

耦合宏观/介观方法的振荡热驱稀薄流动

杨伟奇, 钮耀斌*

(国防科技大学 空天科学学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:对二维方腔中顶盖温度振荡驱动稀薄流动进行研究,分析克努森数 Kn 与顶盖温度振荡频率对流场参数的影响规律。在靠近壁面处基于介观方法求解 Shakhov 模型方程,中心流域基于宏观方法减少计算资源消耗。宏观/介观虚拟边界利用高阶 Hermite 多项式重构分布函数,以封闭数值迭代格式。仿真结果表明:耦合方法相较全流场介观尺度方法,对方腔垂直中线处温度的预测结果相符,最大计算误差为 0.23%,计算内存消耗降低约 69.91%。耦合方法能够捕获振荡热驱稀薄流动在大 Kn 流域的非线性现象,此时水平方向速度分布不再服从周期振荡余弦函数规律,上升时间远大于下降时间。黏性穿透层厚度与受扰区域随着 Kn 的增大而增大,随着 St 的增大而减小。

关键词:稀薄气流;非平衡热驱流动;离散速度法;矩方法;耦合方法
中图分类号: O354 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2025)06-168-10



Hybrid macroscopic/mesoscopic scheme for oscillatory thermally driven rarefied gas flows

YANG Weiqi, NIU Yaobin*

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Thermally-induced oscillatory rarefied gas flow inside a two-dimensional rectangular cavity was investigated. The effects of the Knudsen numbers and the oscillation frequency of lid temperature on the flow parameters were analyzed. The Shakhov model equation was solved numerically based on the mesoscopic approach in the near-wall region, and the macroscopic approach was adopted in the bulk flow region to reduce the computational cost. To close the numerical iteration procedure, the velocity distribution functions, served as the pseudo boundary between macroscopic and mesoscopic methods, were reconstructed using the high-order Hermite polynomials. Numerical simulations demonstrate that the temperature profile at the central vertical of the cavity predicted by the hybrid method is in good agreement with results from the mesoscopic method, with maximum error 0.23%. Besides, the computational memory cost can be saved up to about 69.91%. The hybrid approach is able to capture the nonlinear phenomenon in the thermally-induced oscillatory rarefied gas flow under high Kn numbers, where the horizontal velocity no longer obeys the law of periodic oscillating cosine function, and the rise time of the horizontal velocity is much longer than the fall time. The thickness of the viscous penetration layer and the disturbed region increases as the Kn number increases, and decreases as the St number increases.

Keywords: rarefied gas flows; thermally-induced non-equilibrium flows; discrete velocity method; moment method; hybrid method

随着精密制造领域微机电系统(micro electro mechanical systems, MEMS)在近十年的高速发展,微型器件广泛应用在国防科技与航空航天领域^[1-2]。为了保证元器件的高分辨率与高敏感度,其内部运动部件通常工作在非平衡稀薄流状态,气体对运动部件表面产生显著的黏滞阻尼效应^[2-3]。在微尺度或稀薄流动下,MEMS的壁面温度梯度与非均匀温度场驱动气体分子流动,如

热蠕流动^[4]、Knudsen 泵^[5]等热驱流动,温度的变化将大幅降低测量精度^[6],导致测量误差较大,甚至出现错误结果^[7]。因此,精确高效地描述其流动机理,对预测设计 MEMS 器件热力学性能具有重要价值。

在 MEMS 中,描述气体稀薄程度的克努森数 Kn 一般定义为:分子平均自由程 λ 与特征尺度 L_0 的比值^[8]。根据 Kn 的不同,流体可以划分为

收稿日期:2023-09-24
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12302382,12372297);湖南省自然科学基金青年基金资助项目(2022JJ40542)
第一作者:杨伟奇(1989—),男,安徽宿州人,讲师,博士,E-mail:yangweiqi@nudt.edu.cn
*通信作者:钮耀斌(1983—),男,浙江嘉兴人,副研究员,博士,硕士生导师,E-mail:nyb2007@nudt.edu.cn
引用格式:杨伟奇,钮耀斌. 耦合宏观/介观方法的振荡热驱稀薄流动[J]. 国防科技大学学报, 2025, 47(6): 168-177.
Citation: YANG W Q, NIU Y B. Hybrid macroscopic/mesoscopic scheme for oscillatory thermally driven rarefied gas flows[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2025, 47(6): 168-177.

连续流域 ($Kn \leq 0.001$)、滑移流域 ($0.001 < Kn \leq 0.1$)、过渡流域 ($10^{-1} < Kn \leq 10$) 与自由分子流域 ($Kn > 10$)。在连续流域,基于非定常纳维-斯托克斯-傅里叶 (Navier-Stokes-Fourier, NSF) 方程的振荡流动受到了广泛的研究^[9-12],如平板间振荡气流流动传热研究^[9-10];顶盖振荡驱动方腔流动中,不同雷诺数与振动频率对于涡系位置与流线的影响研究等^[11-12]。微纳尺度 MEMS 器件一般处于滑移流域与早期过渡流域 ($10^{-1} < Kn \leq 1$),气体的非平衡特性可以通过高阶宏观方法或介观方法进行描述。

在宏观尺度,纳维-斯托克斯 (Navier-Stokes, NS) 方程组与速度滑移、温度跳跃边界条件可以描述滑移流域的非平衡特性^[13-15]。Emerson 等^[9]基于 NS 方程组,得到了圆柱间振荡 Couette 流动速度剖面与切应力的解析解。Guo 等^[16]与 Tang 等^[17]结合修正的壁面边界条件或修正的分子平均自由程拓展了 NS 方程组对 Kn 的适用范围,但这种方法仅对简单壁面几何较为高效。为了进一步拓展宏观方程的适用范围,基于气体动理学方程 CE (Chapman-Enskog) 展开的 Burnett^[18] (二阶展开) 与超 Burnett 方程组^[19] (三阶展开),与基于 Hermite 多项式展开^[20] 的 Grad 矩方法^[21] 得到了大量的研究。Struchtrup 等^[22-23] 与 Gu 等^[24] 分别对 Grad 矩方法进行规整化处理,得到 R13/R26 矩方法。Tatsios 等^[25] 从半幅 Hermite 多项式出发,改进了矩方法的壁面边界条件。规整 R13/R26 矩方法与半幅矩方法成功应用到低频振荡稀薄气体流动^[23]、Stokes 第二问题^[24]、平板振荡 Couette 流动中^[24-25],仿真结果表明线性 R26 矩方法在早期过渡流域与气体动理论结果符合较好。矩方法在滑移流域与早期过渡流域计算效率高,但无法捕获大 Kn 流域非平衡效应。

在介观尺度,振荡稀薄流动中的气体黏滞阻尼效应一般通过 Boltzmann 方程来进行描述^[8]。其中, Park 等^[26]、Bahukudumbi^[27] 与 Sharipov 等^[10] 研究了全 Kn 流域下任意振荡频率对一维 Couette 流动的影响,并给出了近连续流域 ($Kn \leq 0.1$) 与自由分子流域 ($Kn > 10$) 的解析解。Wu 等基于快速谱方法求解线性 Boltzmann 方程,分别研究了顶盖振荡驱动方腔稀薄流^[13] 与二维振荡方腔流中声传播问题^[28],给出了高频振荡下的解析解。Wu 等指出:二维方腔中振荡顶盖处的黏滞阻力小于一维振荡 Couette 流动中的黏滞阻力,同时黏滞阻力与靠近顶盖处的声速受方腔长宽比

影响较大。在过渡流域,振荡稀薄流动很难得到解析解,一般采用直接模拟蒙特卡罗^[8] (direct simulation Monte Carlo, DSMC) 或离散速度法^[29] (discrete velocity method, DVM) 等数值方法求解。Frangi 等基于 BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) 模型在宽 Kn 范围内预测了 MEMS 的黏滞阻尼,仿真结果与实验结果符合较好^[30]。Emerson 等基于 NS 方程和 DSMC,在全流域内预测了圆柱间振荡 Couette 流动,分析了 Kn 对速度与切应力剖面的影响^[9]。Tsimpoukis 等针对平板间非线性振荡稀薄流,对比了基于 DSMC 方法与 DVM-BGK 方法的轴向速度与流量计算结果,最大误差在 10% 以内^[31]。Wang 等使用 Shakhov 模型方程,基于离散统一气体动理学格式 (discrete unified gas kinetic scheme, DUGKS) 分别研究了二维^[32] 与三维^[33] 顶盖振荡驱动方腔流中 Kn 、长宽比、振动频率对黏滞阻尼的影响,对比了线性与非线性振动条件下流体的传热特性。

Yang 等提出了耦合宏观/介观数值迭代方法,并成功求解管道流、方腔流等定常来流的稳态问题^[34-35],而非定常条件下周期性振荡热驱稀薄流动尚无相关研究。耦合宏观/介观方法可以看作宏观尺度拓展流体力学与介观尺度分子动理论之间的桥梁,能够平衡稀薄流动模拟中的计算资源消耗与计算精度要求。

1 问题描述

考虑 2D 方腔中温度振荡驱动稀薄流动,其中坐标原点 O 位于方腔左下角,方腔的长和高分别为 $L = 10^{-5}$ m 和 $H = 10^{-5}$ m,如图 1 所示。左/右壁面与底边壁面温度 T_0 设为参考温度,顶盖温度 T_w 为:

$$T_w = T_0 + dT \cos(\omega t) \tag{1}$$

式中, t 为时间, $dT = 0.3 T_0$ 与 ω 分别为温度振荡的振幅与频率。论文重点开展温度周期性振荡驱动稀薄流动,其中特征尺度的无量纲参数为:

$$\begin{cases} A = \frac{L}{H} \\ St = \frac{\omega H}{v_0} \\ Kn = \frac{\lambda}{H} \end{cases} \tag{2}$$

其中, A 为方腔的长宽比, St 为 Strouhal 数, $v_0 = \sqrt{2RT_0}$ 为参考速度, $R = 208$ J/(kg · K) 为理想气体常数, λ 为分子平均自由程。

$$\lambda = \frac{\mu_0}{p_0} \sqrt{\frac{\pi RT_0}{2}} \tag{3}$$

式中, 压力 p_0 服从理想状态方程 $p_0 = \rho RT_0$, ρ 为密度, 黏性 μ 服从 Sutherland 黏性定律:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \left(\frac{T_0 + S}{T + S} \right) \quad (4)$$

式中, 参考黏性 μ_0 与参考温度 T_0 分别为 $\mu_0 = 21.25 \times 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $T_0 = 273 \text{ K}$, 氩气分子对应的 Sutherland 常量为 $S = 144 \text{ K}$ 。

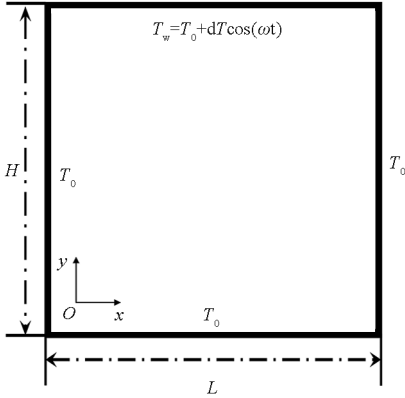


图 1 方腔中温度振荡驱动稀薄流动示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the thermally-induced oscillatory rarefied gas flows in a rectangular cavity

2 数值方法

2.1 Boltzmann-Shakhov 模型方程与 DVM

介观尺度基于 Shakhov 模型方程^[36]描述速度分布函数演化规律, 如式(5)所示。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{1}{\tau} (f - f^{\text{eq}}) \quad (5)$$

式中, $f = f(t, x_i, C_i)$ 为气体分子速度分布函数 (velocity distribution function, VDF), x_i 与 C_i 分别为物理空间坐标与分子离散速度, $\tau = \mu/p$ 为松弛时间, p 为压力, f^{eq} 为 Shakhov 模型中平衡态分布函数:

$$f^{\text{eq}} = f_s = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(C_i - u_i)^2}{2RT} \right] \cdot \left\{ 1 + (1 - Pr) \frac{(C_i - u_i) q_i}{5pRT} \left[\frac{(C_j - u_j)^2}{RT} - 5 \right] \right\} \quad (6)$$

其中, u_i 、 T 与 q_i 分别为流体的速度、温度与热流, Pr 为普朗特数。

Shakhov 模型方程中, VDF 在速度空间内离散为非均匀速度点, 基于 Newton-Cotes 数值积分方法求解 VDF。在物理空间内, 用基于二阶迎风格式的有限差分方法迭代 Shakhov 模型方程的迁移项与碰撞项^[34]。对于非稳态问题, Shakhov 模型方程中 VDF 随时间的演化方程可以写为:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\tau} + \frac{3C_i}{2\Delta x} \right) f_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} f_i^n + \frac{1}{\tau} f_i^{\text{eq},n} + C_i \frac{4f_{i-1}^{n+1} - f_{i-2}^{n+1}}{2\Delta x}, C_i \geq 0 \\ \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\tau} - \frac{3C_i}{2\Delta x} \right) f_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} f_i^n + \frac{1}{\tau} f_i^{\text{eq},n} + C_i \frac{f_{i+2}^{n+1} - 4f_{i+1}^{n+1}}{2\Delta x}, C_i < 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中: Δt 为时间步长, 通过 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件计算。

结合 Maxwell 镜面反射/漫反射壁面边界条件, 得到全流场速度分布函数 $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{C})$ 。其中气体密度 ρ , 速度 $\mathbf{u}$, 温度 T , 应力张量 σ_{ij} , 热流 $\mathbf{q}$, 高阶矩 m_{ijk} 、 R_{ij} 、 Δ 、 ϕ_{ijkl} 、 ψ_{ijk} 、 Ω_i 等流场宏观参数与无量纲格式如参考文献[34]所示。

2.2 拓展流体力学方程组与 R26 矩方法

直接给出拓展流体力学中 R26 矩方程组的控制方程, 如式(8)~(15)所示, 其推导过程参考文献[37], 在此不做赘述。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho a_i \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i T}{\partial x_i} = -\frac{2}{3R} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3R} p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3R} \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial u_k \sigma_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial m_{ijk}}{\partial x_k} = -\frac{p}{\mu} \sigma_{ij} + \Sigma_{ij} - 2p \frac{\partial u_{<i}}{\partial x_{j>}} \quad (11)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j q_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{2}{3} \frac{p}{\mu} q_i + Q_i - \frac{5}{2} p R \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (12)$$

$$\frac{\partial m_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial u_l m_{ijk}}{\partial x_l} + \frac{\partial \phi_{ijkl}}{\partial x_l} = -\frac{3}{2} \frac{p}{\mu} m_{ijk} + \mathcal{M}_{ijk} - 3p \frac{\partial (\sigma_{<ij}/\rho)}{\partial x_{k>}} \quad (13)$$

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial u_k R_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi_{ijk}}{\partial x_k} = -\frac{7}{6} \frac{p}{\mu} R_{ij} + \mathcal{R}_{ij} - \frac{28}{5} p \frac{\partial (q_{<i}/\rho)}{\partial x_{j>}} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i} = -\frac{3}{2} \frac{p}{\mu} \Delta + \mathcal{Q} - 8p \frac{\partial (q_i/\rho)}{\partial x_i} \quad (15)$$

其中, Σ_{ij} 、 Q_i 、 $\mathcal{M}_{ijk}$ 、 $\mathcal{R}_{ij}$ 、 $\mathcal{Q}$ 为源项, 见文献[37]。R26 矩方法将传统流体力学中的自由变量 $\{\rho, u_i, T\}$ 拓展为 $\{\rho, u_i, T, \sigma_{ij}, q_i, m_{ijk}, R_{ij}, \Delta\}$, 引入的高阶矩信息用以描述流体的非平衡效应。基于 Hermite 多项式展开, Struchtrup 等^[22] 与 Gu 等^[37]

分别为 R13/R26 矩方法推导了高阶矩表达式,用于封闭矩方程组。同时,Gu 等^[38]与 Torrilhon 等^[39]给出了 R13/R26 矩方法的壁面边界条件。

2.3 耦合宏观/介观方法

基于介观尺度方法模拟温度振荡驱动稀薄流动时,将消耗巨大的计算资源,而基于宏观矩方法模拟稀薄流动时难以捕获大 Kn 处的非平衡效应。因此,提出耦合宏观/介观快速迭代方法,平衡稀薄流动模拟中的计算精度与计算代价。

方腔中温度振荡驱动稀薄流动,计算域可以分解为两个部分:靠近壁面处基于介观尺度描述气体的非平衡效应,介观尺度计算域厚度为 l ,远离壁面位置处基于宏观尺度矩方法简化计算量,如图 2 所示。由于计算域的分解,矩方法与 DVM 的壁面边界条件均不再封闭,在图 2 虚线处为通过 Hermite 多项式重构分布函数来构建的宏观/介观方程的虚拟边界。

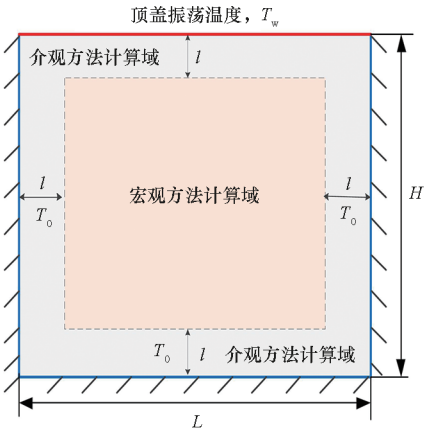


图 2 基于耦合宏观/介观方法的温度振荡驱动稀薄流动示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the thermally-induced oscillatory rarefied gas flows based on the hybrid macroscopic/mesoscopic algorithm

在靠近壁面处,基于 DVM 与 Maxwell 漫反射壁面边界条件计算得到 VDF, VDF 对离散速度求矩可以作为 R26 矩方程组的虚拟边界条件。反之,当计算得到宏观方程的高阶矩时,可以通过 Hermite 多项式重构分布函数, Hermite 多项式的展开形式如式(16)所示:

$$f = f^{eq} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_{\Lambda}^{(n)} H_{\Lambda}^{(n)} \\ = f^{eq} \left(a^{(0)} H^{(0)} + a_i^{(1)} H_i^{(1)} + \frac{1}{2!} a_{ij}^{(2)} H_{ij}^{(2)} + \dots \right) \quad (16)$$

式中, $H_{\Lambda}^{(n)}$ 与 $a_{\Lambda}^{(n)}$ 分别为 Hermite 函数与对应的系数。

理论上认为, Hermite 多项式的无穷维度展开可以精确恢复到非平衡态分布函数。但由于宏观方程维度的限制,只能通过截断的 Hermite 多项式重构分布函数,对于 R26 矩方程组,最多能够恢复至 5 阶精度, $f^{(5)}$ 表达式如式(17)所示。

$$f^{(5)} = f_M \left\{ 1 + \frac{\sigma_{ij} c_i c_j}{2pRT} + \frac{c_i q_i}{pRT} \left(\frac{c^2}{5RT} - 1 \right) + \frac{\phi_{ijkl} c_i c_j c_k c_l}{24p(RT)^3} + \frac{R_{ij} c_i c_j}{4p(RT)^2} \left(\frac{c^2}{7RT} - 1 \right) + \frac{\psi_{ijkl} c_i c_j c_k}{12p(RT)^3} \left(\frac{c^2}{9RT} - 1 \right) + \frac{m_{ijk} c_i c_j c_k}{6p(RT)^2} + \frac{c_i \Omega_i}{40p(RT)^2} \left[\frac{c^4}{7(RT)^2} - \frac{2c^2}{RT} + 5 \right] + \frac{\Delta}{8pRT} \left[\frac{c^4}{15(RT)^2} - \frac{2c^2}{3RT} + 1 \right] \right\} \quad (17)$$

其中, f_M 为平衡态分布函数。

基于宏观方程重构的分布函数可以为介观尺度 Shakhov 模型方程提供虚拟边界条件。为保证物理空间离散的二阶精度,虚拟边界层的厚度至少为两层。耦合宏观/介观快速迭代算法数据传输方式与计算域划分方法如图 3 所示。通过选取合适的壁面介观动理论计算域的厚度,耦合宏观/介观尺度方法可以应用在振荡热驱稀薄流动的数值模拟中。

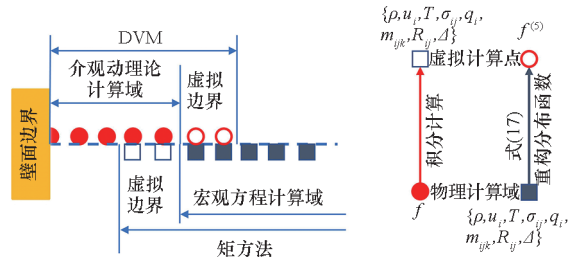


图 3 耦合宏观/介观方法计算域与数据传输方法
Fig. 3 Computational sub-domain and data transfer of the hybrid macroscopic/mesoscopic algorithm

3 算例与讨论

针对方腔中振荡热驱稀薄流动,考虑模型中气体分子介质为氩气,所有壁面条件采用 Maxwell 漫反射壁面边界条件。方腔长宽比 $A = 1$,在物理空间上沿 x, y 方向各分布 201 个非均匀网格点。速度空间被截断为 $[-6\sqrt{2RT_0}, 6\sqrt{2RT_0}]^3$,并基于 Newton-Cotes 积分方法将其离散为 $64 \times 64 \times 24$ 个非均匀网格点,物理空间与速度空间均经过了网格无关性测试。当来流 Kn 分别为 0.01, 0.1, 1.0, 10 时,耦合宏观/介观

尺度方法中介观尺度计算域的厚度 l 与参考长度 H 的比值 l/H 分别取为: 0.04, 0.1, 0.2, 0.5。前期工作表明: 耦合宏观/介观快速迭代方法能够满足 $Kn \leq 1$ 时的计算精度与计算效率要求。当 $Kn = 10$ 时, 气体的非平衡效应大, 矩方程计算精度不足, 故选取 $l/H = 0.5$, 基于全流场 DVM 捕获精确解。

3.1 耦合宏观/介观方法计算精度对比

当 $A = 1, St = 2, Kn = 0.1$ 时, 对比耦合宏观/介观方法与全流场 DVM 的计算精度与计算代价。一个温度振荡周期内, 方腔沿垂直中线处两种方法计算的无量纲温度 $\bar{T}$ 分布对比如图 4 所示。

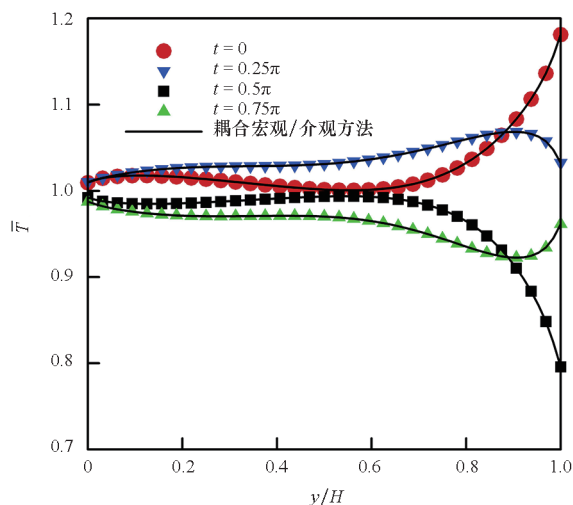


图 4 一个振荡周期内方腔垂直中线处温度 $\bar{T}(x=L/2)$ 变化

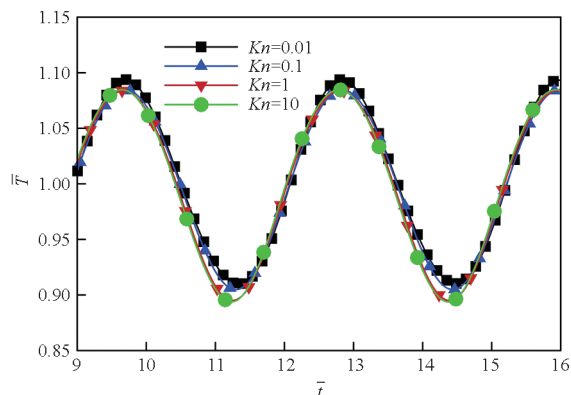
Fig.4 Dynamic temperature profiles $\bar{T}(x=L/2)$ at the central vertical of the cavity within an oscillation period

图 4 中实线为耦合宏观/介观方法计算结果, 符号为全流场 DVM 计算结果, 将一个完整振荡周期分解为 $0, 0.25\pi, 0.5\pi, 0.75\pi$, 分别对比周期内特征时刻计算精度。仿真结果选取开始时刻为全流场达到周期性的“稳态过程”(即下一个振荡周期的流场参数与本周期流场参数完全相同)。仿真表明耦合宏观/介观方法与全流场 DVM 在全振荡周期内计算结果一致, 能够较好地捕获非平衡条件下振荡热驱方腔流动。当靠近壁面边界处的介观尺度计算域为 10% 时, 沿垂直中线温度分布的最大计算误差为 0.23%。同时, 全流场 DVM 计算内存消耗约为 14.82 GB, 耦合宏观/介观方法计算内存消耗约为 4.46 GB, 计算内存消耗减少约 69.91%, 进入周期性的“稳态过程”计算时长减少约 70.83%。后文仿真均基于耦合宏观/介观方法计算, 其中当 $Kn = 10$ 时, 选

择 $l/H = 0.5$, 耦合方法自动切换为全流场 DVM 以保证计算精度。

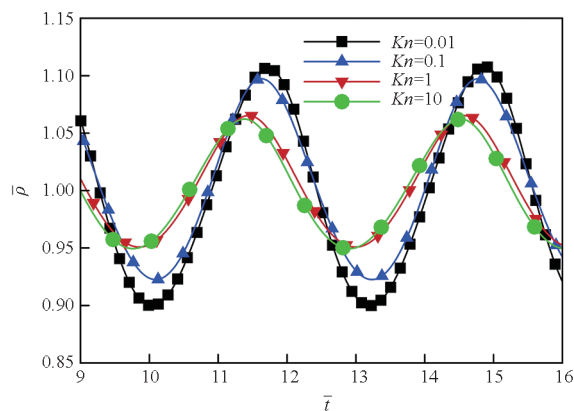
3.2 非平衡效应对流场宏观参数的影响

由于方腔顶盖温度周期性振荡, 温度梯度在非平衡条件下驱动流场运动。考虑稀薄效应对流场参数的影响, 选取 $(x, y) = (0.9L, 0.9H)$ 特征点位置, 对比当 $St = 2, A = 1, Kn$ 取 0.01, 0.1, 1.0, 10 时, 特征点处的流场参数变化, 其无量纲温度、密度、 x 方向与 y 方向的速度变化如图 5 所示。



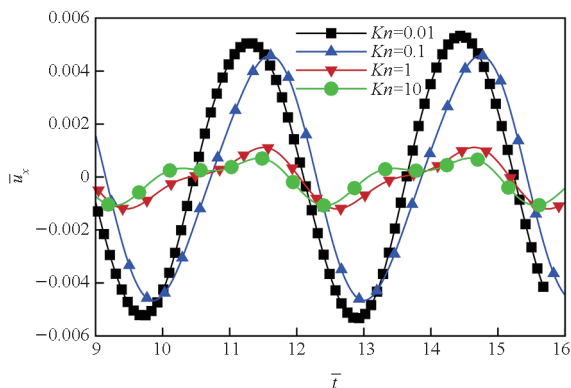
(a) 温度 $\bar{T}$ 随时间变化

(a) Time history of the temperature $\bar{T}$



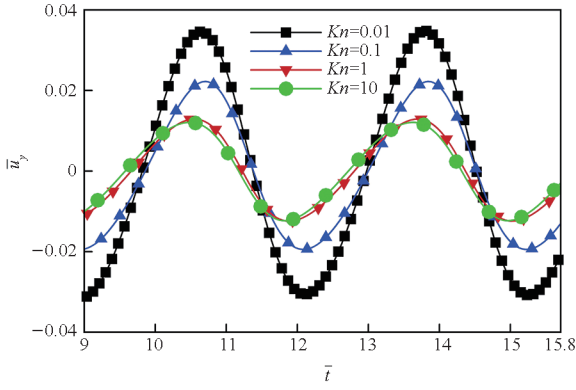
(b) 密度 $\bar{\rho}$ 随时间变化

(b) Time history of the density $\bar{\rho}$



(c) 速度 $\bar{u}_x$ 随时间变化

(c) Time history of the velocity $\bar{u}_x$



(d) 速度 $\bar{u}_y$ 随时间变化

(d) Time history of the velocity $\bar{u}_y$

图5 方腔特征点处宏观参数随时间变化

Fig.5 Time evolution of the macroscopic parameters at the characteristic point of the cavity

选取无量纲时间 $3\pi \leq \bar{t} \leq 5\pi$ 分析流场参数,此时流场均进入周期性“稳态过程”。图5(a)表明随着 Kn 的增大,温度变化随热驱振荡的相位滞后逐渐增大,同时靠近顶盖处的温度跳跃逐渐增大,不同 Kn 下最大温度响应的幅值偏差为 1.53%。因为振荡温度驱动的本质为分子与壁面以及分子之间的碰撞产生的能量转移,因此碰撞的响应存在延迟,且方腔靠近下壁面处的气体延迟较上层气体更大。图5(d)表明滑移流域与近连续流域,在温度梯度驱动作用下最大 y 向速度 $\bar{u}_y$ 振动幅值分别为 0.035 与 0.022;当 Kn 取 1, 10 时, $\bar{u}_y$ 振动幅值分别为 0.013 与 0.012。这是由于在近连续流域与早期过渡流域,分子间碰撞频率高,能量传导快,温度梯度产生的驱动力相比较高稀薄流域更大,因此速度幅值也更大。由图5可以发现 Kn 对密度与速度振荡幅值的影响远大于其对温度振荡幅值的影响。密度与速度振荡幅值随 Kn 变化最大偏差分别为 5.8% 与 87.25%。

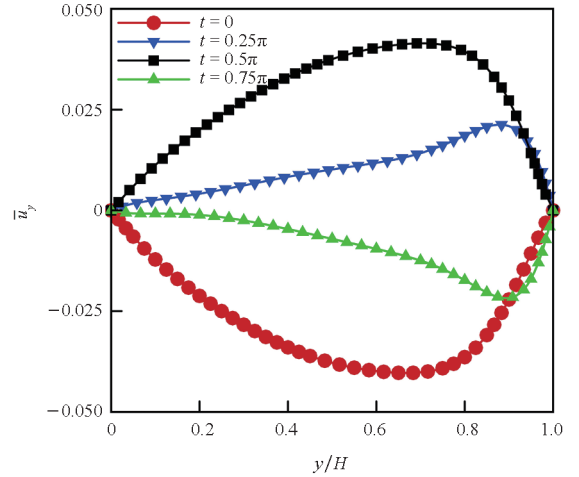
在滑移流域与早期过渡流域 (Kn 取 0.01, 0.1), 流场流动特性接近,宏观参数随时间变化为周期振荡余弦函数。当 Kn 取 1, 10 时,平均自由程较大,气体的非平衡效应显著,放大了问题的非线性特性。此时 x 方向速度 $\bar{u}_x$ 不再服从余弦函数振荡规律,上升时间远大于下降时间,同时上升沿存在两个上升台阶,如图5(c)所示。

进一步对比不同 Kn 条件下,在一个振荡周期内的 $0, 0.25\pi, 0.5\pi, 0.75\pi$ 时刻,方腔垂直中线处速度 $\bar{u}_y$ 变化曲线,结果如图6所示。

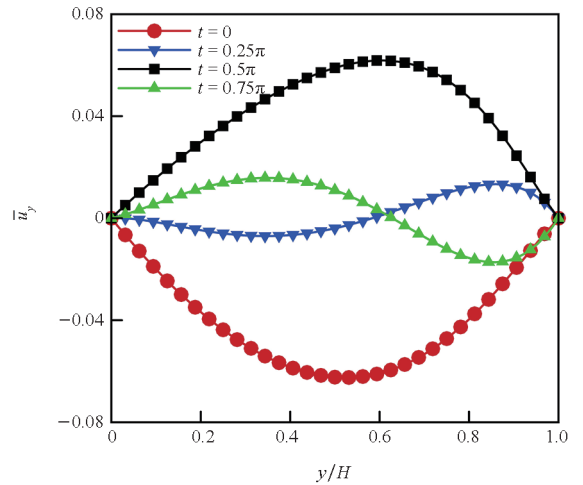
仿真结果表明,随着 Kn 的增大,最大 $\bar{u}_y$ 产生

的位置由靠近壁面处逐渐过渡到方腔中心线位置,受扰运动区域增大,黏性穿透层厚度也随着 Kn 的增大而增大。这是因为对于硬球模型,黏性穿透层厚度 δ_u 约为:

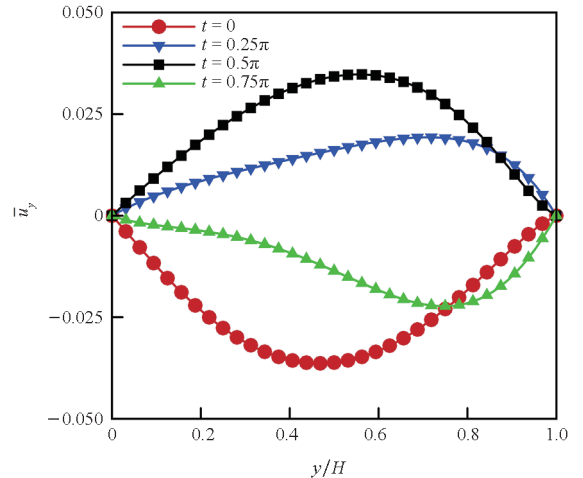
$$\delta_u = \sqrt{\frac{Kn \cdot H^2}{St \sqrt{\pi}}} \quad (18)$$



(a) $Kn = 0.01$



(b) $Kn = 0.1$



(c) $Kn = 1.0$

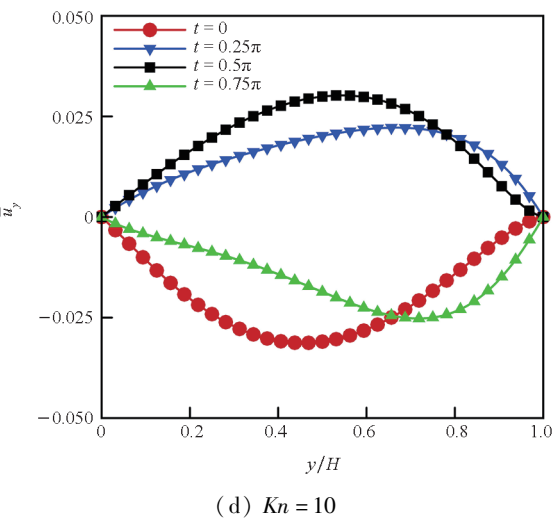


图 6 方腔垂直中线处速度 $\bar{u}_y(x=L/2)$ 变化曲线

Fig. 6 Variation curve of velocity $\bar{u}_y(x=L/2)$ at the central vertical of the cavity

当 St 一定而 Kn 增大时,顶盖振荡热驱的作用距离与分子平均自由程成正比相关,如图 6 所示。同时,从图 6(a) ~ (d) 可以看出,从滑移流域到过 渡流域, $\bar{u}_y$ 的最大值从 0.041 ($Kn=0.01$) 先增加到 0.062 ($Kn=0.1$), 然后随着 Kn 的增大减小到 0.031 ($Kn=10$)。图 5、图 6 表明 Kn 大于 1 之后,流场参数变化对 Kn 的继续增加不敏感。

在 t 取 0, 0.25π 与 t 取 0.5π , 0.75π 时刻, $\bar{u}_y$ 变化曲线并非严格对称,且随着 Kn 的增大,不对称性加剧。这是由于顶盖升温过程中,速度的驱动力在高温顶盖向其余三个低温壁面的传热传质过程中产生;在顶盖降温过程中,速度的驱动力在三个高温壁面向低温顶盖传热传质过程中产生。前半周期与后半周期的驱动力大小不同,当非平衡效应显著时,加剧了前、后半周期的非对称现象。

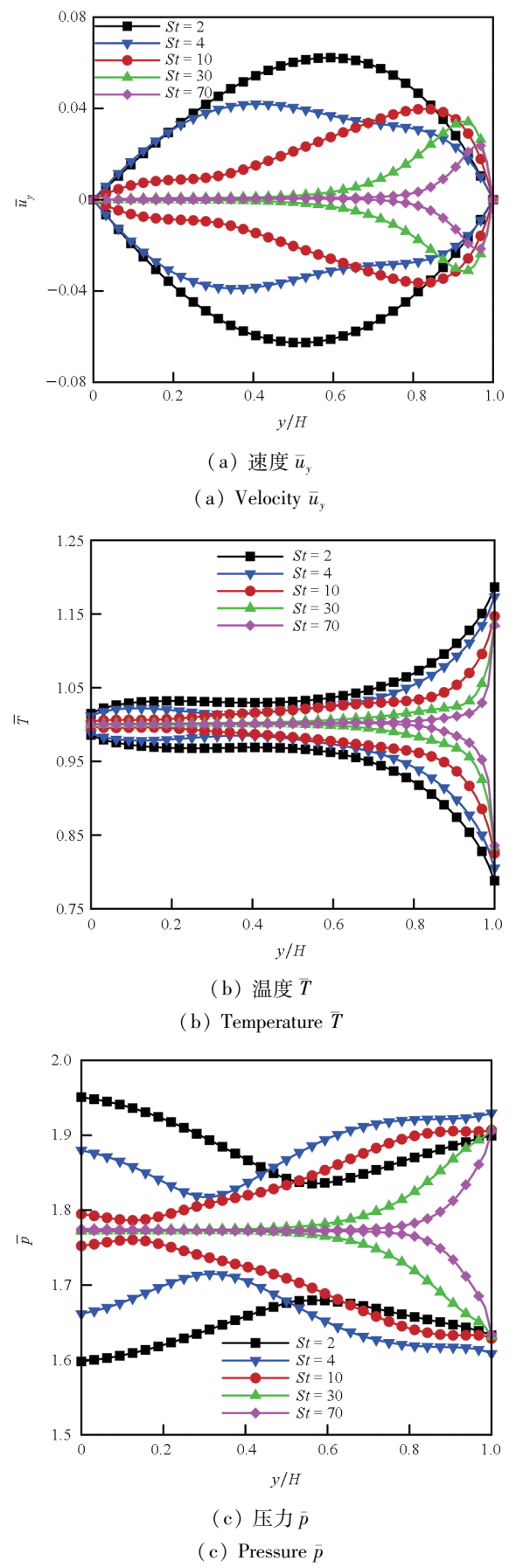
3.3 顶盖温度振荡频率对流场宏观参数的影响

当顶盖温度振荡频率不同时,分析振荡频率对流场参数的影响规律。当 $A=1, Kn=0.1, St$ 为 2, 4, 10, 30, 70 时,方腔垂直中线处无量纲 y 向速度、温度、压力与热流分布如图 7 所示,定义 y 向平均速度 $|\bar{u}_y|$ 为:

$$|\bar{u}_y|(x=L/2) = \frac{1}{A} \int_0^A \bar{u}_y(x=L/2) dy \tag{19}$$

由图 7(b) 可以看出,随着顶盖温度振荡频率的增大,顶盖处温度跳跃增大。具体地, St 取 2, 4, 10, 30, 70 时,相对顶盖温度的温度跳跃分别为:0.115, 0.129, 0.156, 0.169, 0.173。热流沿方腔垂直中线的变化规律与温度变化规律相近,如

图 7(d) 所示。同时可以发现,对于低频振荡条件 ($St \leq 10$),顶盖温度变化能够传导至底面处,最大 y 向速度 $\bar{u}_y$ 发生位置靠近方腔中心位置。但高



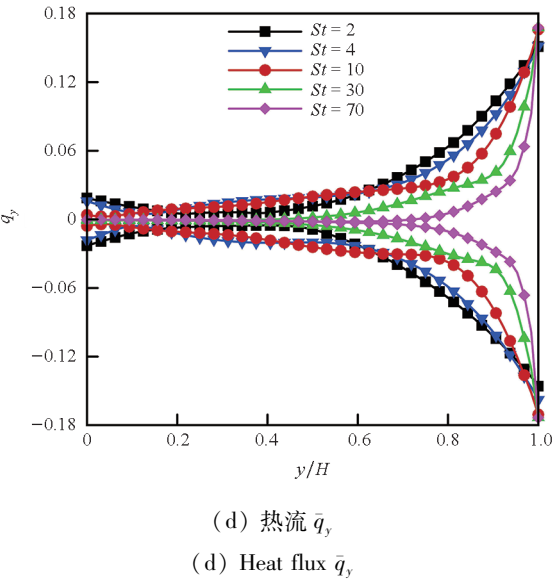


图7 不同 St 下垂直中线处($x=L/2$)宏观参数的包络线

Fig.7 Envelope curves of macroscopic parameters along the vertical centerline where $x=L/2$ under different values of St

频振荡条件下($St \geq 30$),方腔中下部($y/H < 0.5$)温度几乎不随顶盖温度振荡频率变化而变化,此时方腔中下部的 y 向速度亦趋于0,最大 $\bar{u}_y$ 发生位置为靠近顶盖处,如图7(a)~(b)所示。这是由于当 Kn 一定时,黏性穿透层厚度 δ_u 随着 St 的增大而减小,如式(18)所示,当 $St \geq 30$ 时,受扰运动区域显著减小。

St 取 2, 4, 10, 30, 70 对应的 y 向平均速度 $|\bar{u}_y|$ 分别为:0.041, 0.029, 0.021, 0.008, 0.003。显然,随着 St 的增加,顶盖温度变化频率远大于分子平均碰撞频率,在一个变化周期内,扰动能量没有充分的时间通过分子间碰撞传播到更远的区域,振荡热驱产生的 y 向平均速度 $|\bar{u}_y|$ 逐渐降低。进一步分析当 $A=1, Kn$ 取 0.01, 0.1, 1.0, 10 时, y 向平均速度 $|\bar{u}_y|$ 随 St 与 Kn 的变化曲线,结果如图8所示。

图8表明:从滑移流域到早期过渡流域,在相同 Kn 下,流场宏观参数的响应延迟随着 St 的增大而增大(一个振荡周期内,分子碰撞次数减少,扰动传播能力减小,纵向延迟增大),因此 y 向平均速度 $|\bar{u}_y|$ 随着 St 的增大而减小。但当 $Kn \geq 1$ 时, y 向平均速度 $|\bar{u}_y|$ 随着 St 的增大先增大后减小,后趋于平稳。当 $St \geq 40$ 时, Kn 越大分子平均自由程越大,当分子间碰撞次数一定时,扰动传播距离远,因此 $|\bar{u}_y|$ 随着 Kn 的增大而增大。

对比 $A=1, Kn=0.1, St$ 取 2, 4, 10, 30, 70 时,方腔顶盖处切应力 $\bar{P}_{xy}$ 分布,结果如图9所示。定义 y 向平均切应力 $|\bar{P}_{xy}|$ 为:

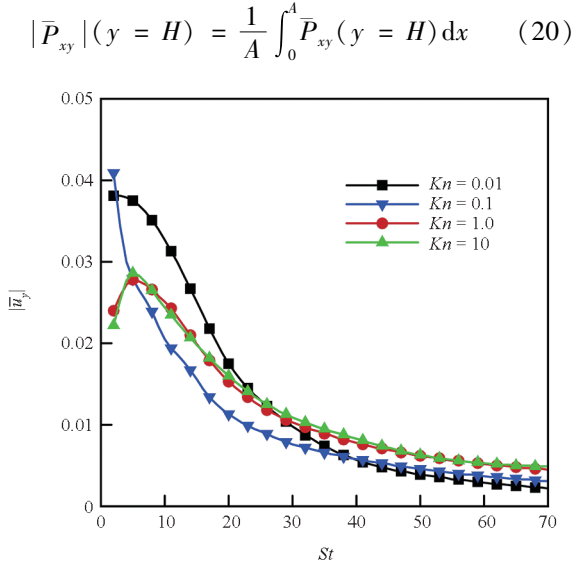


图8 不同 Kn 下平均速度 $|\bar{u}_y|$ 随 St 的变化曲线

Fig.8 Variation curve of average velocity $|\bar{u}_y|$ with St under different Kn

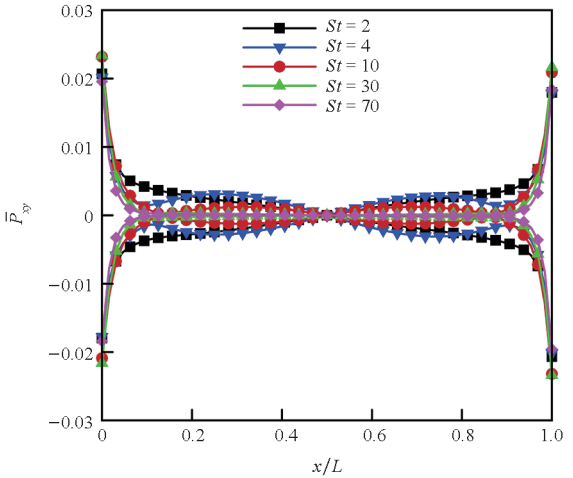


图9 不同 St 下方腔顶盖处切应力 $\bar{P}_{xy}$ 包络线

Fig.9 Envelope curves of shear stress $\bar{P}_{xy}$ at the lid of the cavity for different values of St

从图9可以看出:切应力在方腔的左上与右上方达到极值,最大值约为0.024,随着 St 的增大,顶盖处的切应力逐渐减小。在顶盖温度高频振荡条件下($St \geq 40$ 时),方腔中心线处的切应力 $\bar{P}_{xy}$ 约为零,同时切应力曲线沿方腔中心线对称分布。 St 取 2, 4, 10, 30, 70 的顶盖平均切应力 $|\bar{P}_{xy}|$ 分别为:0.003 0, 0.002 7, 0.001 9, 0.001 1, 0.000 8。当 Kn 取 0.01, 0.1, 1.0, 10 时,顶盖平均切应力 $|\bar{P}_{xy}|$ 随 St 与 Kn 的变化曲线如图10所示。

与图8结论相似,在大振荡频率条件下($St \geq 15$), $|\bar{P}_{xy}|$ 随着 Kn 的增大而增大,随着 St 的增大而减小。黏性穿透层厚度与扰动传播距离亦随着

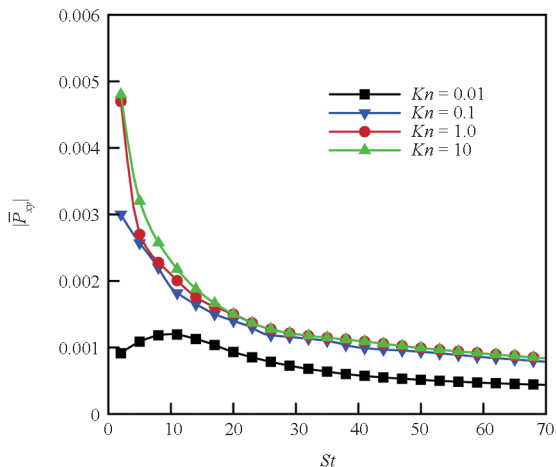


图 10 不同 Kn 下平均切应力 $|\bar{P}_{xy}|$ 随 St 的变化曲线

Fig. 10 Variation curve of average shear stress $|\bar{P}_{xy}|$ with St under different Kn

St 的增大而减小,随着 Kn 的增大而增大。当 $St = 70$ 时, Kn 取 0.01, 0.1, 1.0, 10 对应的顶盖平均切应力 $|\bar{P}_{xy}|$ 分别为: 4.38×10^{-4} , 7.88×10^{-4} , 8.39×10^{-4} , 8.42×10^{-4} 。

4 结论

基于耦合宏观/介观方法研究了方腔中顶盖振荡热驱稀薄流动特性,得到结论如下:

1) 首次将耦合宏观/介观方法的适用性推广到非定常振荡热驱稀薄流动。在模拟顶盖振荡热驱稀薄流动时,基于耦合宏观/介观方法与全流场 DVM,沿垂直中线温度分布的最大计算误差为 0.23%,计算内存消耗减少约 69.91%。

2) 耦合方法能够精确地捕获不同 Kn 与 St 下流场的非平衡效应。在大 Kn 流域,振荡热驱问题呈现显著非线性现象, x 方向速度 $\bar{u}_x$ 不再服从周期振荡余弦函数规律,上升时间远大于下降时间,同时上升沿存在两个上升台阶。密度与速度振荡幅值随 Kn 变化最大偏差分别为 5.8% 与 87.25%。

3) 顶盖位置处的温度跳跃现象随着振荡频率 St 的增大而增大。黏性穿透层厚度 δ_u 与受扰区域随着 Kn 的增大而增大,随着 St 的增大而减小,平均速度 $|\bar{u}_y|$ 与平均切应力 $|\bar{P}_{xy}|$ 与 δ_u 变化规律基本相符。当 $St \leq 10$ 时,顶盖振荡温度产生的扰动能够传导至方腔底边,但当 $St \geq 30$ 时,方腔中下部的 y 向速度与热流趋于 0。

致谢

英国达斯勃利实验室 (STFC Daresbury Lab)

顾晓军教授在矩方法、耦合方法上提供了帮助和指导,谨致谢意!

参考文献 (References)

- [1] 苑伟政, 常洪龙, 谢建兵. MEMS 集成设计与制造技术进展[J]. 机械工程学报, 2023, 59(19): 176–186.
YUAN W Z, CHANG H L, XIE J B. Advances in MEMS integrated design and manufacturing technology[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2023, 59(19): 176–186. (in Chinese)
- [2] 张旭辉. 航天微系统模块关键共性支撑技术研究 with 实现[D]. 西安: 西北大学, 2022: 2–32.
ZHANG X H. Research and implementation of key common support technology for aerospace microsystem module[D]. Xi'an: Northwest University, 2022: 2–32. (in Chinese)
- [3] ZENGERLE T, ABABNEH A, SEIDEL H. Generalized damping model for MEMS oscillators from molecular to viscous flow regime[J]. Eng, 2022, 3(1): 124–141.
- [4] HATTORI M. Poiseuille and thermal transpiration flows of a dense gas between two parallel plates[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2023, 962: A20.
- [5] ZHAO L L, WANG X W, ZHANG Z J. Numerical investigation into the compression characteristics of a multi-stage Knudsen pump with rectangular channels[J]. The European Physical Journal Plus, 2023, 138(3): 302.
- [6] 王燕. MEMS 流量传感器温度补偿方法研究[D]. 济南: 山东大学, 2022.
WANG Y. Study of temperature compensation methods for MEMS flow sensors[D]. Jinan: Shandong University, 2022. (in Chinese)
- [7] EJEIAN F, AZADI S, RAZMJOU A, et al. Design and applications of MEMS flow sensors: a review[J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2019, 295: 483–502.
- [8] BIRD G A. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows[M]. New York: Oxford University Press, 1994: 15–113.
- [9] EMERSON D R, GU X J, STEFANOV S K, et al. Nonplanar oscillatory shear flow: from the continuum to the free-molecular regime[J]. Physics of Fluids, 2007, 19(10): 107105.
- [10] SHARIPOV F, KALEMPA D. Oscillatory Couette flow at arbitrary oscillation frequency over the whole range of the Knudsen number[J]. Microfluidics and Nanofluidics, 2008, 4(5): 363–374.
- [11] DUCK P W. Oscillatory flow inside a square cavity[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1982, 122: 215–234.
- [12] BIRINGEN S, DANABASOGLU G. Oscillatory flow with heat transfer in a square cavity[J]. Physics of Fluids A: Fluid Dynamics, 1989, 1(11): 1796–1812.
- [13] WU L, REESE J M, ZHANG Y H. Oscillatory rarefied gas flow inside rectangular cavities[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2014, 748: 350–367.
- [14] LOBASOV A S, MINAKOV A V, RUDYAK V Y. The investigation of the velocity slip and the temperature jump effect on the heat transfer characteristics in a microchannel[J]. Case Studies in Thermal Engineering, 2022, 31: 101791.
- [15] USAFZAI W K, ALY E H, ALSHOMRANI A S, et al. Multiple solutions for nanofluids flow and heat transfer in porous medium with velocity slip and temperature jump[J].

- International Communications in Heat and Mass Transfer, 2022, 131: 105831.
- [16] GUO Z L, SHI B C, ZHENG C G. An extended Navier-Stokes formulation for gas flows in the Knudsen layer near a wall[J]. Europhysics Letters, 2007, 80(2): 24001.
- [17] TANG G H, ZHANG Y H, GU X J, et al. Lattice Boltzmann modelling Knudsen layer effect in non-equilibrium flows[J]. Europhysics Letters, 2008, 83(4): 40008.
- [18] BOBYLEV A V. On some properties of generalized Burnett equations of hydrodynamics [J]. Journal of Statistical Physics, 2022, 188(1): 6.
- [19] JADHAV R S, YADAV U, AGRAWAL A. OBurnett equations: thermodynamically consistent continuum theory beyond the Navier-Stokes regime [J]. Journal of Heat and Mass Transfer, 2023, 145(6): 060801.
- [20] KHAN N, KHAN M I, HUSAIN S, et al. Certain results on generalized Humbert-Hermite polynomials [J]. Research in Mathematics, 2023, 10(1): 2215577.
- [21] ARTALE V, CONFORTO F, MARTALÒ G, et al. Shock structure solutions of Grad 13-moment equations for binary gas mixtures[J]. Wave Motion, 2022, 115: 103055.
- [22] STRUCHTRUP H, FREZZOTTI A. Twenty-six moment equations for the Enskog-Vlasov equation [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2022, 940: A40.
- [23] STRUCHTRUP H, ÖTTINGER H C. Thermodynamically admissible 13-moment equations [J]. Physics of Fluids, 2022, 34: 017105.
- [24] GU X J, EMERSON D R. Modeling oscillatory flows in the transition regime using a high-order moment method [J]. Microfluidics and Nanofluidics, 2011, 10(2): 389–401.
- [25] TATSIOS G, TSIMPOUKIS A, VALOUGEORGIS D. The half-range moment method in harmonically oscillating rarefied gas flows[J]. Fluids, 2021, 6(1): 17.
- [26] PARK J H, BAHUKUDUMBI P, BESKOK A. Rarefaction effects on shear driven oscillatory gas flows: a direct simulation Monte Carlo study in the entire Knudsen regime[J]. Physics of Fluids, 2004, 16(2): 317–330.
- [27] BAHUKUDUMBI P, PARK J H, BESKOK A. A unified engineering model for steady and quasi-steady shear-driven gas microflows [J]. Microscale Thermophysical Engineering, 2003, 7(4): 291–315.
- [28] WU L. Sound propagation through a rarefied gas in rectangular channels [J]. Physical Review E, 2016, 94: 053110.
- [29] ZHANG Q D, ZHUO C S, MU J L, et al. A multiscale discrete velocity method for diatomic molecular gas [J]. Physics of Fluids, 2023, 35(7): 076118.
- [30] FRANGI A, FREZZOTTI A, LORENZANI S. On the application of the BGK kinetic model to the analysis of gas-structure interactions in MEMS[J]. Computers & Structures, 2007, 85(11/12/13/14): 810–817.
- [31] TSIMPOUKIS A, VASILEIADIS N, TATSIOS G, et al. Nonlinear oscillatory fully-developed rarefied gas flow in plane geometry[J]. Physics of Fluids, 2019, 31(6): 067108.
- [32] WANG P, ZHU L H, SU W, et al. Nonlinear oscillatory rarefied gas flow inside a rectangular cavity [J]. Physical Review E, 2018, 97: 043103.
- [33] WANG P, SU W, ZHUANG Y H. Oscillatory rarefied gas flow inside a three dimensional rectangular cavity [J]. Physics of Fluids, 2018, 30(10): 102002.
- [34] YANG W Q, GU X J, WU L, et al. A hybrid approach to couple the discrete velocity method and method of moments for rarefied gas flows [J]. Journal of Computational Physics, 2020, 410: 109397.
- [35] YANG W Q, GU X J, EMERSON D R, et al. Modelling thermally induced non-equilibrium gas flows by coupling kinetic and extended thermodynamic methods[J]. Entropy, 2019, 21(8): 816.
- [36] SHAKHOV E M. Generalization of the Krook kinetic relaxation equation[J]. Fluid Dynamics, 1968, 3(5): 95–96.
- [37] GU X J, EMERSON D R. A high-order moment approach for capturing non-equilibrium phenomena in the transition regime[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2009, 636: 177–216.
- [38] GU X J, EMERSON D R. A computational strategy for the regularized 13 moment equations with enhanced wall-boundary conditions [J]. Journal of Computational Physics, 2007, 225(1): 263–283.
- [39] TORRILHON M, STRUCHTRUP H. Boundary conditions for regularized 13-moment-equations for micro-channel-flows[J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(3): 1982–2011.