

计算轨道追逃闭环均衡的有限差分方法

杨傅云翔¹, 杨乐平², 柴华^{1*}

(1. 航天工程大学, 北京 101416; 2. 国防科技大学空天科学学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 针对近距离轨道追逃闭环均衡构造问题, 提出一种综合运用 Bellman 最优性原理、有限差分法和插值技术的计算方法。推导视线坐标系下的博弈系统降维动力学模型, 建立近距离轨道追逃博弈模型, 降低系统状态空间维度; 基于 Bellman 最优性原理, 重构原问题为哈密顿-雅可比-艾萨克偏微分方程终值问题, 通过逆向分析实现同时处理多组博弈场景; 利用 Cartesian 网格离散状态空间, 使用有限差分法计算均衡受动力学驱动的动态演化过程, 分析博弈态势; 基于控制与均衡空间梯度的关系, 使用数值插值构造闭环控制函数; 通过数值仿真验证了方法的有效性。

关键词: 轨道追逃; Bellman 最优性原理; 有限差分法; 微分对策

中图分类号: V448 文献标志码: A 文章编号: 1001-2486(2026)01-247-15

A finite difference method for calculating the closed-loop equilibrium of orbital pursuit-evasion game

YANG Fuyunxiang¹, YANG Leping², CHAI Hua^{1*}

(1. Space Engineering University, Beijing 101416, China;

2. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The issue of constructing the closed-loop equilibrium for close-range orbital pursuit-evasion games was addressed and a computation method that integrates Bellman's principle of optimality, the finite difference method, and interpolation techniques was proposed. A dimension-reduction dynamics of the game system in the line-of-sight coordinate frame was derived, establishing a close-range orbital pursuit-evasion game model and reducing the dimensionality of the system's state space. Based on Bellman's principle of optimality, the original problem was reformulated as a Hamilton-Jacobi-Isaacs partial differential equation terminal value problem, enabling the simultaneous handling of multiple game scenarios through reverse-time analysis. The state space was discretized using Cartesian grids, and the finite difference method was employed to calculate the dynamic evolution process of the equilibrium driven by the dynamics, and analyze the game situation. Utilizing the relationship between control and the spatial gradient of the equilibrium, numerical interpolation was applied to construct the closed-loop control function. The effectiveness of the proposed method was demonstrated through numerical simulations.

Keywords: orbital pursuit-evasion game; Bellman's principle of optimality; finite difference method; differential game

近年来, 轨道追逃问题逐渐成为航天动力学与控制领域的研究热点, 受到越来越多学者的关注。该问题实质上是一个包含双边控制的连续动态博弈问题, 其中被称为追踪方(pursuer, P)与逃逸方(evader, E)的局中人具有相互冲突的目标^[1]。整个博弈过程通过零和微分对策问题进行描述, 通过求解均衡, 构造控制函数作为策略, 规划局中人最优轨迹^[2]。

均衡是非合作博弈理论的重要概念。研究动态博弈时, 通常会考察开环和闭环两类均衡, 其中: 开环均衡是指局中人策略仅依赖于时间的博弈均衡; 闭环均衡是指局中人策略依赖于时间和当前观测状态量的博弈均衡^[3]。目前轨道追逃领域主要关注开环均衡的构造方法, 发展出了两条技术路线: 一条是离散并参数化决策量或状态量, 将问题转化为一个参数优化问题进行求

收稿日期: 2024-10-10

基金项目: 军事科技领域青年人才托举工程资助项目(2020-JCJQ-QT-024)

第一作者: 杨傅云翔(1996—), 男, 江苏镇江人, 讲师, 博士, E-mail: yangfuyunxiang@alumni.nudt.edu.cn

*通信作者: 柴华(1988—), 男, 山西沁水人, 副教授, 博士, 硕士生导师, E-mail: chaihua@nudt.edu.cn

引用格式: 杨傅云翔, 杨乐平, 柴华. 计算轨道追逃闭环均衡的有限差分方法[J]. 国防科技大学学报, 2026, 48(1): 247-261.

Citation: YANG F Y X, YANG L P, CHAI H. A finite difference method for calculating the closed-loop equilibrium of orbital pursuit-evasion game[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2026, 48(1): 247-261.

解^[4]。例如, Luke^[5]轮流固定一方策略求解另一方策略, 循环迭代直至双方策略收敛; Zhang 等^[6]针对椭圆参考轨道附近的自由时域问题, 设计了一种基于深度学习的直接法, 将训练后网络的输出作为启动伪谱法的初值。该方法虽然收敛域较广且无须切换结构先验知识, 但解的精度不高, 且最优性无法保证。另一条是基于双边极值原理将原始问题转化成两点边值问题 (two point boundary value problem, TPBVP) 进行求解。因为解的精度高, 且满足一阶最优性必要条件等特点, 该技术路线是目前求解轨道追逃均衡最常用的方法, 产生了丰富的研究成果^[7-11]。同时, 也有学者针对该技术路线收敛域小、初值敏感等缺陷开发了改善方法。Hafer^[12]针对远距离追逃场景提出了一种敏感性方法, 计算状态和约束条件敏感性矩阵, 基于同伦法实现从无重力问题延拓至真实问题, 提高了计算效率。Li 等^[13]使用差分进化为 Newton 法提供初值猜测, 提升了方法稳定性。

随着研究的深入, 构造开环均衡的缺陷逐渐显露, 主要表现在以下三点: ①由于开环均衡特性, 局中人双方并不能根据实际博弈进程动态调整自己的控制策略; ②最优策略生成依赖均衡轨迹, 当博弈态势偏离均衡轨迹时, 需要重新计算; ③受初始博弈态势约束, 无法同时处理多组场景。

针对上述问题, 部分学者开始关注闭环均衡。虽然针对线性二次型之类特殊问题构建了相对完整的理论方法与处理流程^[14-15], 但总体上说, 闭环均衡求解方法的研究并不充分。当前的主流思路是通过计算大量开环均衡近似闭环效果。Stupik^[16]针对近距离共面追逃场景, 配合 Kriging 插值以及粒子群优化算法, 为均衡求解快速提供初值。Yang 等^[17]基于深度神经网络 (deep neural network, DNN) 模型对 TPBVP 关键参数进行重参数化, 将问题转化为神经网络训练过程, 借助 DNN 模型的记忆能力与效率优势实现闭环均衡近似。张乘铭等^[18]针对交会型轨道追逃问题, 提出了一种基于神经网络的滚动时域优化方法求解博弈对策, 通过将神经网络猜测轨迹与伪谱法结合实现策略的快速更新。但该思路存在以下两点问题: 一方面, 依然受制于博弈场景初始态势, 一次只能求解一场博弈, 难以总结共性规律; 另一方面, 单一场景计算成本较高, 需要大量计算开环均衡保证近似效果。

针对上述问题, 本论文综合运用 Bellman 最优性原理、有限差分法以及样条插值技术, 提出了一种构造闭环均衡、计算控制函数的方法, 实

现同时处理多组博弈场景, 为分析博弈态势、总结共性规律提供支撑。首先推导视线坐标系下的相对运动方程, 降低状态空间维度, 明确支付泛函, 建立轨道追逃博弈模型; 其次, 基于 Bellman 最优性原理, 将问题重构为哈密顿-雅可比-艾萨克 (Hamilton-Jacobi-Isaacs, HJI) 偏微分方程 (partial differential equation, PDE) 终值问题, 通过逆向分析消除场景初始态势可变的影响; 然后利用 Cartesian 网格离散计算区域, 基于有限差分法使用加权本质无振荡-总变差不增 (weighted essentially non-oscillatory - total-variation-diminishing, WENO-TVD) 求解器计算均衡受动力学驱动的演化过程, 分析博弈态势; 再基于控制函数与均衡空间梯度之间的关系, 为多组场景同时设计闭环控制函数, 总结共性规律; 最后通过数值仿真验证了方法的有效性。

1 问题建模

1.1 视线运动方程

惯性空间中, 从 P 质心指向 E 质心的单位矢量称为视线。P 与 E 在地心惯性 (earth centrical inertial, ECI) 坐标系中的相对位置关系如图 1 所示。

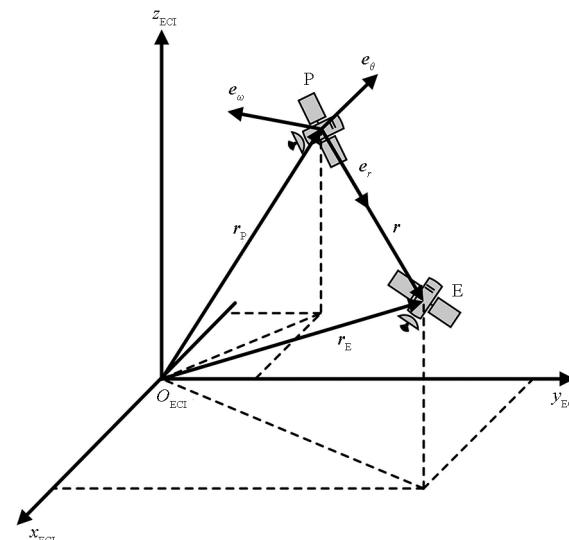


图 1 博弈双方相对位置关系

Fig. 1 Relative position relationship between game players

其中:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_E - \mathbf{r}_P = \mathbf{r} \mathbf{e}_r \quad (1)$$

式中, \mathbf{r} 表示 P 与 E 之间的相对距离, \mathbf{e}_r 为视线方向单位矢量。

定义视线的瞬时旋转角速度:

$$\boldsymbol{\omega}_s = \omega_s \mathbf{e}_\omega \quad (2)$$

式中, ω_s 表示视线瞬时转率, \mathbf{e}_ω 为瞬时角速度方

向单位矢量。以 P 质心为原点, \mathbf{e}_r 、 \mathbf{e}_ω 以及 $\mathbf{e}_\theta \triangleq \mathbf{e}_\omega \times \mathbf{e}_r$ 三组单位矢量组成视线旋转坐标系。

定义 \mathbf{e}_ω 的旋转角速度为:

$$\boldsymbol{\Omega}_s = \boldsymbol{\Omega}_s \mathbf{e}_r \quad (3)$$

归纳 $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\omega, \mathbf{e}_\theta)$ 的变化规律, 即视线运动方程如下:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \boldsymbol{\omega}_s \mathbf{e}_\theta \quad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\boldsymbol{\omega}_s \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\Omega}_s \mathbf{e}_\omega \quad (5)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\omega}{dt} = -\boldsymbol{\Omega}_s \mathbf{e}_\theta \quad (6)$$

1.2 无量纲降维动力学模型

对式(1)求导后代入式(4), 整理求导后, 再将式(4)与式(5)代入, 可得:

$$\mathbf{a}_E - \mathbf{a}_P = (\ddot{r} - r\omega_s^2) \mathbf{e}_r + (r\dot{\omega}_s + 2\dot{r}\omega_s) \mathbf{e}_\theta + r\omega_s \boldsymbol{\Omega}_s \mathbf{e}_\omega \quad (7)$$

其中加速度 $\mathbf{a}_E, \mathbf{a}_P$ 包含引力项与推力项两部分。

考虑到近距离追逃博弈

$$\begin{cases} r \ll \|\mathbf{r}_E\|_2 \\ r \ll \|\mathbf{r}_P\|_2 \end{cases} \quad (8)$$

的特点, 忽略引力项差值的影响, 定义 $v_r \triangleq \dot{r}$, $v_\theta \triangleq r\omega_s$, 整理式(7)得:

$$\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_P = \left(\dot{v}_r - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \mathbf{e}_r + \left(\dot{v}_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_\theta + v_\theta \boldsymbol{\Omega}_s \mathbf{e}_\omega \quad (9)$$

其中 $\mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P$ 为 E 与 P 加速度中的推力项, 即博弈双方的控制量。

由式(9)可知: 加速度在 \mathbf{e}_ω 轴的分量只改变速度量 $\boldsymbol{\Omega}_s$ 与 v_θ , 不影响相对距离 r 。考虑到追逃问题通常关注相对距离变化, 目标集约束只包含终端相对距离, 追逃动力学模型可以降维简化如下:

$$\begin{cases} \dot{r} = v_r \\ \dot{v}_r - \frac{v_\theta^2}{r} = u_E^r - u_P^r \\ \dot{v}_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} = u_E^\theta - u_P^\theta \end{cases} \quad (10)$$

引入参考距离 r_{ref} 、参考速度 v_{ref} 进行去量纲化处理, 可以得到无量纲降维动力学模型:

$$\begin{cases} \frac{dx_r}{dt} = x_\omega \\ \frac{dx_\omega}{dt} = \frac{x_\sigma^2}{x_r} + \frac{r_{ref}}{v_{ref}^2} (u_E^r - u_P^r) \\ \frac{dx_\sigma}{dt} = -\frac{x_r x_\sigma}{x_r} + \frac{r_{ref}}{v_{ref}^2} (u_E^\theta - u_P^\theta) \end{cases} \quad (11)$$

其中:

$$\begin{cases} x_r \triangleq \frac{r}{r_{ref}} \\ x_\omega \triangleq \frac{v_r}{v_{ref}} \\ x_\sigma \triangleq \frac{v_\theta}{v_{ref}} \\ \hat{t} \triangleq \frac{v_{ref}}{r_{ref}} t \end{cases} \quad (12)$$

1.3 微分对策

基于微分对策理论描述轨道追逃博弈问题通常分为动力学模型、目标集和支付泛函三部分^[2]。动力学模型一般使用常微分方程描述如下:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (13)$$

式中, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 表示博弈系统状态量, $\mathbf{u}_E \in U_E \subset \mathbb{R}^{n_E}$ 与 $\mathbf{u}_P \in U_P \subset \mathbb{R}^{n_P}$ 分别表示 E 与 P 的控制函数。函数 $f: \mathbb{R}^n \times U_E \times U_P \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 有界且 Lipschitz 连续。

目标集 G_0 表示终端约束:

$$G_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \psi(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \mathbf{0}_{n_\psi \times 1}\} \quad (14)$$

其中 $G_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ 一般为闭集, 可以记为一个有界且 Lipschitz 连续的函数 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的零水平子集, 即:

$$G_0 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, g(\mathbf{x}(t_f)) \leq 0\} \quad (15)$$

支付泛函

$$J(\mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P) = \Psi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P, t) dt \quad (16)$$

分为终端支付 $\Psi(\mathbf{x}(t_f), t_f)$ 和过程支付 $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P, t)$ 两部分, 前者表示终端状态对博弈结局的影响, 后者表示整个博弈流程产生的消耗。

2 闭环均衡求解方法

为了消除博弈初始态势对均衡构造的影响, 实现批量处理博弈场景, 发展基于非线性动力学的轨道追逃求解方法, 本文通过逆向分析, 综合运用 Bellman 最优性原理、有限差分法和插值技术进行均衡构造与策略设计。该方法主要分为问题重构、PDE 求解、控制与轨迹生成三部分, 方法整体流程如图 2 所示, 其中箭头表示数据流向, 箭头上方标签表示数据名称, 方框表示执行操作。

首先基于博弈问题的动力学模型 f 、目标集 G_0 以及支付泛函 $J(\mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P)$ 进行重构, 获得描述支付泛函动态演化的 HJI PDE; 其次选择状态空间子集作为计算区域 Λ 并划分网格 Λ_{grid} ; 然后使用 WENO-TVD 求解器, 配合终端支付, 在 Λ_{grid} 节点

上计算 HJI PDE 终值问题数值解 $\hat{J}(t, \mathbf{x})$ 用于分析演化规律, 同步记录数值梯度 $\nabla_{\mathbf{x}} \hat{J}(t, \mathbf{x})$ 用于生成插值函数 $\nabla_{\mathbf{x}} \hat{J}_1$; 在完成上述准备工作之后, 将代求博

弈问题初始态势组成初值序列, 与 $f, \nabla_{\mathbf{x}} \hat{J}_1$ 一起输入 RK(Runge-Kutta) 积分器求解轨迹与控制序列。接下来对方法各部分进行详细介绍。

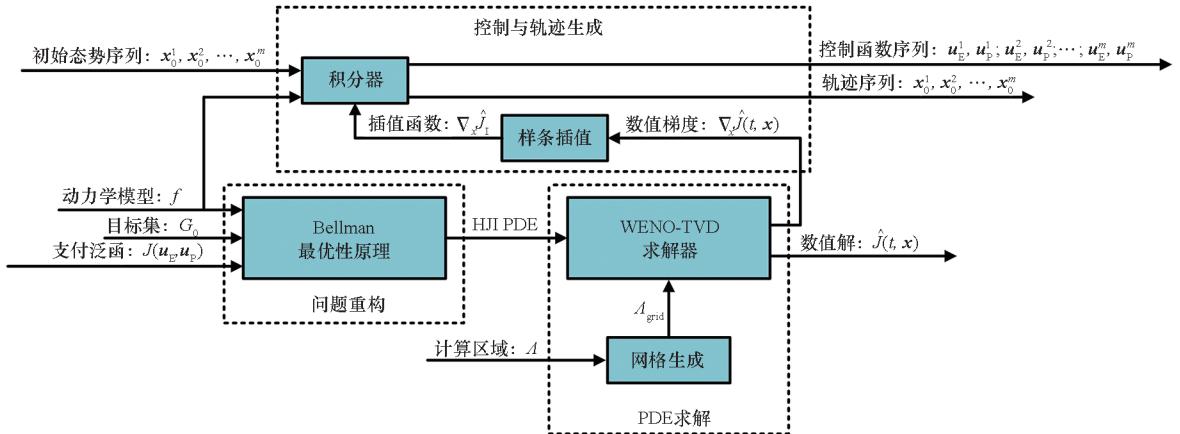


图 2 方法流程

Fig. 2 Method process

2.1 问题重构

设 $\mathbf{u}_E \in U_E$ 与 $\mathbf{u}_P \in U_P$ 表示局中人在 $[t, t_f]$ 上的各自控制, 则均衡可以用式(17)表示。根据 Bellman 最优性原理, 最优策略 $(\mathbf{u}_E^*, \mathbf{u}_P^*)$ 的求解过程可以分为两步: 先选择区间 $[t + \Delta t, t_f]$ 上的最

优控制函数, 再选择区间 $[t, t + \Delta t)$ 上的最优控制函数。这样式(17)可以写为如式(18)所示形式。

$$J^*(\mathbf{x}(t), t) = \max_{\mathbf{u}_E \in U_E[t, t + \Delta t)} \min_{\mathbf{u}_P \in U_P[t, t + \Delta t]} \left\{ \max_{\mathbf{u}_E \in U_E[t + \Delta t, t_f]} \min_{\mathbf{u}_P \in U_P[t + \Delta t, t_f]} \left[\int_t^{t + \Delta t} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P, t) dt + \int_{t + \Delta t}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P, t) dt + \Psi(\mathbf{x}(t_f), t_f) \right] \right\} \quad (18)$$

式中 $\int_t^{t + \Delta t} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P, t) dt$ 与区间 $[t + \Delta t, t_f]$ 上的控制无关, 并且

$$\begin{aligned} & J^*(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) \\ & \triangleq \max_{\mathbf{u}_E \in U_E[t + \Delta t, t_f]} \min_{\mathbf{u}_P \in U_P[t + \Delta t, t_f]} \left[\Psi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t + \Delta t}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P, t) dt \right] \end{aligned} \quad (19)$$

则式(18)可以改写为:

$$\begin{aligned} & J^*(\mathbf{x}(t), t) \\ & = \max_{\mathbf{u}_E \in U_E[t, t + \Delta t)} \min_{\mathbf{u}_P \in U_P[t, t + \Delta t]} \left[\int_t^{t + \Delta t} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P, t) dt \right] + \\ & J^*(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) \end{aligned} \quad (20)$$

根据积分中值定理, 式(20)的第一项可以改写成:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t + \Delta t} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P, t) dt = L(\mathbf{x}(t + \alpha \Delta t), \mathbf{u}_E(t + \alpha \Delta t), \\ & \mathbf{u}_P(t + \alpha \Delta t), t + \alpha \Delta t) \Delta t \end{aligned} \quad (21)$$

式中, $\alpha \in (0, 1)$ 。基于连续可微的假设, 式(20)的第二项可以展开成如下 Taylor 级数:

$$\begin{aligned} & J^*(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) \\ & = J^*(\mathbf{x}(t), t) + \left[\frac{\partial J^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right]^T \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \Delta t + \\ & \frac{\partial J^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} \Delta t + o[(\Delta t)^2] \end{aligned} \quad (22)$$

式中, $o[(\Delta t)^2]$ 表示 Δt 的高阶小量。将式(21)与式(22)代入式(18)可知:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial J^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} \\ & = \max_{\mathbf{u}_E \in U_E[t, t + \Delta t)} \min_{\mathbf{u}_P \in U_P[t, t + \Delta t]} \left\{ \left[\frac{\partial J^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right]^T f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P) + \right. \\ & L(\mathbf{x}(t + \alpha \Delta t), \mathbf{u}_E(t + \alpha \Delta t), \mathbf{u}_P(t + \alpha \Delta t), t + \alpha \Delta t) + \\ & \left. \frac{o[(\Delta t)^2]}{\Delta t} \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

上式令 $\Delta t \rightarrow 0$ 可得:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial J^*(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \max_{\mathbf{u}_E \in U_E} \min_{\mathbf{u}_P \in U_P} \left\{ L(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P, t) + \right. \\ & \left. \left[\frac{\partial J^*(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P, t) \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

式(24)称为 HJI PDE, 属于泛函与 PDE 的一种混

合形式。配合约束条件

$$J^*(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \Psi(\mathbf{x}(t_f), t_f) \quad (25)$$

原问题便转化为偏微分方程终值问题。

通过定义 Hamilton 函数

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P, t, \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}) \\ \triangleq L(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P, t) + \left[\frac{\partial J^*(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P, t) \quad (26)$$

并根据极值原理推导最优闭环控制函数的隐式解:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_E^* = \mathbf{u}_E^* \left(\mathbf{x}, \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \right) \\ \mathbf{u}_P^* = \mathbf{u}_P^* \left(\mathbf{x}, \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \right) \end{cases} \quad (27)$$

原方程可以转化为:

$$\begin{cases} \frac{\partial J^*(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + H\left(\mathbf{x}, \frac{\partial J^*(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}\right) = 0 \\ J^*(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \Psi(\mathbf{x}(t_f), t_f) \end{cases} \quad (28)$$

后续方程计算过程中,省略均衡 $J^*(\mathbf{x}(t), t)$ 的上标,简记为 J 。

2.2 PDE 求解

2.2.1 网格生成

在综合考虑动力学模型的适用范围以及计算消耗之后,需要将空间计算域限制在一个有限区域 Λ 内,并在此区域内生成均匀 Cartesian 网格^[19],对均衡 J 进行离散:

$$J = J_{d_1, d_2, \dots, d_n}^k \quad (29)$$

式中:下标 d_1, d_2, \dots, d_n 分别表示网格节点 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的坐标;上标 k 表示时间步。

在设置各空间维度的步长 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ 以及时间步长 Δt 时,为了保证计算稳定性,需要满足柯朗 - 弗里德里希斯 - 列维 (Courant-Friedrichs-Lowy, CFL) 条件^[20]:

$$\Delta t \max \left(\sum_{i=1}^n \frac{|\partial H / \partial J_{x_i}|}{\Delta x_i} \right) = \alpha_{\text{CFL}} \quad (30)$$

式中, J_{x_i} 表示 J 对 x_i 的偏导数, $\alpha_{\text{CFL}} \in (0, 1)$ 表示 CFL 数。

2.2.2 空间离散

网格表示允许以一种直接的方式计算均衡 J 的空间梯度 $\nabla_x J$ 。这里使用了五阶 WENO 格式^[21]进行近似计算。以 J 关于 x_1 的偏导数 $J_{x_1} \triangleq \partial J / \partial x_1$ 的计算为例进行说明。令 J 关于 x_1 的一阶均差定义在网格节点中点处:

$$D_{d_1+1/2}^1 J \triangleq \frac{J_{d_1+1, d_2, \dots, d_n}^k - J_{d_1, d_2, \dots, d_n}^k}{\Delta x_1} \quad (31)$$

记:

$$\begin{cases} (D^- J)_{d_1} \triangleq D_{d_1-1/2}^1 J \\ (D^+ J)_{d_1} \triangleq D_{d_1+1/2}^1 J \end{cases} \quad (32)$$

取模板 $\{ J_{d_1-3, d_2, \dots, d_n}^k, J_{d_1-2, d_2, \dots, d_n}^k, J_{d_1-1, d_2, \dots, d_n}^k, J_{d_1, d_2, \dots, d_n}^k, J_{d_1+1, d_2, \dots, d_n}^k, J_{d_1+2, d_2, \dots, d_n}^k \}$, 定义

$$\begin{cases} v_1 \triangleq (D^- J)_{d_1-2} \\ v_2 \triangleq (D^- J)_{d_1-1} \\ v_3 \triangleq (D^- J)_{d_1} \\ v_4 \triangleq (D^- J)_{d_1+1} \\ v_5 \triangleq (D^- J)_{d_1+2} \end{cases} \quad (33)$$

偏导数左近似 $J_{x_1}^-$ 可以根据下式计算:

$$J_{x_1}^- = \omega_1 (J_{x_1}^-)_1 + \omega_2 (J_{x_1}^-)_2 + \omega_3 (J_{x_1}^-)_3 \quad (34)$$

式中,

$$\begin{cases} (J_{x_1}^-)_1 \triangleq \frac{1}{3} v_1 - \frac{7}{6} v_2 + \frac{11}{6} v_3 \\ (J_{x_1}^-)_2 \triangleq -\frac{1}{6} v_2 + \frac{5}{6} v_3 + \frac{1}{3} v_4 \\ (J_{x_1}^-)_3 \triangleq \frac{1}{3} v_3 + \frac{5}{6} v_4 - \frac{1}{6} v_5 \end{cases} \quad (35)$$

非线性权重 $\omega_m (m = 1, 2, 3)$ 为

$$\begin{cases} \omega_m = \frac{\alpha_m}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ \alpha_m = \frac{c_m}{(\varepsilon + S_m)^2} \end{cases} \quad (36)$$

其中, ε 为灵敏度参数, 是一个小量, 用于避免分母为零, 其取值一定程度上影响收敛精度^[22], 通常取为 $\varepsilon = 10^{-6}$; c_m 为理想权重, 以确保在光滑区域能够获得最优近似, 其取值分别为 $c_1 = 0.1$ 、 $c_2 = 0.6$ 、 $c_3 = 0.3$; S_m 为光滑因子, 表达式为

$$\begin{cases} S_1 = \frac{13}{12} (v_1 - 2v_2 + v_3)^2 + \frac{1}{4} (v_1 - 4v_2 + 3v_3)^2 \\ S_2 = \frac{13}{12} (v_2 - 2v_3 + v_4)^2 + \frac{1}{4} (v_2 - v_4)^2 \\ S_3 = \frac{13}{12} (v_3 - 2v_4 + v_5)^2 + \frac{1}{4} (3v_3 - 4v_4 + v_5)^2 \end{cases} \quad (37)$$

取 $\{ J_{d_1-2, d_2, \dots, d_n}^k, J_{d_1-1, d_2, \dots, d_n}^k, J_{d_1, d_2, \dots, d_n}^k, J_{d_1+1, d_2, \dots, d_n}^k, J_{d_1+2, d_2, \dots, d_n}^k, J_{d_1+3, d_2, \dots, d_n}^k \}$, 定义

$$\begin{cases} v_1 \triangleq (D^+ J)_{d_1-2} \\ v_2 \triangleq (D^+ J)_{d_1-1} \\ v_3 \triangleq (D^+ J)_{d_1} \\ v_4 \triangleq (D^+ J)_{d_1+1} \\ v_5 \triangleq (D^+ J)_{d_1+2} \end{cases} \quad (38)$$

重复上述计算流程便可以获得偏导数右近似 $J_{x_1}^+$ 。

将 d_1 替换为 d_2, d_3, \dots, d_n 可以计算 J 关于 x_2, x_3, \dots, x_n 的偏导数左右近似, 组成空间梯度的左右近似:

$$(\nabla_x J)^- \triangleq [J_{x_1}^-; J_{x_2}^-; \dots; J_{x_n}^-] \quad (39)$$

$$(\nabla_x J)^+ \triangleq [J_{x_1}^+; J_{x_2}^+; \dots; J_{x_n}^+] \quad (40)$$

而 Hamilton 量的近似 \hat{H} 则使用 Lax-Friedrichs 格式^[23] 计算:

$$\hat{H} = H\left(\mathbf{x}, \frac{(\nabla_x J)^+ + (\nabla_x J)^-}{2}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{2} (J_{x_i}^+ - J_{x_i}^-) \quad (41)$$

式中,

$$\beta_i = \max_{[J_{x_i}^{\min}, J_{x_i}^{\max}]} \left| \frac{\partial H}{\partial J_{x_i}} \right| \quad (42)$$

表示各维度耗散系数, 用于控制数值黏度。

2.2.3 时间离散

时间离散则采用的是三阶 TVD RK 方法^[24]。首先通过一次 Euler 步, 将方程数值解推进至 $t^k + \Delta t$ 时刻:

$$\frac{J^{k+1} - J^k}{\Delta t} + \hat{H}^k = 0 \quad (43)$$

然后再经过一次 Euler 步, 将均衡值推进至 $t^k + 2\Delta t$ 时刻:

$$\frac{J^{k+2} - J^{k+1}}{\Delta t} + \hat{H}^{k+1} = 0 \quad (44)$$

接着基于输入数据和外推结果的平均步骤

$$J^{k+1/2} = \frac{3}{4}J^k + \frac{1}{4}J^{k+2} \quad (45)$$

提供均衡 J 在 $t^k + \frac{1}{2}\Delta t$ 时刻的数值。之后再经历

一次 Euler 步的计算, 可以将数值解外推至 $t^k + \frac{3}{2}\Delta t$ 时刻:

$$\frac{J^{k+3/2} - J^{k+1/2}}{\Delta t} + \hat{H}^{k+1/2} = 0 \quad (46)$$

最终再次通过平均步骤

$$J^{k+1} = \frac{1}{3}J^k + \frac{2}{3}J^{k+3/2} \quad (47)$$

生成均衡在 $t^k + \Delta t$ 时刻的三阶精度 TVD 近似。

2.3 控制与轨迹生成

在根据 WENO-TVD 求解器完成计算域 Λ 内均衡演化的计算之后, 可以获得各网格节点上的均衡数值 $\hat{J}(t, \mathbf{x})$ 和相应的数值梯度 $\nabla_x \hat{J}(t, \mathbf{x})$ 。其中, $\hat{J}(t, \mathbf{x})$ 被用于展示均衡的受动力学驱动的动态演化过程, 分析博弈态势, 研判航天器威胁关系; $\nabla_x \hat{J}(t, \mathbf{x})$ 则用于构造三次样条插值函数 $\nabla_x \hat{J}_1(t, \mathbf{x})$, 与动力学模型式(11)和控制隐式解

式(27)一同构成基于 RK 方法的数值积分器。之后, 只需要向积分器输入场景初始态势序列以及博弈时间便可以构造闭环控制函数, 外推闭环均衡轨迹。

3 仿真算例

3.1 场景通用参数设置

首先明确去量纲参数 $r_{\text{ref}} = 100 \text{ km}$ 、 $v_{\text{ref}} = 100 \text{ m/s}$, 并随机设置了 6 组博弈初始态势, 用于展示博弈场景结果, 初始态势详细信息记录在表 1 内。

表 1 轨道追逃博弈初始场景

Tab. 1 Initial situation of orbital pursuit-evasion game

场景编号	x_r	x_ω	x_σ
1	0.06	-0.63	0.70
2	0.09	-0.38	0.08
3	0.11	0.09	0.05
4	0.18	-0.57	0.12
5	0.25	0.14	-0.31
6	0.27	0.26	-0.80

其次设置相对距离为终端约束, 明确追逃问题目标集为:

$$G_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_r \leq 0.02\} \quad (48)$$

继而确定相应 $g(\mathbf{x})$:

$$g(\mathbf{x}) = x_r - 0.02 \quad (49)$$

然后使用 Bolza 型性能指标表示支付泛函:

$$J(\mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P) = \Psi(\mathbf{x}(\hat{t}_f), \hat{t}_f) + \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_f} L(\mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P) dt \quad (50)$$

其中, 终端支付为:

$$\Psi(\mathbf{x}(\hat{t}_f), \hat{t}_f) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x}(\hat{t}_f) \in G_0 \\ 10 & \text{其他} \end{cases} \quad (51)$$

过程支付为:

$$L(\mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P) = \frac{r_{\text{ref}}^2}{v_{\text{ref}}^4} [(\mathbf{u}_P)^T \mathbf{R}_P^T \mathbf{R}_P \mathbf{u}_P - (\mathbf{u}_E)^T \mathbf{R}_E^T \mathbf{R}_E \mathbf{u}_E] \quad (52)$$

相关参数设置如下:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_E = \sqrt{2} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{R}_P = \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{cases} \quad (53)$$

再设置博弈场景持续时间 $\hat{t}_f - \hat{t}_0$ 为 3.6, 而计算空间域 Λ 的相关信息见表 2。

最后, 为了在仿真过程中分析支付泛函在计

算空间域 Λ 中随时间的演化过程,在 $x_r = \{0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.30\}$ 设置采样平面,通过切片云图展现演化细节。

表 2 计算空间域网格信息

Tab. 2 Computational spatial grid information

变量	x_r	x_ω	x_σ
范围	[0.01, 0.3]	[-1, 1]	[-1, 1]
网格数	1 000	20	20
步长	0.000 29	0.1	0.1

3.2 推力构型 I:各方向机动能力有限

该推力构型下,双方航天器在各方向上的机动能力独立、有限且相异,推力加速度可以表示为:

$$\begin{cases} u_E^r \in [-T_E^r, T_E^r] \\ u_E^\sigma \in [-T_E^\sigma, T_E^\sigma] \end{cases} \quad (54)$$

$$\begin{cases} u_P^r \in [-T_P^r, T_P^r] \\ u_P^\sigma \in [-T_P^\sigma, T_P^\sigma] \end{cases} \quad (55)$$

其中, $T_E^r = 0.004g_0$, $T_E^\sigma = 0.003g_0$, $T_P^r = 0.01g_0$, $T_P^\sigma = 0.009g_0$, g_0 表示海平面重力加速度。

3.2.1 问题重构

通过计算 Hamilton 函数:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P, \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}}) \\ = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P) + \left[\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \right]^T f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P) \\ = \frac{\partial J}{\partial x_r} x_\omega + \frac{\partial J}{\partial x_\omega} \frac{x_\sigma^2}{x_r} - \frac{\partial J}{\partial x_\sigma} \frac{x_\omega x_\sigma}{x_r} + \frac{r_{\text{ref}}}{v_{\text{ref}}^2} \left[\frac{\partial J}{\partial x_\omega} u_E^r + \frac{\partial J}{\partial x_\sigma} u_E^\sigma \right] - \\ \frac{2r_{\text{ref}}^2}{v_{\text{ref}}^4} \left[(u_E^r)^2 + (u_E^\sigma)^2 \right] - \frac{r_{\text{ref}}}{v_{\text{ref}}^2} \left[\frac{\partial J}{\partial x_\omega} u_P^r + \frac{\partial J}{\partial x_\sigma} u_P^\sigma \right] + \\ \frac{2r_{\text{ref}}^2}{v_{\text{ref}}^4} \left[(u_P^r)^2 + (u_P^\sigma)^2 \right] \end{aligned} \quad (56)$$

并将推力构型式(54)~(55)代入式(56),根据定义推导闭环控制 \mathbf{u}_E^* 与 \mathbf{u}_P^* 的隐式解:

$$\begin{cases} -T_E^r & \frac{v_{\text{ref}}^2}{4r_{\text{ref}}} \frac{\partial J}{\partial x_\omega} \leq -T_E^r \\ \frac{v_{\text{ref}}^2}{4r_{\text{ref}}} \frac{\partial J}{\partial x_\omega} & -T_E^r < \frac{v_{\text{ref}}^2}{4r_{\text{ref}}} \frac{\partial J}{\partial x_\omega} < T_E^r \\ T_E^r & \frac{v_{\text{ref}}^2}{4r_{\text{ref}}} \frac{\partial J}{\partial x_\omega} \geq T_E^r \end{cases} \quad (57)$$

$$\begin{cases} -T_E^\sigma & \frac{v_{\text{ref}}^2}{4r_{\text{ref}}} \frac{\partial J}{\partial x_\sigma} \leq -T_E^\sigma \\ \frac{v_{\text{ref}}^2}{4r_{\text{ref}}} \frac{\partial J}{\partial x_\sigma} & -T_E^\sigma < \frac{v_{\text{ref}}^2}{4r_{\text{ref}}} \frac{\partial J}{\partial x_\sigma} < T_E^\sigma \\ T_E^\sigma & \frac{v_{\text{ref}}^2}{4r_{\text{ref}}} \frac{\partial J}{\partial x_\sigma} \geq T_E^\sigma \end{cases} \quad (58)$$

$$(u_P^r)^* = \begin{cases} -T_P^r & \frac{v_{\text{ref}}^2}{2r_{\text{ref}}} \frac{\partial J}{\partial x_\omega} \leq -T_P^r \\ \frac{v_{\text{ref}}^2}{2r_{\text{ref}}} \frac{\partial J}{\partial x_\omega} & -T_P^r < \frac{v_{\text{ref}}^2}{2r_{\text{ref}}} \frac{\partial J}{\partial x_\omega} < T_P^r \\ T_P^r & \frac{v_{\text{ref}}^2}{2r_{\text{ref}}} \frac{\partial J}{\partial x_\omega} \geq T_P^r \end{cases} \quad (59)$$

$$(u_P^\sigma)^* = \begin{cases} -T_P^\sigma & \frac{v_{\text{ref}}^2}{2r_{\text{ref}}} \frac{\partial J}{\partial x_\sigma} \leq -T_P^\sigma \\ \frac{v_{\text{ref}}^2}{2r_{\text{ref}}} \frac{\partial J}{\partial x_\sigma} & -T_P^\sigma < \frac{v_{\text{ref}}^2}{2r_{\text{ref}}} \frac{\partial J}{\partial x_\sigma} < T_P^\sigma \\ T_P^\sigma & \frac{v_{\text{ref}}^2}{2r_{\text{ref}}} \frac{\partial J}{\partial x_\sigma} \geq T_P^\sigma \end{cases} \quad (60)$$

配合终端支付构成的终值条件:

$$J(\mathbf{x}(\hat{t}_f), \hat{t}_f) = \Psi(\mathbf{x}(\hat{t}_f), \hat{t}_f) \quad (61)$$

组成完整的 HJI PDE 终值问题。

3.2.2 支付泛函演化结果

基于 WENO-TVD 求解器完成 HJI PDE 终值问题求解之后,以切片云图的方式绘制博弈期间支付泛函的演化过程,结果如图 3 所示。

观察计算结果可以发现:支付泛函等值面的分布关于 $x_\sigma = 0$ 平面对称,说明只有 x_σ 数值变化会影响泛函,即视线旋转的方向不影响博弈过程。通过切片观察泛函在 $x_\sigma - x_\omega$ 平面上的分布可以发现极小值一直沿着 x_ω 轴负方向转移,值的变化区域越来越小,直至最后形成终端支付。由于该平面上各个方向的扩散阻力不同,数值的变化速度有着明显差异。

3.2.3 博弈场景计算结果

给出整个计算域 Λ 内的支付泛函信息后,便可以为博弈场景构造均衡,生成局中人的闭环控制函数和均衡轨迹。基于表 1 内 6 组初始态势同时计算相应的博弈场景获得均衡轨迹与闭环控制函数,相应的详细信息记录在图 4~9 中。

根据计算结果可以发现:博弈双方的控制函数受到自身机动能力的限制和支付泛函梯度的双重约束,当机动能力无法满足梯度需求时,会影响均衡轨迹以及博弈的结果。场景 1 与场景 6 由于追踪方机动能力不足,未能达成终端约束条件,逃逸方成功逃逸。通过 6 组博弈场景可以发现博弈共性:博弈前期首先会逐步降低视线旋转的角速度,直到视线旋转角速度可以忽略后,开始降低 u^σ 输出,并同步开始缩短相对距离,直至博弈结束。

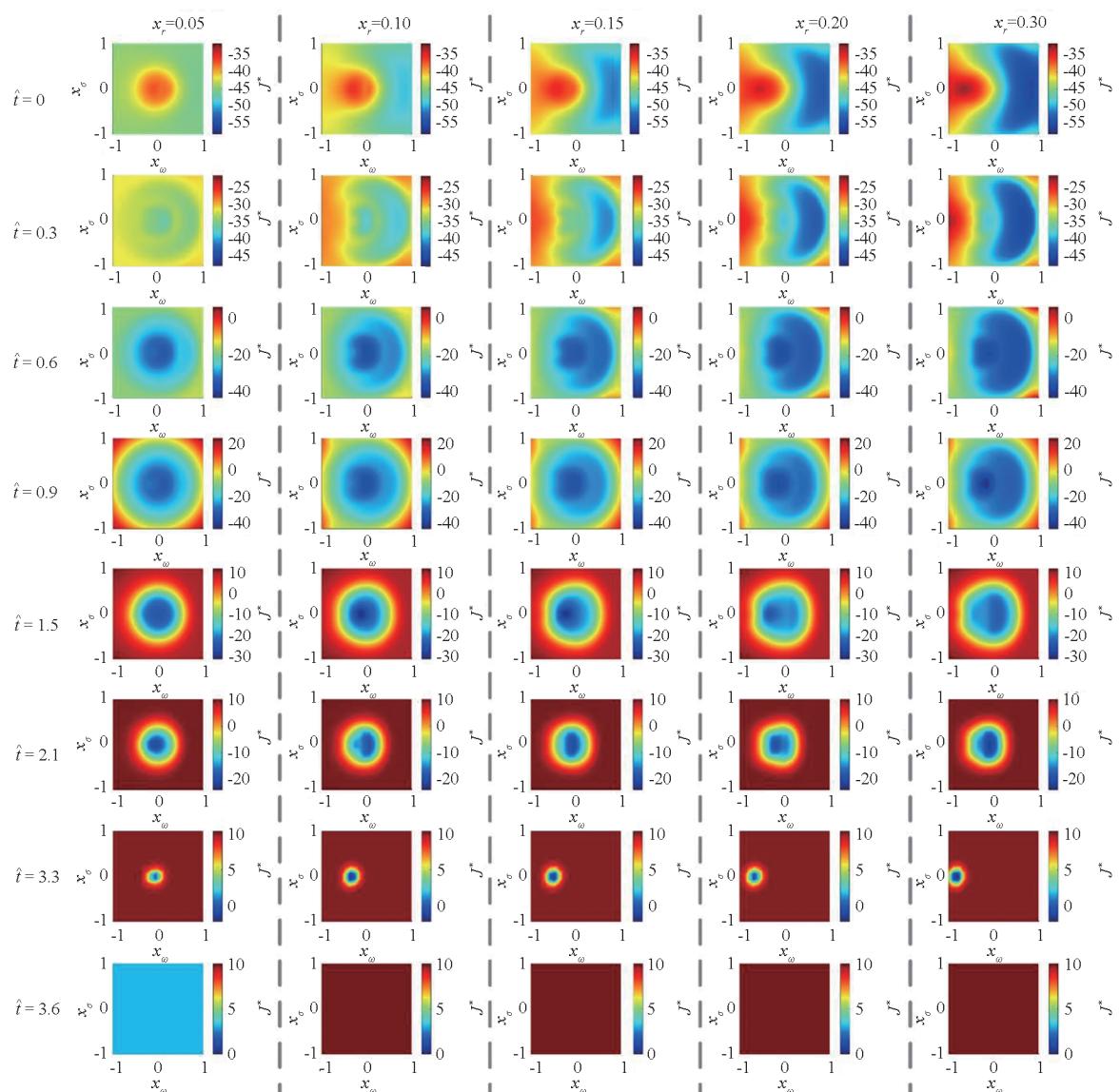


图3 均衡受动力学驱动的演化过程(推力构型 I)

Fig. 3 Equilibrium evolution process driven by dynamics (thrust configuration I)

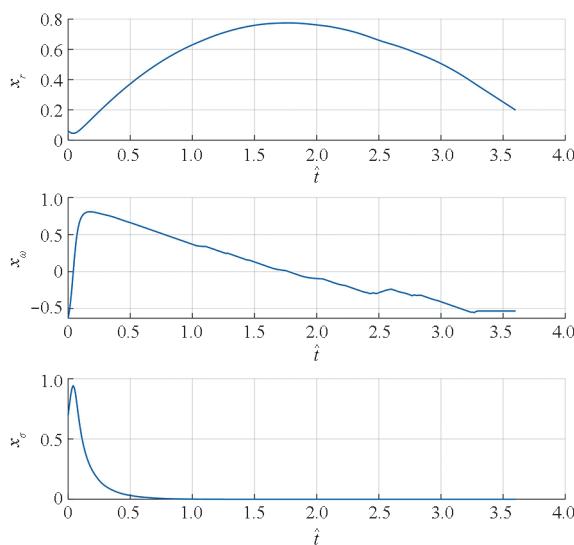
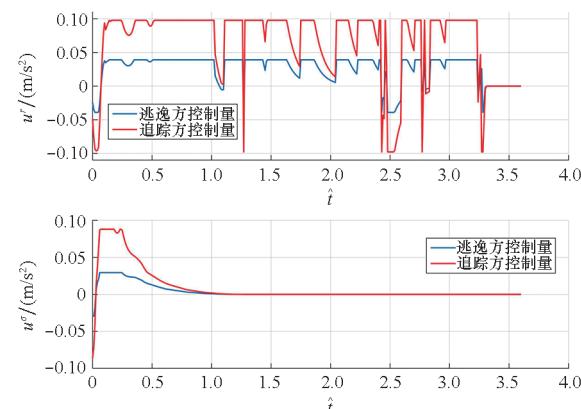
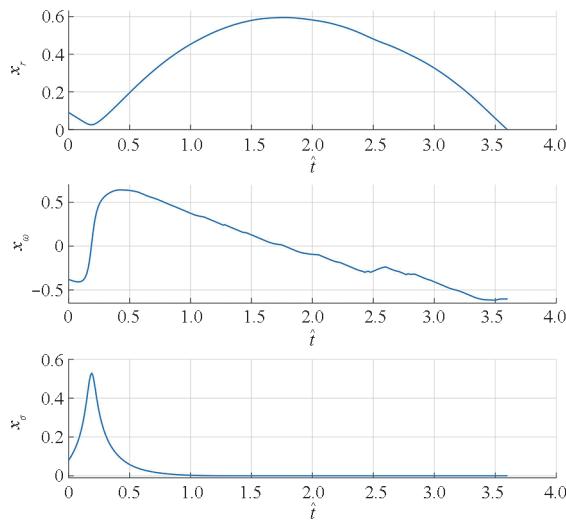
(a) 状态变化
(a) State change(b) 控制函数变化
(b) Control function change

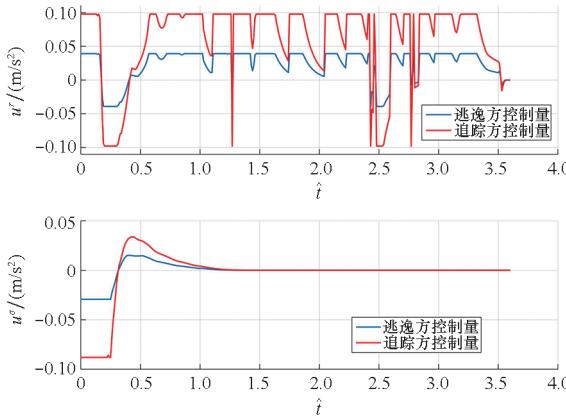
图4 场景1博弈过程(推力构型 I)

Fig. 4 Gameplay process of scenario 1
(thrust configuration I)



(a) 状态变化

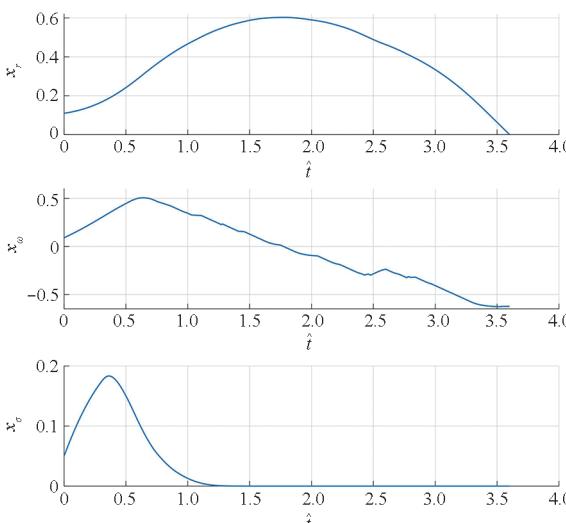
(a) State change



(b) 控制函数变化

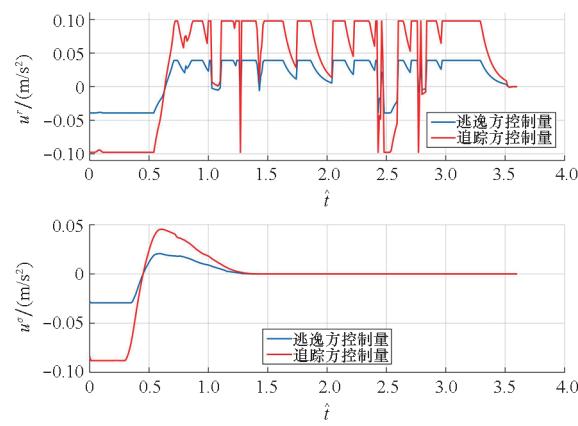
(b) Control function change

图5 场景2博弈过程(推力构型I)

Fig. 5 Gameplay process of scenario 2
(thrust configuration I)

(a) 状态变化

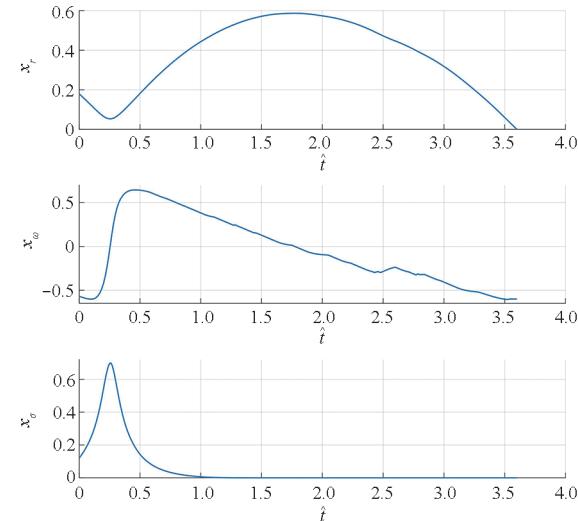
(a) State change



(b) 控制函数变化

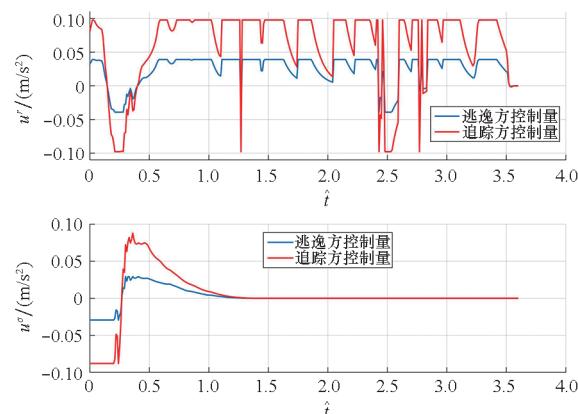
(b) Control function change

图6 场景3博弈过程(推力构型I)

Fig. 6 Gameplay process of scenario 3
(thrust configuration I)

(a) 状态变化

(a) State change



(b) 控制函数变化

(b) Control function change

图7 场景4博弈过程(推力构型I)

Fig. 7 Gameplay process of scenario 4
(thrust configuration I)

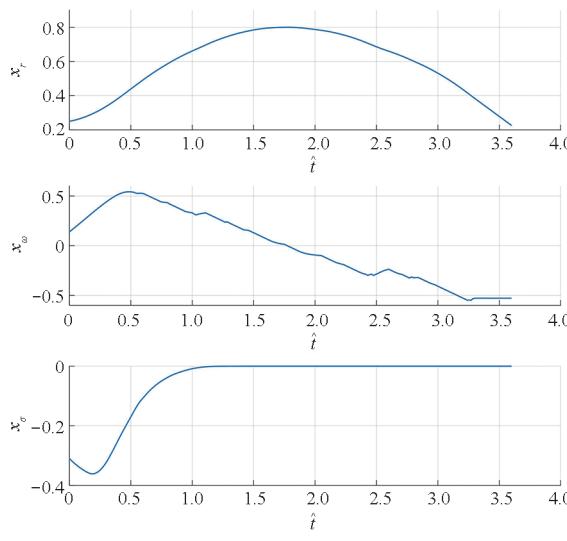
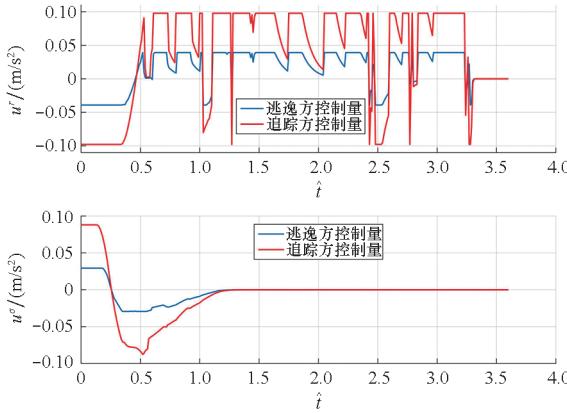
(a) 状态变化
(a) State change(b) 控制函数变化
(b) Control function change

图8 场景5博弈过程(推力构型I)

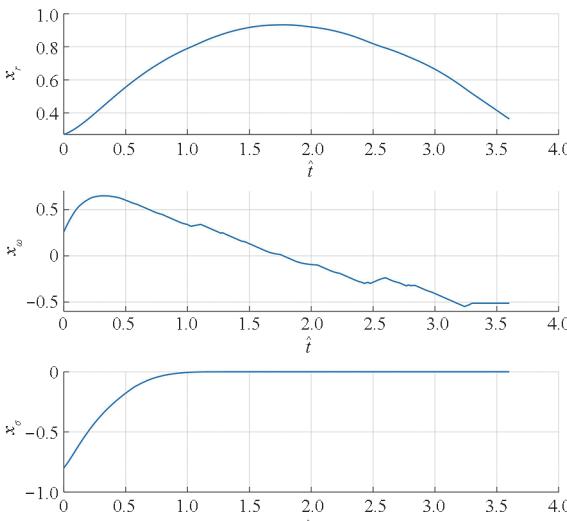
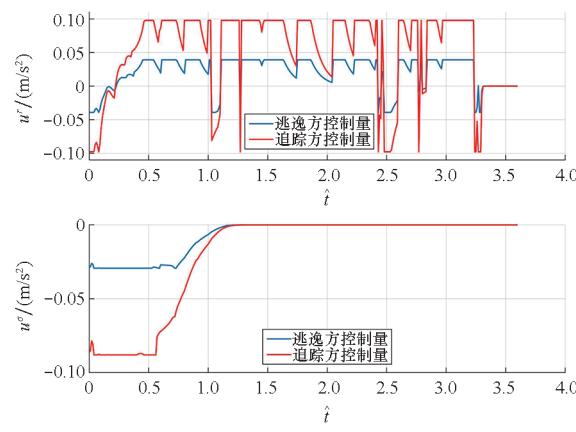
Fig. 8 Gameplay process of scenario 5
(thrust configuration I)(a) 状态变化
(a) State change(b) 控制函数变化
(b) Control function change

图9 场景6博弈过程(推力构型I)

Fig. 9 Gameplay process of scenario 6
(thrust configuration I)

3.3 推力构型II: 总机动能力有限

该推力构型下, 双方航天器总机动能力有限, 导致两个方向的控制量会相互影响, 推力加速度可以表示为:

$$\begin{bmatrix} u_E^r \\ u_E^\sigma \end{bmatrix} = T_{\max}^E \kappa_E \begin{bmatrix} v_E^r \\ v_E^\sigma \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\begin{bmatrix} u_P^r \\ u_P^\sigma \end{bmatrix} = T_{\max}^P \kappa_P \begin{bmatrix} v_P^r \\ v_P^\sigma \end{bmatrix} \quad (63)$$

其中: $T_{\max}^E = 0.006g_0$ 与 $T_{\max}^P = 0.01g_0$ 表示追逃双方的最大推力加速度; $\kappa_E, \kappa_P \in [0, 1]$ 表示推力系数; $[v_E^r \ v_E^\sigma]^T$ 与 $[v_P^r \ v_P^\sigma]^T$ 表示推力方向单位矢量。

3.3.1 问题重构

将推力构型II中的总机动能力与通用参数一同代入 Hamilton 函数, 通过定义

$$\lambda \triangleq \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial x_\omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial x_\sigma}\right)^2} \quad (64)$$

可以推导出 u_E^* 与 u_P^* 的隐式解:

$$\begin{bmatrix} v_E^r \\ v_E^\sigma \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} v_P^r \\ v_P^\sigma \end{bmatrix}^* = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_\omega} \\ \frac{\partial J}{\partial x_\sigma} \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$(\kappa_E)^* = \begin{cases} \frac{v_{\text{ref}}^2 \lambda}{4T_{\max}^E r_{\text{ref}}} & \lambda < \frac{4T_{\max}^E r_{\text{ref}}}{v_{\text{ref}}^2} \\ 1 & \lambda \geq \frac{4T_{\max}^E r_{\text{ref}}}{v_{\text{ref}}^2} \end{cases} \quad (66)$$

$$(\kappa_P)^* = \begin{cases} \frac{v_{\text{ref}}^2 \lambda}{2T_{\max}^P r_{\text{ref}}} & \lambda < \frac{2T_{\max}^P r_{\text{ref}}}{v_{\text{ref}}^2} \\ 1 & \lambda \geq \frac{2T_{\max}^P r_{\text{ref}}}{v_{\text{ref}}^2} \end{cases} \quad (67)$$

再回代入 Hamilton 函数,设置方程终值为终端支付:

$$J(\hat{t}_f) = \Psi(\mathbf{x}(\hat{t}_f)) \quad (68)$$

构成完整的 HJI PDE 终值问题:

$$\begin{cases} -\frac{\partial J}{\partial t} = H\left(\mathbf{x}, \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}}\right) \\ J(\hat{t}_f) = \Psi(\mathbf{x}(\hat{t}_f)) \end{cases} \quad (69)$$

3.3.2 支付泛函演化结果

在 HJI PDE 终值问题求解完成之后,以切片云图的方式绘制博弈期间支付泛函的演化过程,结果如图 10 所示。

推力构型 II 支付泛函的等值面一开始可以近似认为是由圆心位于 x_r 轴上的圆沿 x_r 轴延伸得到的曲面,分布相对均匀。随着博弈的进行,等值面与支付的极小值都在向着 x_ω 负方向偏移,值的变化区域越来越小,直至最终形成终端支付。但

相比于推力构型 I,演化过程影响的区域更小。该构型计算结果同样关于 $x_\sigma = 0$ 平面对称,也说明视线旋转的角速度方向对博弈没有影响。通过切片观察支付泛函在 $x_\sigma - x_\omega$ 平面上的分布可以明显看出右侧区域各颜色区域更为紧密,色相变化更剧烈,说明相比于推力构型 I,该构型下的支付泛函的演化更为剧烈。

3.3.3 博弈场景计算结果

基于支付泛函结果对 6 组博弈场景进行计算,均衡轨迹和控制函数的详细结果记录于图 11~16 中。从中可以发现:使用推力构型 II 时,博弈双方的控制函数一方面需要考虑支付函数空间梯度,另一方面需要考虑自身机动能力如何安排,从而影响了均衡轨迹以及博弈的结果——与推力构型 I 时只需增加时间便可完成博弈不同,场景 1 和场景 6 完全

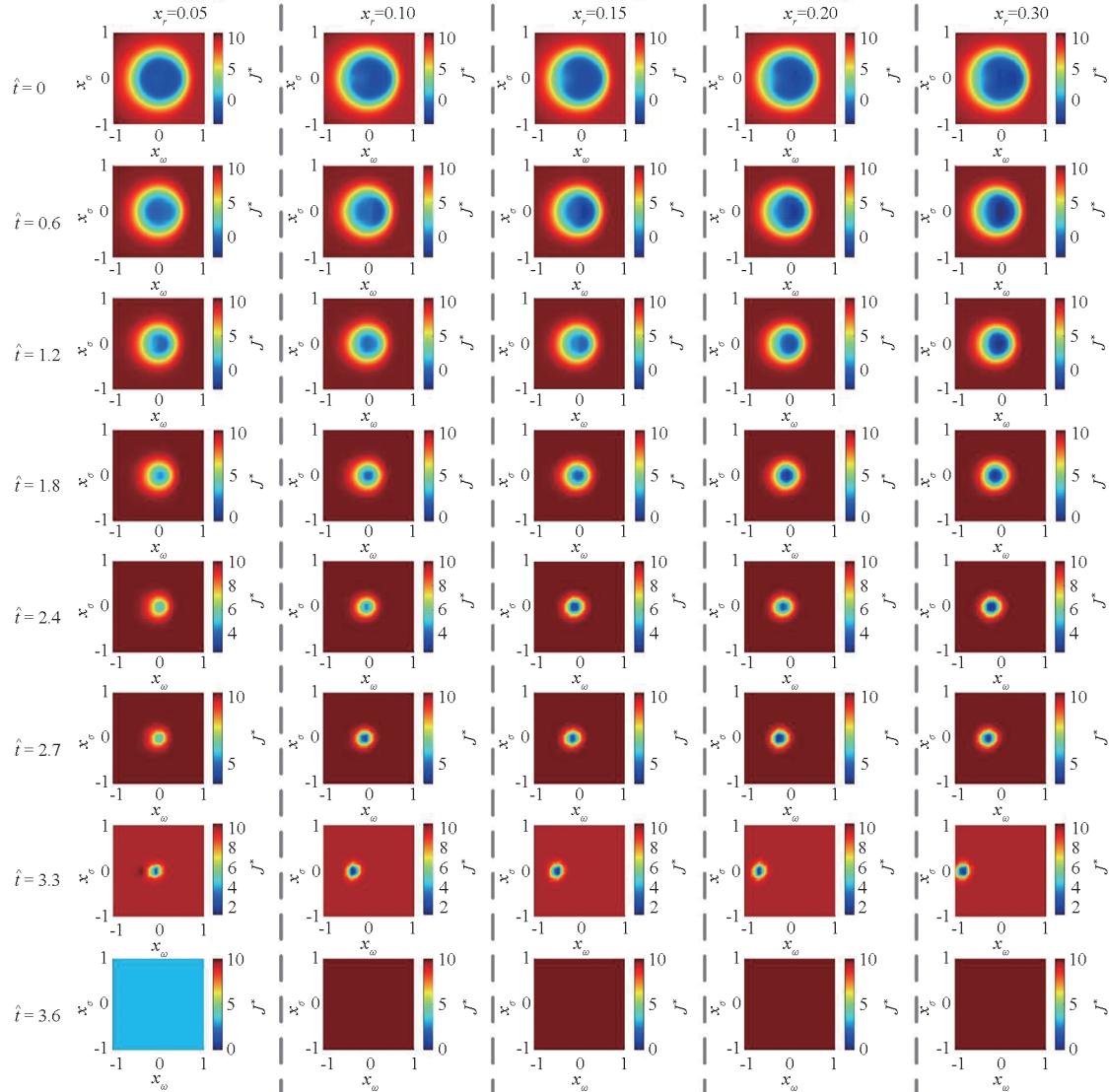
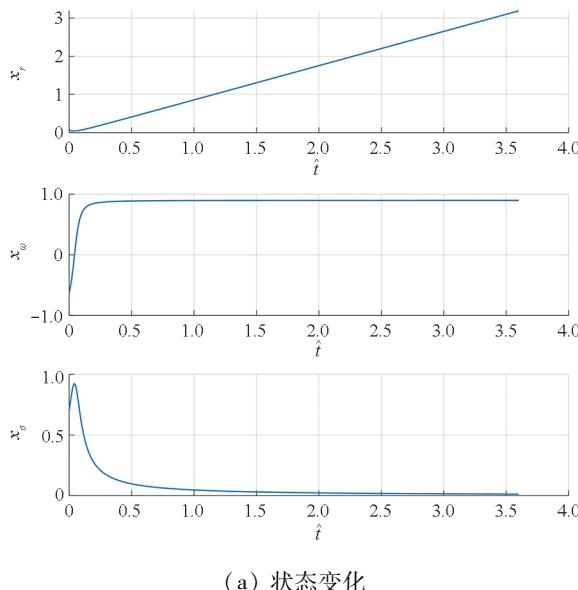


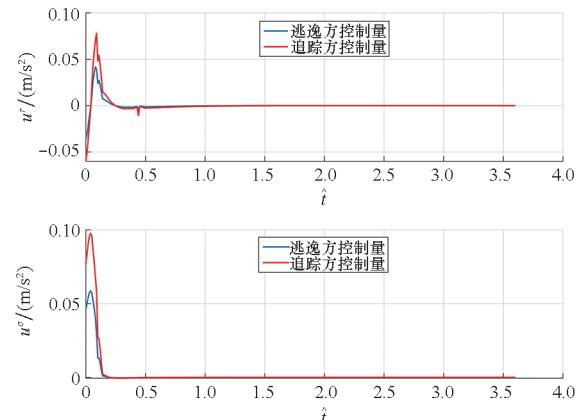
图 10 均衡受动力学驱动的演化过程(推力构型 II)

Fig. 10 Equilibrium evolution process driven by dynamics (thrust configuration II)



(a) 状态变化

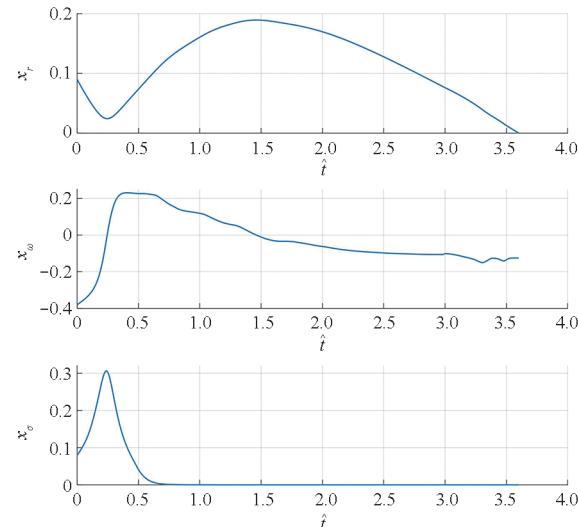
(a) State change



(b) 控制函数变化

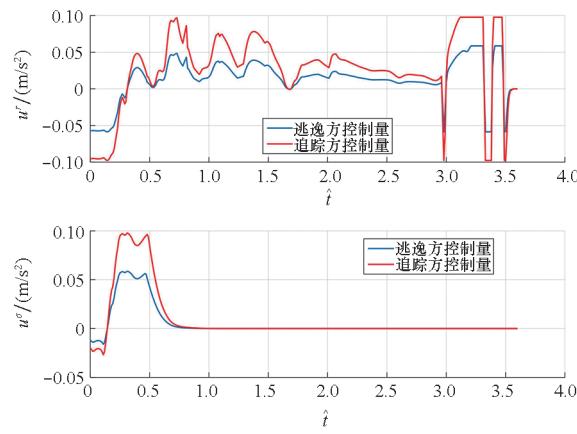
(b) Control function change

图 11 场景 1 博弈过程(推力构型 II)

Fig. 11 Gameplay process of scenario 1
(thrust configuration II)

(a) 状态变化

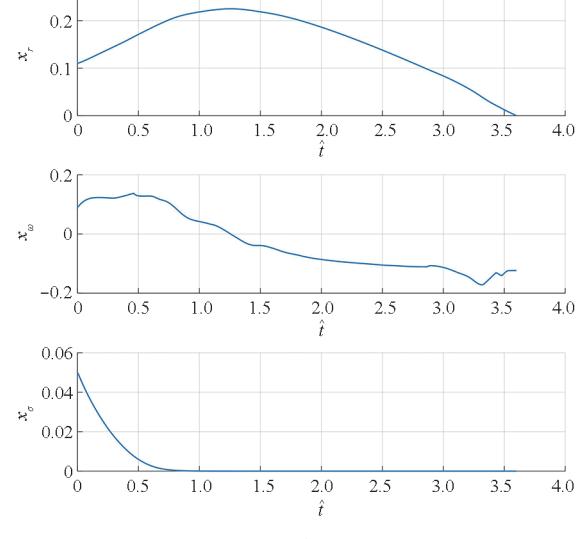
(a) State change



(b) 控制函数变化

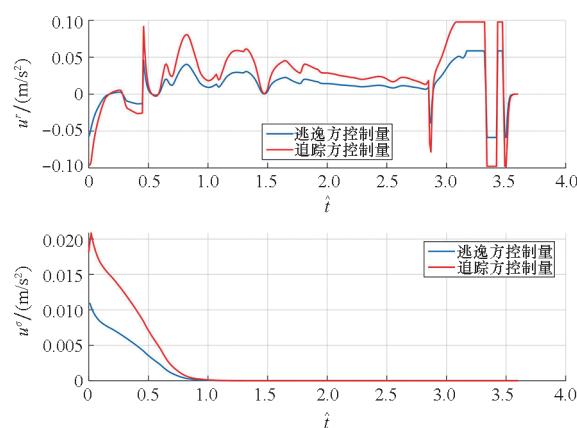
(b) Control function change

图 12 场景 2 博弈过程(推力构型 II)

Fig. 12 Gameplay process of scenario 2
(thrust configuration II)

(a) 状态变化

(a) State change

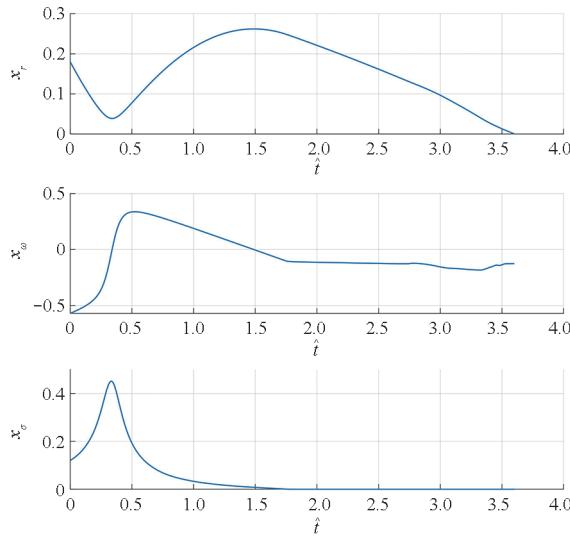


(b) 控制函数变化

(b) Control function change

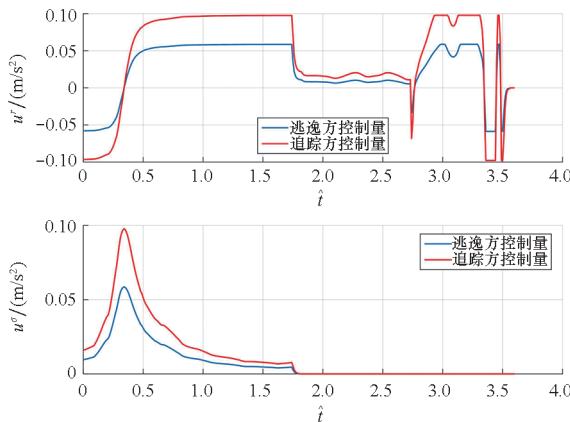
图 13 场景 3 博弈过程(推力构型 II)

Fig. 13 Gameplay process of scenario 3
(thrust configuration II)



(a) 状态变化

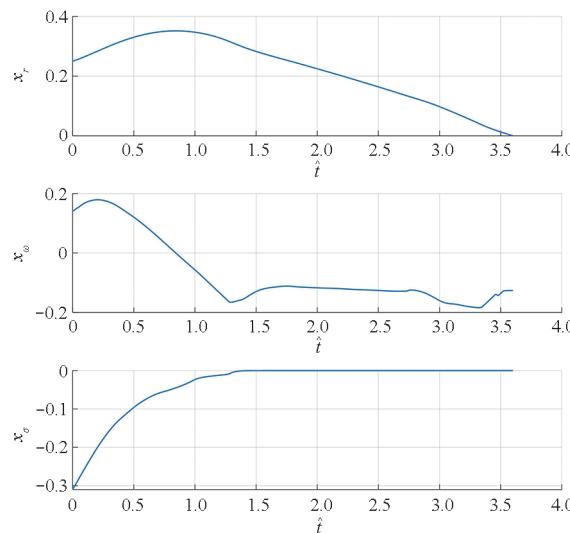
(a) State change



(b) 控制函数变化

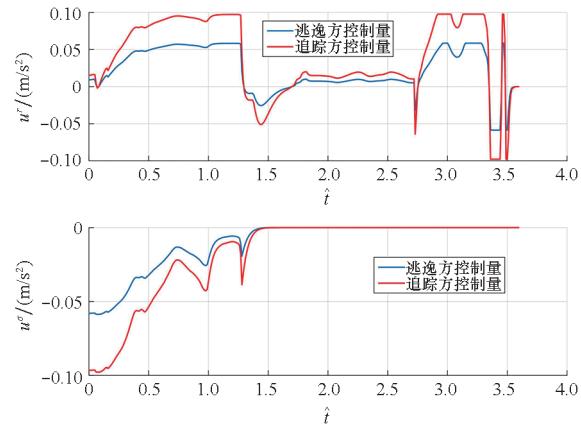
(b) Control function change

图 14 场景 4 博弈过程(推力构型 II)

Fig. 14 Gameplay process of scenario 4
(thrust configuration II)

(a) 状态变化

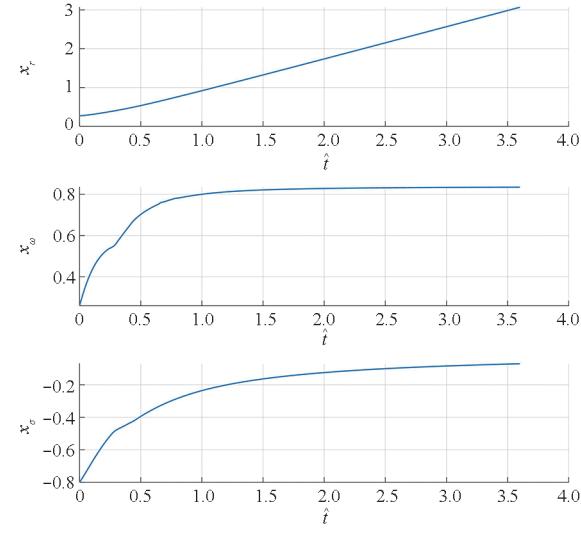
(a) State change



(b) 控制函数变化

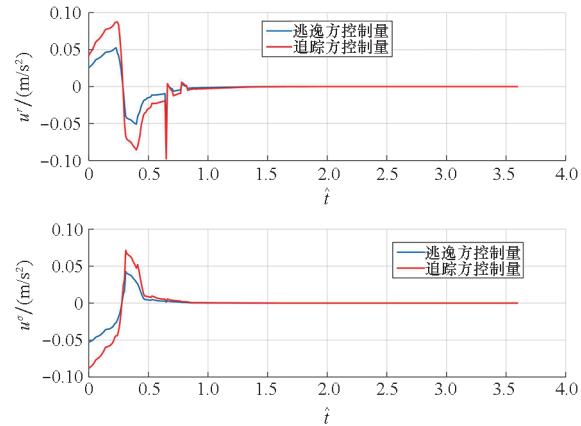
(b) Control function change

图 15 场景 5 博弈过程(推力构型 II)

Fig. 15 Gameplay process of scenario 5
(thrust configuration II)

(a) 状态变化

(a) State change



(b) 控制函数变化

(b) Control function change

图 16 场景 6 博弈过程(推力构型 II)

Fig. 16 Gameplay process of scenario 6
(thrust configuration II)

无法达成终端约束条件。构造出的控制函数以及状态变化情况也与推力构型 I 相差较大,但该推力构型下体现的博弈规律与推力构型 I 的分析结果类似。

3.4 博弈规则总结

仿真算例验证了方法的有效性。通过对两类推力构型下支付函数的演化过程进行分析,可以发现视线旋转角速度的方向对博弈过程没有影响,支付泛函极小值点一直向着 x_ω 负方向转移,且 $x_\sigma - x_\omega$ 平面内的分布受推力构型影响较大,主要体现在影响区域范围、等值线形状以及变化剧烈程度三个方面。

通过对 6 组博弈场景在不同推力构型下的结局、均衡轨迹以及控制函数进行分析,可以说明机动能力对博弈的影响,并且视线旋转坐标系下的博弈可以总结为两个步骤:①校准阶段,发生在博弈前期,逐步降低视线旋转的角速度,直到视线旋转角速度趋于 0 为止;②追赶阶段,降低 u^σ 输出,通过调整 u^τ 缩短相对距离直至在博弈结束时满足终端约束。

4 结论

本文针对近距离轨道追逃问题,提出了一种综合运用 Bellman 最优性原理、有限差分法和插值技术的闭环均衡构造、控制函数生成方法。主要研究结果如下:

1) 使用视线旋转坐标系下的降维动力学模型,实现追逃系统状态空间降维,降低了问题的复杂度。

2) 基于 Bellman 最优性原理构造 HJI PDE,描述均衡解受动力学驱动的演化过程。通过逆向分析,消除博弈场景初值约束,实现同时处理多组博弈场景。

3) 利用 Cartesian 网格离散状态空间,使用有限差分法构造 WENO-TVD 求解器计算 HJI PDE 终值问题,为博弈态势分析和共性规律总结提供支撑。

4) 建立控制与均衡梯度的关系,通过数值插值计算当前博弈态势下的均衡及其空间梯度,配合动力学模型使用数值方法外推均衡轨迹以及完整的闭环控制函数,实现非线性追逃问题闭环均衡求解。

需要指出的是,当前方法在以下方面存在限制:

1) 降维动力学的推导是基于追逃目标集不

包含 Ω_s 进行的,当目标集中包含 Ω_s 约束时,无法实现降维;

2) 该方法使用的是均匀 Cartesian 网格,目前只适用于规则区域;

3) 该方法需要划分网格,当面对高维动力学模型驱动的博弈问题时,维度的增加会导致网格点数呈指数级增加,即出现维数灾难。

未来将就方法局限性开展针对性研究:

1) 针对复杂目标集、高维状态空间、强非线性动力学模型以及多局中人博弈场景进行理论研究,建立相应的数学模型与处理流程,总结一般性博弈规律;

2) 为计算支付泛函长时间演化过程寻找稳定可靠的无网格方法,尝试与人工智能技术相结合,开发 HJI PDE 终值问题的智能计算方法;

3) 后续进一步细化模型,考虑存在继电器特性的控制量的输出,增补考虑执行机构特性的追逃问题求解。

参考文献(References)

- [1] 罗亚中, 李振瑜, 祝海. 航天器轨道追逃微分对策研究综述[J]. 中国科学(技术科学), 2020, 50(12): 1533–1545.
LUO Y Z, LI Z Y, ZHU H. Survey on spacecraft orbital pursuit-evasion differential games [J]. Scientia Sinica (Technologica), 2020, 50 (12): 1533 – 1545. (in Chinese)
- [2] 朱彦伟, 张乘铭, 杨傅云翔, 等. 航天器轨道追逃动力学与控制问题研究综述[J]. 国防科技大学学报, 2024, 46(3): 1–11.
ZHU Y W, ZHANG C M, YANG F Y X, et al. Survey on dynamics and control problem research in spacecraft orbital pursuit-evasion game [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2024, 46(3): 1–11. (in Chinese)
- [3] WISZNEWSKA-MATYSZKIEL A. Open and closed loop Nash equilibria in games with a continuum of players [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2014, 160(1): 280–301.
- [4] EHTAMO H, RAIPIO T. On applied nonlinear and bilevel programming or pursuit-evasion games [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 108 (1): 65 – 96.
- [5] LUKE S. Game theory applications in astrodynamics and space domain awareness [D]. Tuscaloosa: University of Alabama, 2021.
- [6] ZHANG C M, ZHU Y W, YANG L P, et al. Numerical solution for elliptical orbit pursuit-evasion game via deep neural networks and pseudospectral method [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 2023, 237(4): 796–808.
- [7] 祝海. 基于微分对策的航天器轨道追逃最优控制策略[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2017.
ZHU H. Optimal control of spacecraft orbital pursuit-evasion based on differential game [D]. Changsha: National

- University of Defense Technology, 2017. (in Chinese)
- [8] WOODBURY T D, HURTADO J E. Adaptive play via estimation in uncertain nonzero-sum orbital pursuit evasion games [C]//Proceedings of AIAA Space and Astronautics Forum and Exposition, 2017: 5247.
- [9] YE D, SHI M M, SUN Z W. Satellite proximate interception vector guidance based on differential games [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2018, 31(6): 1352–1361.
- [10] YE D, SHI M M, SUN Z W. Satellite proximate pursuit-evasion game with different thrust configurations [J]. Aerospace Science and Technology, 2020, 99: 105715.
- [11] PRINCE E R, HESS J A, COBB R G, et al. Elliptical orbit proximity operations differential games [J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2019, 42(7): 1458–1472.
- [12] HAFTER W T. Sensitivity methods applied to orbital pursuit-evasion[D]. College Station: Texas A&M University, 2014.
- [13] LI Z Y, ZHU H, YANG Z, et al. A dimension-reduction solution of free-time differential games for spacecraft pursuit-evasion[J]. Acta Astronautica, 2019, 163: 201–210.
- [14] JAGAT A, SINCLAIR A J. Optimization of spacecraft pursuit-evasion game trajectories in the Euler-Hill reference frame[C]// Proceedings of AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. AIAA, 2014: 4131.
- [15] JAGAT A, SINCLAIR A J. Nonlinear control for spacecraft pursuit-evasion game using the state-dependent riccati equation method [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2017, 53(6): 3032–3042.
- [16] STUPIK J M. Optimal pursuit/evasion spacecraft trajectories in the Hill reference frame [D]. Champaign: University of Illinois at Urbana-Champaign, 2013.
- [17] YANG F Y X, YANG L P, ZHU Y W, et al. A DNN based trajectory optimization method for intercepting non-cooperative maneuvering spacecraft [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2022, 33(2): 438–446.
- [18] 张乘铭, 朱彦伟, 杨乐平, 等. 航天器交会型轨道追逃策略的滚动时域优化[J]. 国防科技大学学报, 2024, 46(3): 21–29.
- ZHANG C M, ZHU Y W, YANG L P, et al. Receding horizon optimization for spacecraft pursuit-evasion strategy in rendezvous [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2024, 46(3): 21–29. (in Chinese)
- [19] BECKERS D, ELDREDGE J D. Planar potential flow on Cartesian grids [J]. Journal Fluid Mechanics, 2022, 941: A19.
- [20] STRIKWERDA J C. Finite difference schemes and partial differential equations [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- [21] AHMAT M, QIU J X. Direct WENO scheme for dispersion-type equations [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2023, 204: 216–229.
- [22] JIANG G S, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 126(1): 202–228.
- [23] JIANG Y Q, ZHOU S G, ZHANG X, et al. High-order weighted compact nonlinear scheme for one- and two-dimensional Hamilton-Jacobi equations [J]. Applied Numerical Mathematics, 2022, 171: 353–368.
- [24] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1988, 77(2): 439–471.