Control, Changsha 410073, China)

Abstract: A non-coplanar flyby is recognized as an effective method for monitoring high-value target satellites in geosynchronous orbit. Taking the scenario of patrolling the geosynchronous belt with an elliptical orbit as an example, a method for solving the minimal orbital intersection distance between any two elliptic orbits was proposed, and it was proven that the optimal flyby point for the patrolling satellite is the ascending node. ATK (aerospace tool kit) was used to model the mission scenario, investigating the variations in the optimal flyby point position in J2 gravitational model. The variation law in terminal constraints (e.g., relative distance and sun phase angle at the flyby point) were studied under different local times and flyby directions. A optimal fuel transfer strategy satisfying the maximum transfer time and terminal constraints was proposed, and mission parameters for the mission under different gravitational model assumptions were solved by using the maneuver planning module in ATK. Mission parameters corresponding to different true anomaly angles in the two-body model were analyzed, the effectiveness of the strategy was validated, and a basis for planning multiple patrol sequences was provided.

Keywords: ATK; non-coplanar flyby; highly elliptical orbit; minimal orbital intersection distance

随着太空技术的快速发展, 太空在政治、经济、文化、军事领域被广泛应用, 国防安全对于太空的依赖性不断增强。地球同步带作为太空的重要区域, 许多高价值卫星都分布其中。根据 2024 年欧洲航天局空间碎片办公室发布的《空间环境报告》, 轨道高度分布在 35 586 ~ 35 986 km、轨道倾角分布在 $-15^\circ \sim 15^\circ$ 范围内的区域被称为

地球同步带。截至 2023 年, 分布在地球静止轨道 (geostationary orbit, GEO) 的空间物体有 912 个, 其中携带有效载荷的有 800 颗卫星^[1]。为更好地监测地球同步带卫星的工作情况, 通常需要发射观测卫星对地球同步带进行巡视, 其中包括共面交会和异面飞越两种方式。典型的共面交会案例即为美国于 2014 年开始实施的地球同步轨道空间态势

收稿日期: 2024-12-31

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (12125207)

第一作者: 李林洪 (2001—), 男, 湖南常德人, 硕士研究生, E-mail: lilinhong23@nudt.edu.cn

*通信作者: 梁彦刚 (1979—), 男, 陕西宝鸡人, 教授, 博士, 博士生导师, E-mail: Liangyg@nudt.edu.cn

引用格式: 李林洪, 梁彦刚, 黎克波, 等. ATK 驱动的 HEO 卫星同步带巡视场景构建与轨道机动协同设计 [J]. 国防科技大学学报, 2025, 47(4): 52-63.

Citation: LI L H, LIANG Y G, LI K B, et al. ATK-driven HEO satellite synchronous belt surveillance mission architecture and orbital maneuver co-design [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2025, 47(4): 52-63.

感知计划(geosynchronous space situation awareness program, GSSAP),通过将卫星分布在地球同步带附近的上下两侧,对同步带进行巡视,截至2023年共有6颗GSSAP卫星发射入轨^[1]。异面飞越巡察的方法则常见于地球同步转移轨道(geostationary transfer orbit, GTO),根据2024年欧洲航天局的报告显示,从2020年开始,该类型的数量逐年快速增长,截至2023年分布在GTO上的空间目标有1216个。该类型轨道由于具备较大的偏心率,也称为大椭圆轨道^[1](highly elliptical orbit, HEO)。其远地点高度与同步带近似,周期接近半天,每天与同步带存在两次交会条件,若在此类交会中选择预定交会点,相比于共面交会,具有节省推进剂和时间的特点^[2]。对于重点目标群和大规模星座等对象,使用异面飞越的方式相对于GSSAP采用的共面交会抵近方式更节省燃料,能够满足对数量庞大卫星群进行近距离巡察的需求。

航天器对目标的交会或者飞越轨迹转移的优化问题本质上是一个两点边值问题,唯一的区别是终端时刻航天器与目标的状态是否重合。轨迹优化常用的求解方法包括直接法、间接法。约束 Lambert 问题作为轨道两点边值问题的重点研究方向,是直接法和间接法求解的基础。Shen 等^[3]在传统 Lambert 方法的基础上提出了多圈 Lambert 求解方法。Zhang 等^[4]研究了在远地点高度约束条件下的多圈 Lambert 问题的求解。Yang 等^[5]提出了基于同伦的方法求解 J2 摄动 Lambert 问题的方法。谢聪等^[6]提出了基于 A* 算法的求解各种复杂 Lambert 摄动的方法。Thompson^[7]和 Luo^[8]等研究了地月转移过程中带有航迹角约束的拟 Lambert 问题。

直接法指通过控制变量、优化算法的方式进行寻优,将问题转化为非线性规划问题。Luo 等^[9]研究了摄动条件下时间固定的多脉冲交会问题,采用遗传算法(genetic algorithm, GA)和序列二次规划(sequential quadratic programming, SQP)算法串行的方式求出了最终解;朱阅誥^[10]通过对差分进化(differential evolution, DE)算法进行改进,提高了求解多圈摄动最优交会轨迹的效率。间接法则基于极小值原理,将问题建模为最优控制问题,将问题构成多点边值问题。Lawden^[11]提出的主矢量理论总结了机动条件下满足燃料最优时速度协态量满足的必要条件;沈红新^[12]提出了解析同伦的脉冲轨迹控制方法;Yan 等^[13]则在此基础上考虑了 J2 摄动条件下包

括相对速度、阳光角等约束在内的飞越轨迹的间接优化方法。除了基于 Lambert 方法的轨迹优化方法,双切向脉冲策略在工程上具有更可靠的操作性。Zhu 等^[14]通过两切向脉冲实现了燃料最优的空间目标飞越;Han 等^[2]在 Zhu 的基础上研究了最大时间约束条件下,双切向脉冲的燃料最优实现方案,提高了求解的效率。

在以上问题中都涉及复杂的轨道动力学的计算。航天任务工具箱(aerospace tool kit, ATK)作为国防科技大学空天科学学院载人航天技术团队开发的航天任务设计自主工业软件,具有通用的任务场景建模、可靠的轨道数据报告和二次开发接口的特点,能够将复杂的轨道问题与编程软件中的优化算法快速结合起来,有效地验证算法的正确性,并将计算结果可视化,在轨道任务仿真中具备显著的优势^[15]。同时 ATK 3.0 版本的交会与接近操作(rendezvous and proximity operations, RPO)机动规划模块,在轨道交会领域,相较于 STK12.2 版本,异面飞越等交会模式更全面。基于 ATK 3.0 版本,本文对 HEO 卫星巡视同步带进行任务场景建模与机动规划。

1 任务场景建模

与 GSSAP 卫星接近巡视的方式不同,大椭圆转移轨道对同步带的巡视是采用近距离异面飞越的方式,如图 1 所示。

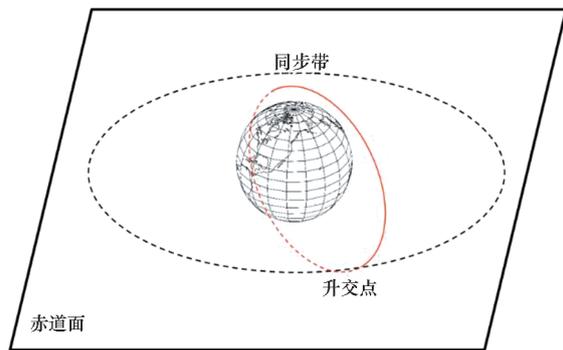


图1 HEO 轨道飞越同步带示意图

Fig. 1 Diagram of HEO orbits flying over synchronous belt

在同步带卫星的飞越过程中,巡视卫星在轨道面内有不同的飞越方向,其示意图如图 2 所示。

假设卫星在小倾角、小偏心率、轨道高度为 42 157 km 地球同步轨道,为了确保每次巡视卫星飞越同步轨道的各项参数相对稳定,选择轨道倾角为 63.4°、近地点辐角为 180°,能够保证在 J2 摄动条件下,巡视卫星的远地点和飞越点重合。为了研究不同的飞越情况,在同一平面内给出三

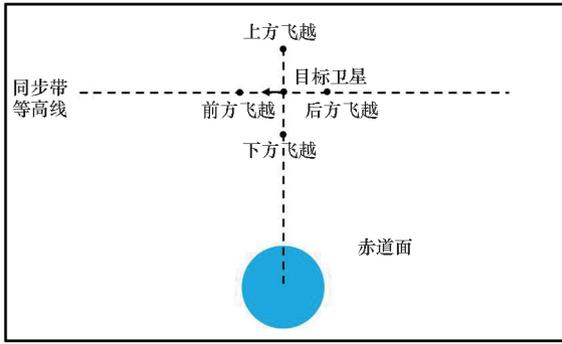


图 2 HEO 不同的飞越方向

Fig. 2 Different flyby direction of HEO

组不同偏心率的巡视轨道卫星,其远地点高度分别满足小于、等于和大于同步带高度。巡视卫星 1、巡视卫星 2 和巡视卫星 3 的轨道根数在表 1 中给出。

表 1 卫星仿真参数

Tab. 1 Simulation parameters of satellites

仿真参数	巡视卫星 1	巡视卫星 2	巡视卫星 3
半长轴/km	26 610.2	26 610.2	26 610.2
偏心率	0.584 23	0.585 4	0.583 3
轨道倾角/(°)	63.4	63.4	63.4
升交点赤经/(°)	0	0	0
近地点幅角/(°)	180	180	180
真近地点角/(°)	0	0	0

在异面飞越的场景中,首先需要找到飞越点。文献[2]提出任意两个椭圆轨道之间存在最小相遇距离。求解近距离飞越场景中飞越点的位置,即求解巡视卫星和目标卫星最小相遇距离的情况下,两颗卫星各自的真近地点角。因此求解飞越点即找出巡视卫星和地球同步卫星轨道的最小相遇距离及其对应的真近地点角。

1.1 求解飞越点

文献[2]中没有通过二阶导数的雅可比矩阵判断解的最优性,求出的结果仅仅满足最优性的必要条件,并且忽略了引入变量 x 的奇异问题。本文通过取较大的步长,在全局遍历找出最小值,并以该值作为初始值进行迭代求解,保证结果最优,其流程图如图 3 所示。

已知大椭圆轨道根数 $(a_1, e_1, i_1, \Omega_1, \omega_1)$ 和地球同步轨道根数 $(a_2, e_2, i_2, \Omega_2, \omega_2)$, 在二体模型假设下,椭圆轨道位置矢量在惯性坐标系三个轴

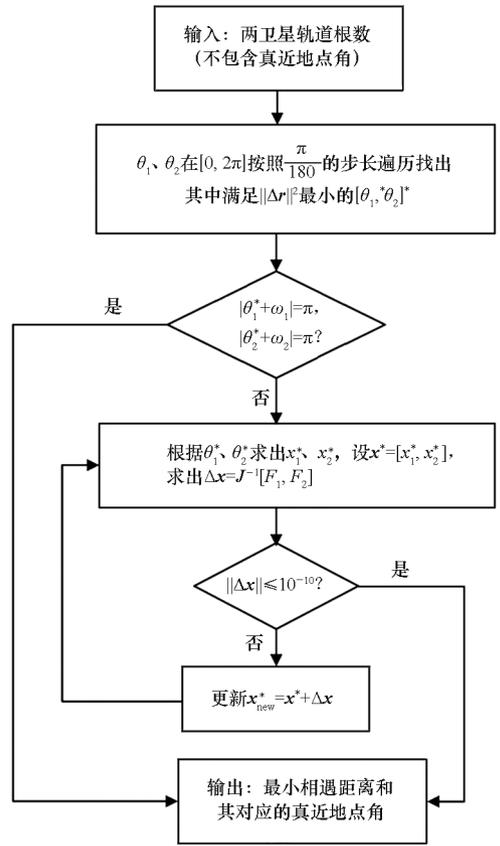


图 3 最小相遇距离算法的流程图

Fig. 3 Flowchart of algorithm for solving minimal orbit intersection distance

的分量为:

$$\mathbf{r} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta + \omega) \cos\Omega - \sin(\theta + \omega) \sin\Omega \cos i \\ \cos(\theta + \omega) \sin\Omega + \sin(\theta + \omega) \cos\Omega \cos i \\ \sin(\theta + \omega) \sin i \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: θ 为真近地点角; ω 为近地点幅角; i 为轨道倾角; Ω 为升交点赤经; r 为椭圆轨道矢径大小,其表达式为

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos\theta} \quad (2)$$

其中 a 为轨道半长轴, e 为轨道偏心率。设 $\Delta\mathbf{r}$ 为两轨道的相对距离,引入变量 x ,大椭圆和地球同步轨道卫星对应的变量分别为 x_1 和 x_2 ,其表达式为:

$$x = \tan\left(\frac{\theta + \omega}{2}\right) \quad (3)$$

用 $\|\Delta\mathbf{r}\|^2$ 代替 $\|\Delta\mathbf{r}\|$ 降低求导的复杂性,其必要条件:

$$\begin{cases} \frac{\partial \|\Delta\mathbf{r}\|^2}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \|\Delta\mathbf{r}\|^2}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

将式(1)~(3)代入式(4),且当 $\left| \frac{\theta + \omega}{2} \right| \neq \frac{\pi}{2}$

时,可以得到 x_1, x_2 的偏导方程 $F_1(x_1, x_2)$ 和 $F_2(x_1, x_2)$:

$$F_1(x_1, x_2) = (1 + x_1^2)^2 p_1 e_1 \delta_1 \sigma_2 - p_2 \sigma_1 \{ e_1 \delta_1 [C_4(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) - 2C_5(x_2^2 - 1)x_1 - 2C_6(x_1^2 - 1)x_2 + 4C_7 x_1 x_2] + \sigma_1 [C_5(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) + 2C_4(x_2^2 - 1)x_1 - 2C_7(x_1^2 - 1)x_2 - 4C_6 x_1 x_2] \} = 0 \quad (5)$$

$$F_2(x_1, x_2) = (1 + x_2^2)^2 p_2 e_2 \delta_2 \sigma_1 - p_1 \sigma_2 \{ e_2 \delta_2 [C_4(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) - 2C_6(x_1^2 - 1)x_2 - 2C_5(x_2^2 - 1)x_1 + 4C_7 x_1 x_2] + \sigma_2 [C_6(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) + 2C_4(x_1^2 - 1)x_2 - 2C_7(x_2^2 - 1)x_1 - 4C_5 x_1 x_2] \} = 0 \quad (6)$$

其中, p_1, p_2 分别为大椭圆轨道和地球同步轨道的半通径, δ_i, σ_i ($i=1, 2$) 的表达式分别为

$$\begin{cases} \delta_i = 2x_i \cos \omega_i + (x_i^2 - 1) \sin \omega_i \\ \sigma_i = e_i \cos \omega_i (1 - x_i^2) + 2e_i x_i \sin \omega_i + x_i^2 + 1 \end{cases}$$

常数 C_4, C_5, C_6 和 C_7 的表达式为

$$\begin{cases} C_4 = \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \\ C_5 = \cos i_1 \sin(\Omega_2 - \Omega_1) \\ C_6 = \cos i_2 \sin(\Omega_1 - \Omega_2) \\ C_7 = \cos i_1 \cos i_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) + \sin i_1 \sin i_2 \end{cases}$$

使用 Newton 法求解二元方程组,其雅可比矩阵表达式 \mathbf{J} 为:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

式(5)~(6)的解满足最优性的必要条件,需要通过二阶导数来判断充分条件,若 \mathbf{J} 为正定矩阵,则为极小值。

Newton 法能否收敛到满足极小值的零点,与初值选取相关,因此本文采取大步长遍历的方式,找到合适的初值,如果满足半轨道幅角的正切变量 \mathbf{x}^* 为无穷大,则说明真近地点角即为所求,不满足则令该值为初值进行迭代,保证其迭代的结果收敛到极小值。

从直观上来讲,通常两个轨道面的交线是最小相遇距离可能出现的位置,两轨道面的交线矢量为:

$$\mathbf{L} = \pm \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2 \quad (8)$$

式中, \mathbf{h}_1 和 \mathbf{h}_2 分别为大椭圆轨道和地球同步轨道的角动量,惯性坐标系的单位向量为:

$$\mathbf{h}_i = [\sin \Omega_i \sin i_i, -\cos \Omega_i \sin i_i, \cos i_i]^T \quad (9)$$

比较 $\Delta \mathbf{r}^*$ 和 \mathbf{L} , 代入巡视任务中的两种轨道,通过该方法可以求出:当卫星同时位于两个轨道面交线上的时候满足最小相遇距离。由于近地点辐角为 π , 最优飞越点为远地点,因此最优飞越点位置也在轨道的升交点处。

1.2 升交点漂移率

根据 1.1 节的结论,高轨巡视任务场景建模首先要找到最优飞越点位置变化规律,即升交点对应的地理经度的漂移情况。考虑 J_2 摄动的情况下,先后经过升交点的周期 P_Ω 的表达式为:

$$P_\Omega = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu} \left(\frac{1}{1+K} \right)} \quad (10)$$

$$K = \frac{3J_2 \left(\frac{R_\oplus}{p} \right)^2}{4} [\sqrt{1-e^2}(2-3\sin^2 i) + (4-5\sin^2 i)] \quad (11)$$

其中, μ 为引力常数, J_2 为地球二阶球谐系数, R_\oplus 为地球半径, p 为轨道的半通径。星下点轨迹的漂移率 $\Delta \lambda_{\text{rev}}$ 为:

$$\Delta \lambda_{\text{rev}} = (\omega_\oplus - \dot{\Omega}) P_\Omega \quad (12)$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{3nR_\oplus^2 J_2 \cos i}{2p^2} \quad (13)$$

其中: ω_\oplus 为地球自转角速度, $\dot{\Omega}$ 是升交点的变化速率,单位均为 rad/s; n 为平均角速度。

通过 ATK 仿真,使用 J_2 预报器,轨道的仿真参数为表 1 巡视卫星 1,仿真开始时间为 2023 年 9 月 21 日 0 时,仿真得到的升交点对应的地理经度变化示意图如图 4 所示。

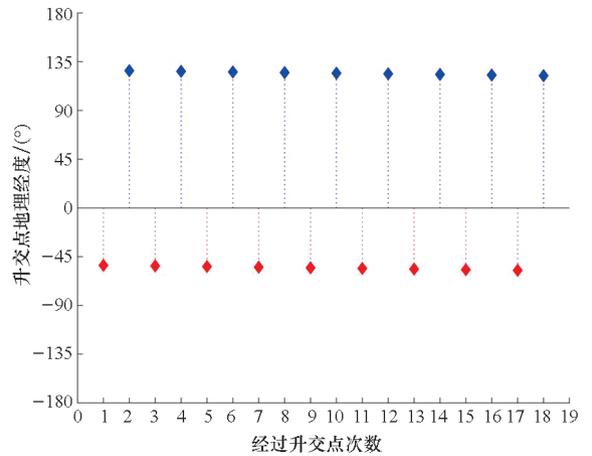


图 4 大椭圆轨道升交点的地理经度

Fig. 4 Geographic longitude of the ascending node of HEO

分析图 4,在考虑 J_2 摄动条件下,1 d 内轨道的升交点对应的地理经度将会在东西两个地理经度内跳跃变化,相差相位为 180° 。同时升交点也存在缓慢的漂移,每天漂移约 $0.577 1^\circ$,在长期任

务中,可以利用此特性,对同步带进行自然巡视。假设目标飞越点附近有效侦察距离为 50 km,该类型卫星约花费 2 a 的时间能够实现对整个同步带的有效巡视。

1.3 终端约束条件

在飞越任务过程中,对巡视影响较大的终端约束条件主要包括:相对距离、太阳角、地影。本节分析不同飞越当地地方时和飞越点位置的情况下终端约束条件的变化规律。

1.3.1 相对距离

相对距离,即在 J2000 惯性坐标系下,两颗卫星的相对距离的绝对值:

$$r = \|\mathbf{r}_{\text{HEO}} - \mathbf{r}_{\text{GEO}}\| \quad (14)$$

在巡视任务中,当相对距离 r 在一定范围内(即有效工作距离 r_{max})才能成功巡视目标。终端约束中相对距离的约束表达为:

$$r \leq r_{\text{max}} \quad (15)$$

1.3.2 太阳角

太阳角,即巡视卫星指向目标卫星的视线与其指向太阳的视线的夹角 β ,如图 5 所示,其表达式:

$$\beta = \arccos\left(\frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|}\right) \quad (16)$$

式中, \mathbf{r}_1 为巡视卫星指向目标卫星的方向矢量, \mathbf{r}_2 为巡视卫星指向太阳的方向矢量。在巡视任务中,当太阳角 β 大于 90° 时,即认定为顺光巡视,符合巡视条件;当小于 90° 时,即认定为逆光巡视,不符合巡视条件。终端约束中太阳角的约束表达为:

$$\beta \geq \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

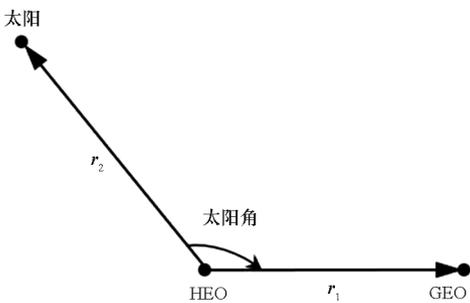


图 5 太阳角

Fig. 5 Solar phase angle

在直观上来讲,假定飞越点一直位于同步带的正下方,如图 2 所示,很显然,当飞越点在当地时间为中午 12 时的时候,不满足太阳角约束;若当地时间为 0 时,满足太阳角约束。可以看出,巡

视卫星飞越目标卫星的太阳角的变化与飞越点的当地时间有关。

1.3.3 地影

根据太阳和地球的位置,同步带的一部分区域总是无法被太阳照亮,在飞越位于该同步带的卫星时,传感器是无法有效对其成像的。目前,常用的地影模型有两种类型:柱形地影模型和锥形地影模型。柱形地影模型更简单,只能描述卫星被完全照亮或被阻挡两种状态,一般应用于低轨卫星的地影预测,不适用于高精度卫星自主阴影预测。因此,本文采用锥形地影模型进行分析。

参考文献[11],锥形地影模型如图 6 所示,将日心 O_s 和地心 O_e 连线为轴, R_s 和 R_e 分别为太阳和地球的半径, V_1 和 V_2 分别为半影圆锥和本影圆锥的顶点, α 和 β 分别为半影圆锥和本影圆锥的半锥角, O_1, O_2, O_3 分别对应着本影、半影、直射三种区域。

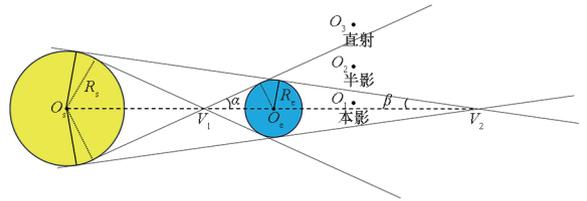


图 6 锥形地影模型^[16]

Fig. 6 Conical Earth shadow model^[16]

当目标卫星位于本影区域时,巡视卫星无法对其清晰成像,当位于半影区域和直射区域时,则满足成像条件,因此在巡视的过程中,终端约束中地影的约束为目标不在本影区域。

1.3.4 仿真分析

根据 1.1 节,最优飞越点的位置在巡视卫星轨道的升交点处。参考图 2,相对目标卫星而言,有不同的飞越方向。假设目标卫星轨道高度为 h_δ ,定位的地理经度为 λ_δ ,上方飞越和下方飞越对应的飞越点高度表达式为:

$$h_f = h_\delta \pm \Delta h \quad (18)$$

式中, Δh 为飞越点时刻巡视卫星离目标卫星的距离。前后飞越方式的飞越点高度为 h_δ ,其飞越的地理经度表达式为:

$$\lambda_f = \lambda_\delta \pm \frac{\Delta h}{h_\delta} \quad (19)$$

在目标卫星的 LVLH (local vertical local horizontal) 坐标系中,不同飞越位置对应的坐标在表 2 中给出。

表2 不同飞越方向的 LVLH 坐标

Tab.2 LVLH coordinates of different flyby direction

坐标	上方飞越	下方飞越	前方飞越	后方飞越
x	Δh	$-\Delta h$	0	0
y	0	0	Δh	$-\Delta h$
z	0	0	0	0

(1) 相对距离和太阳角分析

为减少太阳倾角的影响,选择夏至和冬至附近为仿真时间,取 $\Delta h = 30$ km,研究不同当地地方时和不同飞越方向的终端约束条件的变化规律。采用上方、下方、前方、后方四种不同的飞越方式,研究巡视卫星和目标卫星的相对距离与太阳角的变化规律。

经过分析得到,不同地方时对应的最优飞越方式不同,地方时 6、12、18、24 时对应的最优飞越方式分别为前方、上方、后方、下方飞越。图 7 ~ 10 给出了不同时刻采用最优飞越方式时相对距离和太阳角的变化图。

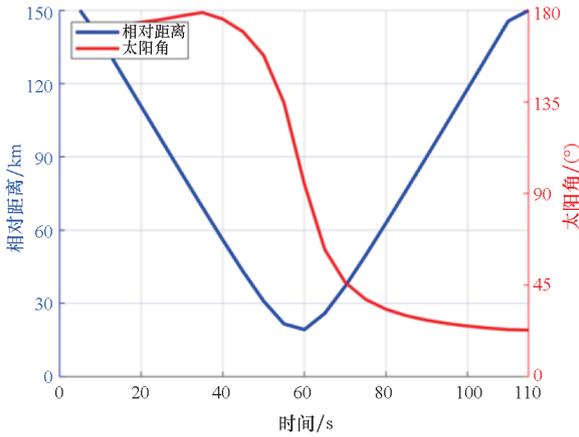


图7 6时前方飞越

Fig.7 Ahead flyby at 6:00

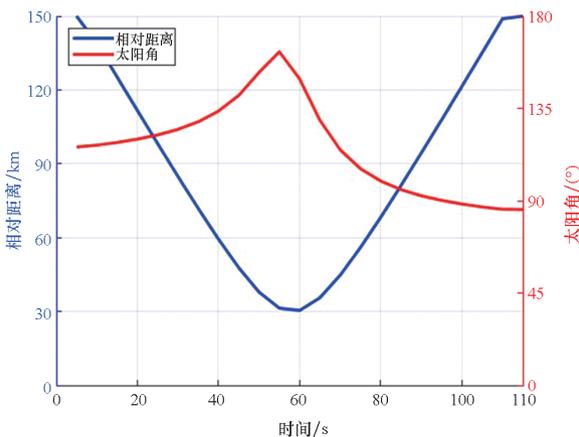


图8 12时上方飞越

Fig.8 Above flyby at 12:00

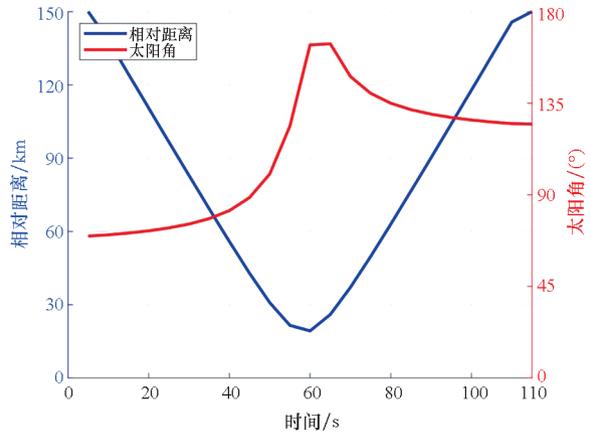


图9 18时后方飞越

Fig.9 Rear flyby at 18:00

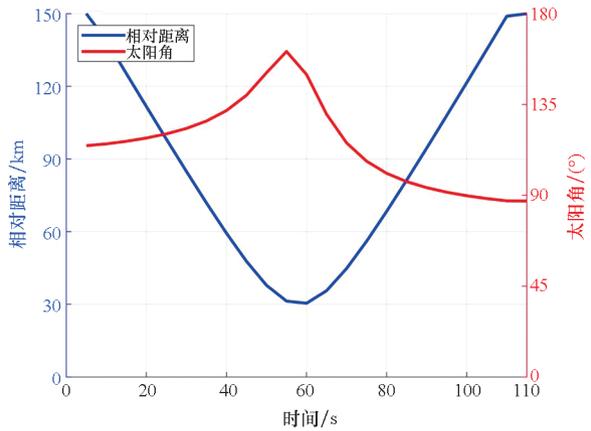


图10 24时下方飞越

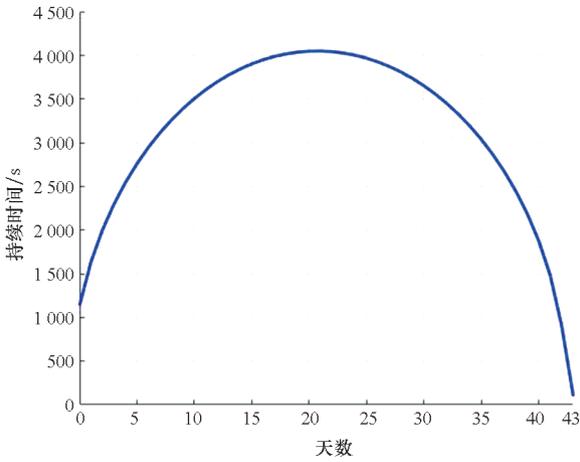
Fig.10 Below flyby at 24:00

分析图 7 ~ 10 可以发现,不同时刻对应的最优飞越位置不同,且在 12 时、24 时的最优飞越方式有更长的光照条件。

(2) 地影分析

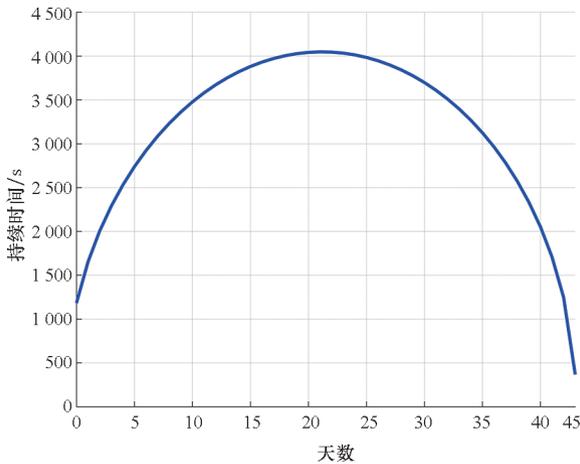
研究地球同步轨道卫星是否位于本影区域,通常与仿真的月份相关。从直观上来看,在夏至和冬至附近的时候,地球同步轨道卫星在整个轨道周期内都是位于直射区域;在春分和秋分附近的时候则存在部分轨道区域位于本影或者半影区域。选取仿真时间 2023 年 1 月 1 日到 2024 年 1 月 1 日,观察地球同步轨道卫星出现地影的时间段,及该时间段内本影持续时间长度的变化。得到同步带卫星位于本影的时间段为 2023 年 2 月 28 日—2023 年 4 月 11 日、2023 年 9 月 1 日—2023 年 10 月 15 日。在两个时间段内,每天本影持续时间长度的变化如图 11 所示。

由图 11 可以看出,对于地球同步轨道卫星,其在一天内处于本影区域的时间非常短,最长的时间也只有接近 4 000 s,因此在一年的大部分时



(a) 春分附近

(a) Near the Vernal Equinox



(b) 秋分附近

(b) Near the Autumnal Equinox

图 11 本影持续时间

Fig. 11 Duration of the umbra

间内,地影对成像卫星的终端约束都是满足的,在巡视任务规划中,地影的影响忽略不计。

2 任务规划

根据 1.3 节的分析,在实际任务中,要考虑飞越点的终端条件约束和最大任务时间约束。因此本节提出了一种最大时间约束条件下燃料最优的共面机动方案,结合 ATK 的轨道机动模块,求解不同摄动力模型下的轨道机动方案。

2.1 飞越时间

根据 1.1 节,对于大椭圆轨道和地球同步轨道,两个轨道面的交线在惯性空间是不变的。本文采取共面机动策略,因此,巡视卫星飞越巡视的位置在惯性空间是固定的。在实际单星对单星的巡视任务中,通常会有最大时间约束 T_{max} ,即在指定时间内完成巡视任务。假设仿真初始时刻目标

卫星对应的平近点角为 M_0 ,在飞越点的平近点角为 M_f ,则求出目标卫星单圈到达飞越点的时间 T_0 为:

$$T_0 = \begin{cases} \frac{M_f - M_0}{n_2} & M_f > M_0 \\ \frac{M_f + 2\pi - M_0}{n_2} & M_f \leq M_0 \end{cases} \quad (20)$$

式中, n_2 为目标卫星轨道的平均角速度。求出整个过程目标卫星的最大圈数 k_{max} :

$$k_{max} = \frac{T_{max} - T_0 - \text{MOD}(T_{max} - T_0, T_1)}{T_1} \quad (21)$$

式中, T_1 为目标卫星轨道的周期。因此整个过程的飞越时间 T_{all} 的表达式为:

$$T_{all} = T_0 + k_{max} T_1 \quad (22)$$

2.2 机动方案

根据 2.1 节,飞越点固定的情况下,问题简化为固定时间内巡视卫星通过双脉冲机动到达指定位置的优化问题。双脉冲机动策略如图 12 所示。蓝色线代表巡视卫星初始轨道,绿色线代表调相轨道,红色线代表转移轨道, L 为两轨道面的交线。在巡视卫星初始轨道近地点沿切向施加第一次脉冲,卫星进入调相轨道,第二次脉冲使卫星进入转移轨道,转移轨道与初始轨道和目标轨道的交线的交点即为飞越点。

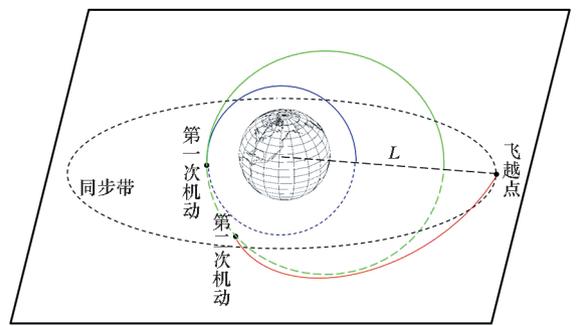


图 12 双脉冲机动策略示意图

Fig. 12 Schematic diagram of the two-impulses maneuver strategy

根据 1.3 节的结论和当地地方时确定飞越方式,设其飞越点离目标距离均为 30 km。假设卫星该时刻定位的地理经度为 λ_2 ,仿真开始 UTC 时间为 A 、任务时间为 H 时,卫星的地方时表达式为:

$$T_{local} = \text{MOD}(A + H + \lambda_2/15, 24) \quad (23)$$

结合 ATK 软件的轨道机动模块,机动方案的界面设置如图 13 所示,其中三个预报段对应三类轨道,两个机动段对应两次脉冲。

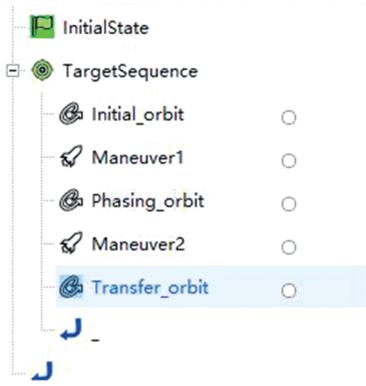


图 13 ATK 中 Astrogator 的任务序列

Fig. 13 The sequences of Astrogator in ATK

2.3 脉冲优化

文献[2]中提出的双脉冲策略燃料优化方法,相比于多圈 Lambert 算法,极大地提高了计算效率,但是没有对第一次脉冲大小和方向的初始值 Δv_{10} 、 α_{10} 进行估计。而在实际案例计算中,能否给定合适的初始值 Δv_{10} 对计算结果是否收敛到最优值有很大的影响,因此本文提出了估计上述两种参数初始值的方法,并结合巡视任务案例背景改进文献中的方法,其流程如图 14 所示。

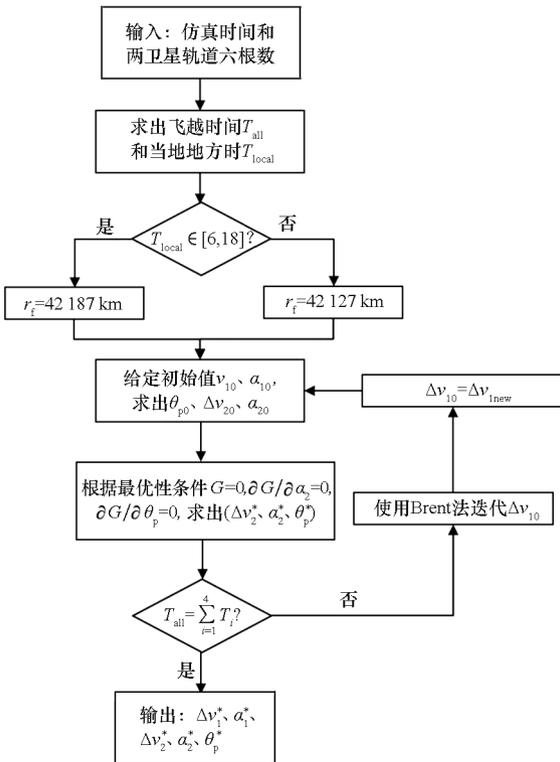


图 14 机动优化算法流程

Fig. 14 Flowchart of maneuver optimization algorithm

根据 2.2 节提出的机动方案,采用双层优化模型,外层优化为假定已知第一次脉冲大小 Δv_1 和方向 α_1 的情况下,求解第二次脉冲的最优性策

略。对于第二次脉冲,决策变量有速度大小 Δv_2 、速度方向 α_2 和施加第二次脉冲时调相轨道的真近地点角 θ_p 。内层优化则使用任务时间约束,实现对 Δv_1 的优化。

2.3.1 外层优化

设巡视卫星到达飞越点的矢径大小为 r_f ,其与第二次脉冲的任务参数满足函数:

$$G(\Delta v_2, \alpha_2, \theta_p) = \left[\frac{r_p^2}{\mu r_f} - \frac{r_p \cos \Delta \theta}{\mu} \right] v_{12}^{+2} + \frac{r_p \sin \Delta \theta}{\mu} v_{12}^+ v_{12}^+ - 1 + \cos \Delta \theta = 0 \quad (24)$$

式中, r_p 为第二次脉冲施加前转移轨道的矢径大小, μ 为地球引力常数, v_{12}^{+2} 和 v_{12}^{+2} 分别为施加第二次脉冲后速度沿切向和径向的大小, $\Delta \theta$ 为飞越点与第二次脉冲施加点的真近地点角差。

函数 G 分别对 Δv_2 、 α_2 和 θ_p 求偏导数,其表达式为:

$$\frac{\partial G}{\partial \Delta v_2} = \left[\frac{r_p^2}{\mu r_f} - \frac{r_p \cos \Delta \theta}{\mu} \right] (2v_{12}^- \cos \alpha_2 + 2\Delta v_2 \cos^2 \alpha_2) + \frac{r_p \sin \Delta \theta}{\mu} (v_{12}^- \cos \alpha_2 + v_{12}^- \sin \alpha_2 + \Delta v_2 \sin 2\alpha_2) \neq 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha_2} = \left[\frac{r_p^2}{\mu r_f} - \frac{r_p \cos \Delta \theta}{\mu} \right] (-2v_{12}^- \Delta v_2 \sin \alpha_2 - \Delta v_2^2 \sin 2\alpha_2) + \frac{r_p \sin \Delta \theta}{\mu} \times [(v_{12}^- \cos \alpha_2 - v_{12}^- \sin \alpha_2) \times \Delta v_2 + \Delta v_2^2 \cos 2\alpha_2] = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta_p} = \left[\frac{2r_p}{\mu r_f} \frac{\partial r_p}{\partial \theta_p} - \left(\frac{\cos \Delta \theta}{\mu} \frac{\partial r_p}{\partial \theta_p} + \frac{r_p \sin \Delta \theta}{\mu} \right) \right] \times v_{12}^{+2} + \left(\frac{r_p^2}{\mu r_f} - \frac{r_p \cos \Delta \theta}{\mu} \right) \left(2v_{12}^- \frac{\partial v_{12}^-}{\partial \theta_p} + 2\Delta v_2 \frac{\partial v_{12}^-}{\partial \theta_p} \cos \alpha_2 \right) + \left(\frac{\sin \Delta \theta}{\mu} \frac{\partial r_d}{\partial \theta_p} - \frac{r_p \cos \Delta \theta}{\mu} \right) v_{12}^+ v_{12}^+ + \frac{r_p \sin \Delta \theta}{\mu} \times \left[v_{12}^- \frac{\partial v_{12}^-}{\partial \theta_p} + v_{12}^- \frac{\partial v_{12}^-}{\partial \theta_p} + \left(\frac{\partial v_{12}^-}{\partial \theta_p} \cos \alpha_2 + \frac{\partial v_{12}^-}{\partial \theta_p} \sin \alpha_2 \right) \times \Delta v_2 \right] + \sin \Delta \theta = 0 \quad (27)$$

其中, v_{12}^- 和 v_{12}^- 分别为施加第二次脉冲前速度沿切向和径向的大小, r_d 和 θ_d 分别为第二次脉冲施加后轨道的矢径大小和真近地点角。式(25)~(27)方程组的解 $(\Delta v_2^*, \alpha_2^*, \theta_p^*)$ 即满足最优性的

必要条件。 $\frac{\partial v_{12}^-}{\partial \theta_p}$ 、 $\frac{\partial v_{12}^-}{\partial \theta_p}$ 、 $\frac{\partial r_p}{\partial \theta_p}$ 和保证 Δv_2 收敛到最优值的初值估计方法详见参考文献[2]。

2.3.2 内层优化

第一次脉冲在近地点沿着切向施加脉冲,因此 α_1 的值为 0° 或者 180° , 根据 Δv_1 和 α_1 求出调相轨道半长轴 a_p 和偏心率 e_p :

$$a_p = \frac{\mu}{2} \frac{1}{\mu/[a_1(1-e_1)] - (v_1^- + \Delta v_1 \cos \alpha_1)^2/2} \quad (28)$$

$$e_p = 1 - \frac{a_1(1-e_1)}{a_p} \quad (29)$$

其中,

$$v_1^- = \sqrt{\mu \{2/[a_1(1-e_1)] - 1/a_1\}} \quad (30)$$

第二次脉冲施加后,根据 Δv_2 、 α_2 、 θ_p 求出转移轨道半长轴 a_t 、偏心率 e_t 、真近地点角 θ_t :

$$a_t = \frac{\mu}{2} \frac{1}{\mu/r_p - (v_2^{+2} + v_2^{-2})/2} \quad (31)$$

$$e_t = \sqrt{1 - \frac{h_t^2}{a_t \mu}} \quad (32)$$

$$\begin{cases} \sin \theta_t = \frac{h_t}{\mu e_t} v_{t2}^+ \\ \cos \theta_t = \frac{h_t v_{t2}^+}{\mu e_t} - \frac{1}{e_t} \end{cases} \quad (33)$$

其中,

$$h_t = v_{t2}^+ r_p \quad (34)$$

根据 2.1 节得到的飞越时间,求出巡视卫星在调相轨道的圈数 l 。巡视卫星整个过程可以分解为四个时间段:初始轨道从出发点到近地点的时间 T_1 、调相轨道旋转 l 圈的时间 T_2 、调相轨道近地点到第二次脉冲施加位置的转移时间 T_3 、转移轨道到飞越点的时间 T_4 。

$$T_1 = (2\pi - M_1) \sqrt{a_0^3/\mu} \quad (35)$$

$$T_3 = M_p \sqrt{a_p^3/\mu} \quad (36)$$

$$T_4 = \text{MOD}(2\pi + M_{it} - M_1, 2\pi) \times \sqrt{a_t^3/\mu} \quad (37)$$

式中, M_1 为初始轨道的平近点角, M_p 为第二次施加脉冲时调相轨道对应的平近点角, M_t 和 M_{it} 分别为第二次施加脉冲时转移轨道对应的平近点角和转移轨道飞越点对应的平近点角, a_1 、 a_p 和 a_t 分别为初始轨道、调相轨道、转移轨道的半长轴。 M_1 、 M_p 、 M_t 和 M_{it} 对应的真近地点角分别为 θ_1 、 θ_p 、 θ_t 和 θ_{it} 。平近点角和真近地点角的转换关系:

$$\sin E = (\sin \theta \sqrt{1-e^2})/(1 + e \cos \theta) \quad (38)$$

$$\cos E = (e + \cos \theta)/(1 + e \cos \theta) \quad (39)$$

$$M = E - e \sin E \quad (40)$$

根据 T_1 、 T_3 和 T_4 , 求出调相轨道的圈数:

$$l = \text{round} \left(\frac{\sqrt{\mu} T_{\text{all}} - T_1 - T_3 - T_4}{2\pi a_p^3} \right) \quad (41)$$

函数 round 即返回括号中最接近的整数。求出 T_2 的表达式:

$$T_2 = l \sqrt{a_p^3/\mu} \quad (42)$$

根据时间约束建立等式,使用 Brent 方法,迭

代求出其零点,求出 Δv_1 的速度:

$$\Delta T = T_{\text{all}} - \sum_{i=1}^4 T_i = 0 \quad (43)$$

由于初始值对结果影响较大,为获得可收敛到最优值的 Δv_{10} ,本文在文献[2]的基础上进行了改进,具体估计方法如下。

首先估算出最优机动时,调相轨道对应的圈数 l_0 。由于 Δv_{10} 、 θ_p 通常较小,近似认为 $a_p \approx a_0$, T_{30} 值为 0,由此求出转移轨道的初始半长轴:

$$a_{10} = \frac{r_t + r_0}{2} \quad (44)$$

式中, r_t 为转移轨道在飞越点的矢径大小,由于第一次机动均在近地点施加, r_0 即为初始巡视卫星的近地点高度。 T_{40} 近似等于转移轨道周期的一半,其表达式为:

$$T_{40} = \sqrt{a_{10}^3/\mu} \pi \quad (45)$$

根据式(41),求出调相轨道的初始圈数 l_0 和 T_{20} ;根据式(43),若 $\Delta T > 0$,则 α_{10} 的值为 0° ,反之则 α_{10} 的值为 180° 。同时为了得到调相后的轨道半长轴,根据调相轨道前后半长轴的关系有:

$$2\pi \left(\sqrt{\frac{a_0^3}{\mu}} - \sqrt{\frac{a_{p1}^3}{\mu}} \right) = \frac{\Delta T}{l_0} \quad (46)$$

根据式(28)和式(46),求出 a_{p1} 和 Δv_{10} 。

2.4 摄动修正

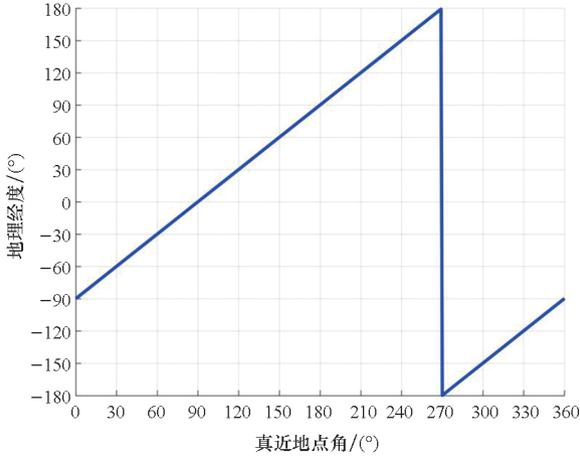
由于轨道摄动的存在,在实际任务背景下,2.3 节提出的双脉冲优化方法在复杂摄动力模型假设的求解中通常作为修正的初值,结合 ATK 摄动修正模型能够较好地实现交会。将二体模型下求解出的任务参数作为修正的初值,使用微分求解器对结果进行策略迭代,得到不同摄动力模型下的任务参数。ATK 中卫星预报段在高精度轨道预报器(high precision orbit propagator, HPOP)的摄动力模型参数设置包括引力场模型、大气阻力摄动、第三体轨道摄动、太阳光压等。微分修正器则分为控制变量和约束两部分,控制变量即期望修正的速度脉冲,约束即交会轨道的位置。设置对应参数的期望值:地理经度的期望值与目标卫星定位的地理经度相同;远地点高度的期望值与飞越方式有关,上方飞越的远地点高度期望值为 42 187 km,下方飞越的远地点高度期望值为 42 127 km。

2.5 仿真分析

2.5.1 真近地点角与飞越当地地方时的关系

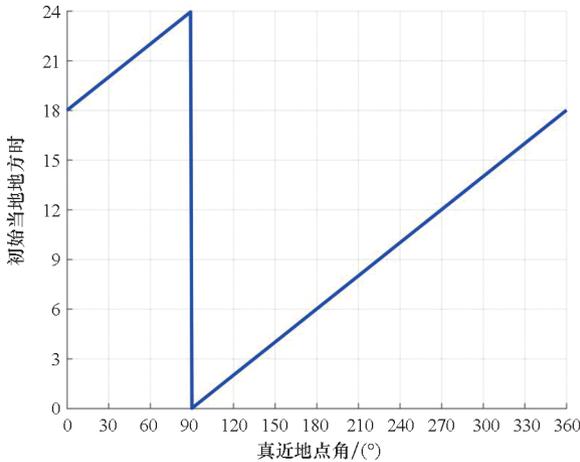
根据表 1 给出的数据,假定整个巡视任务的最大时间约束为 2 d,即 $T_{\text{max}} = 48$ h,为了不受地影的影响,仿真时间选择 2024 年 12 月 21 日,

ATK 计算得到的交线 L 对应的地球同步轨道的真近地点角约为 0° 。假设目标卫星为理想同步轨道卫星,即卫星角速度和地球自转角速度完全一致,选择仿真开始时间为 2024 年 12 月 21 日 0 时,目标卫星的真近地点角为 θ_{GEO} ,使用 ATK 计算其地理经度 λ_{GEO} 和初始时刻当地地方时 T_{local} ,真近地点角与两者的关系如图 15 所示。



(a) 地理经度

(a) Geographic longitude



(b) 初始当地地方时

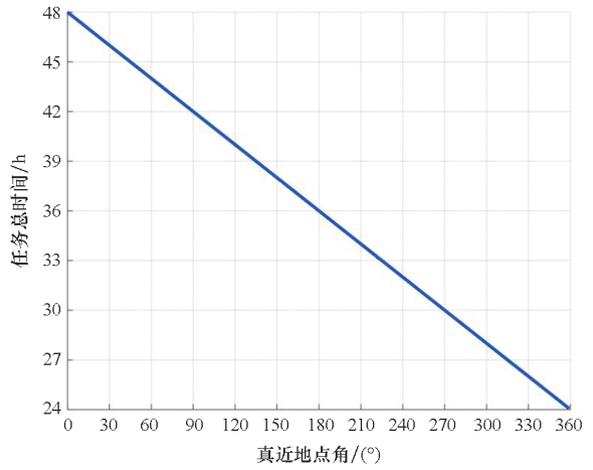
(b) Initial local time

图 15 理想卫星参数

Fig. 15 The ideal parameters of satellite

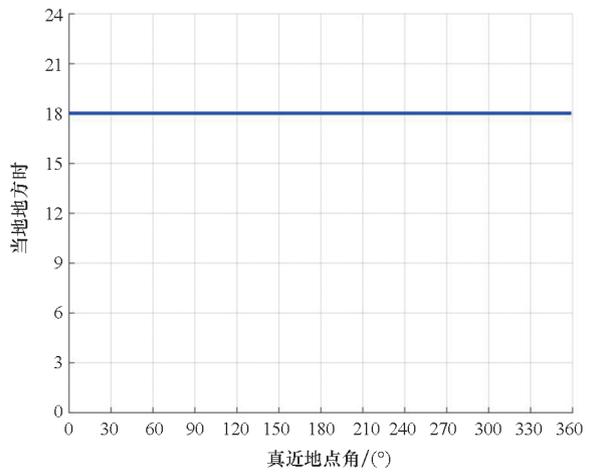
式(20)~(22)给出了真近地点角 θ_{GEO} 与整个任务时长的关系,式(23)给出了任务时间与飞越当地地方时的关系,结果如图 16 所示。

分析图 15 和图 16,可以得到以下结论:在理想地球同步轨道的目标卫星的真近地点角不影响飞越当地地方时,当地地方时恒为 18 时。因此对于第 2.2 节提出的机动方案,在仿真时间和巡视卫星轨道根数给定的情况下,其飞越当地地方时的时间是恒定的。



(a) 任务总时间

(a) The total time of mission



(b) 飞越当地地方时

(b) Encounter local time

图 16 理想任务参数

Fig. 16 The ideal parameters of mission

2.5.2 不同摄动力模型任务参数

仿真时间初始时刻设置为 2024 年 12 月 21 日 0 时,目标卫星初始真近地点角为 120° ,求出整个飞越时间约为 40 h,飞越点当地地方时为 20 时,采用下方飞越的方式,使用 ATK 微分模块时,飞越时刻目标卫星地理经度为 30.467° 。为了验证方法的有效性,采用文献[10]中提出的使用差分进化算法的直接法进行比较,设置相同的终端条件约束,其结果如表 3 所示。表 4 给出了摄动力模型下 ATK 修正得到的结果。

表 3 不同方法结果对比

Tab. 3 Results of different method

参数	本文的方法	文献[10]的直接法
速度总量/(m/s)	82.634	90.32
计算时间/s	1	约 30

表 4 ATK 不同摄动力模型的结果

Tab. 4 Results of different gravitational model on ATK

参数	二体	J2	HPOP
$\Delta v_1/(m/s)$	40.98	40.3	40.301
$\alpha_1/(^\circ)$	180	180	180
$\Delta v_2/(m/s)$	40.458	40.595	40.577
$\alpha_2/(^\circ)$	-2.015	-2.009	-2.01
$\theta_p/(^\circ)$	0	0	0
a_i/km	26 595.36	26 595.02	26 594.66
e_i	0.584	0.584 01	0.584 04

2.5.3 真近地点角与任务参数的关系

在实际巡视多星的任务中,通常需要比较不同位置目标卫星的巡视脉冲大小,进一步优化巡视目标卫星的顺序。在 $0 \sim 360^\circ$ 范围,取步长为 1° ,分析不同真近地点角在二体模型下的任务参数,结果如图 17~18 所示。

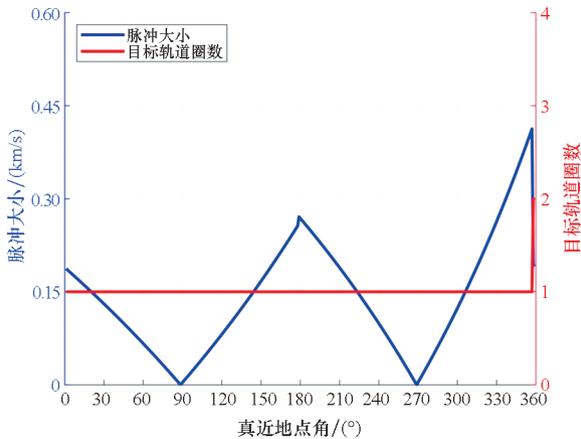


图 17 脉冲大小和目标轨道圈数

Fig. 17 Magnitude of impulse and orbital turns

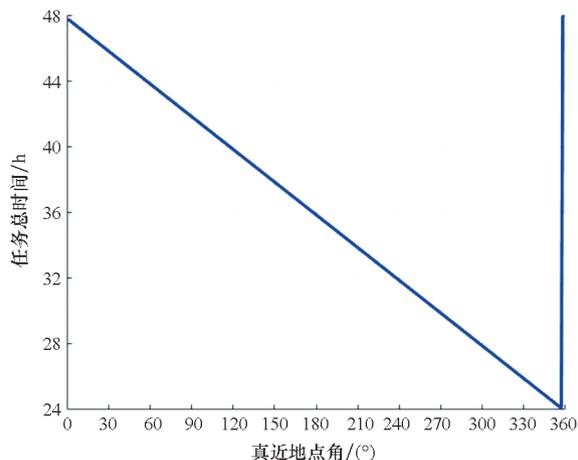


图 18 实际任务总时间

Fig. 18 The total time of mission in fact

分析仿真结果,可以得到以下结论:

1) 表 3 的结果表明,本文提出的与 ATK 结合的策略相较于已有文献中的方法,能更有效地应用于 HEO 对同步带的巡视任务,从而验证了本文策略的有效性。对摄动力模型下轨道机动最优策略的求解(见表 4)发现,两次脉冲最优施加位置均在近地点附近,且飞越点靠近远地点,这一结果与文献[13]提出的双切向脉冲策略吻合,证实了本文策略的最优性。此外,与 2.3.2 节结果中第二次最优脉冲位置的偏差,主要源于 ATK 自身约束条件引入的误差。

2) 分析图 17 和图 18 可知,在真近地点角接近 360° 时,任务时间出现显著增加。这种现象是由目标卫星轨道半长轴与理想地球同步轨道半长轴之间存在微小差异所致。该增加表明,在满足终端约束的前提下,延长任务时间有助于降低所需的总脉冲消耗。

3) 通过分析图 4 和图 17 可以发现,在真近地点角接近 90° 和 270° 这两个位置附近,所需的脉冲大小近似为 0,这与巡视卫星每天两次经过目标同步带的升交点和降交点(自然交会点)相对应,表明这些位置是巡视卫星能够实现自然巡视同步带的区域。目标卫星距离这两处自然交会点越远,所需的机动脉冲越大。因此,在巡视顺序规划中,往往需要重点考虑目标卫星的真近地点角与该巡视卫星自然交会点的位置关系。

3 结论

本文深入研究了大椭圆转移轨道在对同步带执行异面飞越任务中的应用。基于现有算法,采用大步长遍历的方法,成功获得了满足极小值条件的初始迭代值,并证明了最优飞越点位于巡视轨道的升交点处。利用 ATK 仿真软件,分析了大椭圆转移轨道升交点地理经度的漂移特性,并探讨了不同交会地方时和飞越方式对相对距离、太阳角等终端约束的影响规律,进而确定了不同当地地方时下的最优飞越方向。此外,研究分析了地影约束对巡视任务的影响,结果表明该约束在一年中的大部分时间里对同步带巡视任务的影响时间相对较短。

在此研究基础上,本文进一步探讨了在二体模型假设及最大时间约束下,单颗 HEO 卫星对单颗 GEO 卫星实施巡视任务时的燃料最优机动策略。在现有算法的基础上,提出了一种有效估计第一次机动脉冲大小和方向初值的方法,该方法确保了迭代求解结果能够稳定收敛于燃料最优解。随后,结合 ATK 软件的微分修正模块,将二

体模型下的最优结果作为初解,通过迭代修正获得了不同摄动力模型下的最优任务参数。通过分析目标卫星不同真近地点角对应的任务脉冲大小,验证了本文策略的有效性,为后续优化单对多卫星巡视顺序提供了重要的理论依据。

参考文献 (References)

- [1] ESA Space Debris Office. ESA's space environment report [R/OL]. (2024 - 07 - 19) [2024 - 08 - 19]. https://www.esa.int/Space_Safety/Space_Debris/ESA_Space_Environment_Report_2024.
- [2] HAN H W, LYU R F, QIAO D. Efficient optimization for time-constrained encounter of spacecraft with multirevolution phasing[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2024, 47(11): 2259 - 2272.
- [3] SHEN H J, TSOTRAS P. Optimal two-impulse rendezvous using multiple-revolution Lambert solutions[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2003, 26(1): 50 - 61.
- [4] ZHANG G, ZHOU D, MORTARI D. Optimal two-impulse rendezvous using constrained multiple-revolution Lambert solutions[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2011, 110: 305 - 317.
- [5] YANG Z, LUO Y Z, ZHANG J, et al. Homotopic perturbed Lambert algorithm for long-duration rendezvous optimization[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, 38(11): 2215 - 2223.
- [6] 谢聪, 杨震, 梁彦刚. 基于 A* 算法的摄动 Lambert 同伦迭代方法[J]. *航空学报*, 2025, 46(4): 330780.
XIE C, YANG Z, LIANG Y G. Homotopic perturbed Lambert algorithm based on A* algorithm [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2025, 46(4): 330780. (in Chinese)
- [7] THOMPSON B F, ROSTOWFSKE L J. Practical constraints for the applied Lambert problem[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2020, 43(5): 967 - 974.
- [8] LUO Q Q, MENG Z F, HAN C. Solution algorithm of a quasi-Lambert's problem with fixed flight-direction angle constraint [J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2011, 109: 409 - 427.
- [9] LUO Y Z, TANG G J, WANG Z G, et al. Optimization of perturbed and constrained fuel-optimal impulsive rendezvous using a hybrid approach [J]. *Engineering Optimization*, 2006, 38(8): 959 - 973.
- [10] 朱阅詠. 面向大规模目标访问任务的飞行序列规划方法[D]. 长沙: 国防科技大学, 2020.
ZHU Y H. Flight sequence planning method for large-scale target access mission[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2020. (in Chinese)
- [11] LAW DEN D F. Optimal trajectories for space navigation[J]. *The Mathematical Gazette*, 1964, 48(366): 478 - 479.
- [12] 沈红新. 基于解析同伦的月地应急返回轨迹优化方法[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2014.
SHEN H X. Optimization method for the moon-earth abort return trajectories based on analytic homotopic technique[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2014. (in Chinese)
- [13] YAN B, ZHANG J, LUO Y Z. Approximation of optimal impulsive flyby transfer with terminal inspection constraints[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2022, 45(10): 1963 - 1972.
- [14] ZHU Z L, YAN Y. Two-tangent-impulse flyby of space target from an elliptic initial orbit [J]. *Advances in Space Research*, 2016, 57(10): 2177 - 2186.
- [15] 罗亚中, 周建平. 航天任务分析与设计工业软件发展战略分析[J]. *力学与实践*, 2024, 46(2): 241 - 249.
LUO Y Z, ZHOU J P. Development strategic analysis for space mission analysis and design industrial software [J]. *Mechanics in Engineering*, 2024, 46(2): 241 - 249. (in Chinese)
- [16] 谢文杰, 邵圣祥, 王霞, 等. 基于影锥特征角的近圆轨道卫星进出地影时间的快速判定法[J]. *载人航天*, 2020, 26(3): 278 - 283.
XIE W J, SHAO S X, WANG X, et al. Fast algorithm of earth shadow entry and exit time for near circular orbit satellites based on conical characteristic angle [J]. *Manned Spaceflight*, 2020, 26(3): 278 - 283. (in Chinese)