



国防科技大学学报

Journal of National University of Defense Technology

ISSN 1001-2486, CN 43-1067/T

《国防科技大学学报》网络首发论文

题目： 基于虚拟点的跨域变构飞行器再入覆盖区域快速生成
作者： 张远龙，肖国铮，谢愈，范锦秀，刘鸿福
收稿日期： 2025-11-13
网络首发日期： 2026-05-20
引用格式： 张远龙，肖国铮，谢愈，范锦秀，刘鸿福. 基于虚拟点的跨域变构飞行器再入覆盖区域快速生成[J/OL]. 国防科技大学学报.
<https://link.cnki.net/urlid/43.1067.t.20260519.1135.002>



网络首发：在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认：纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

doi: 10.11887/j.issn.1001-2486.25110023

基于虚拟点的跨域变构飞行器再入覆盖区域快速生成

张远龙*, 肖国铮, 谢愈, 范锦秀, 刘鸿福

(国防科技大学 智能科学学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 针对多维跨域变构飞行器多约束再入覆盖区域快速生成难题, 提出一种融合虚拟点逼近与分段高斯伪谱的快速求解方法。该方法首先通过虚拟点逼近策略, 将复杂的覆盖区边界求解问题分解为一系列指向虚拟目标点的最优轨迹生成问题, 有效降低了求解维度与计算复杂度。在此基础上, 采用分段高斯伪谱法将多约束最优控制问题转化为非线性规划问题, 高效求解可同时伸缩、变后掠的多维变构飞行器再入轨迹。同时, 利用虚拟点的分布规律生成高质量初始解, 显著提升了算法的收敛速度。仿真结果表明, 该方法有效提升了覆盖区域的生成效率与收敛性, 可为变构飞行器任务规划与性能评估提供高效分析工具。

关键词: 多维跨域变构飞行器; 覆盖区域; 虚拟点; 分段高斯伪谱法; 连续多维控制

中图分类号: V448.235 文献标志码: A

Rapid generation of reentry landing footprint for cross-domain morphing vehicle based on virtual points

ZHANG Yuanlong*, XIAO Guozheng, XIE Yu, FAN Jinxiu, LIU Hongfu

(College of Intelligence Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: To address the challenge of rapidly generating the multi-constrained reentry landing footprint for multi-dimensional trans-atmospheric morphing vehicles, a rapid generation method was proposed by integrating virtual point approximation with an hp-adaptive Gauss pseudospectral method. The method first decomposed the complex problem of footprint boundary determination into a series of optimal trajectory generation subproblems targeting virtual points, which effectively reduced the solution's dimensionality and computational complexity. Subsequently, a segmented Gauss pseudospectral method was employed to transcribe each multi-constrained optimal control problem into a nonlinear programming problem, efficiently solving for reentry trajectories of vehicles with simultaneous span-extension and sweep-angle morphing capabilities. Furthermore, high-quality initial guesses were generated by leveraging the distribution of these virtual points, which significantly enhanced the algorithm's convergence speed. Simulation results demonstrate that the proposed method significantly improves both the generation efficiency and convergence for the reachable footprint, providing an efficient analysis tool for the mission planning and performance evaluation of morphing vehicles.

Keywords: multi-dimensional trans-atmospheric morphing vehicle; landing footprint; virtual point; segmented Gauss pseudospectral method; continuous multi-dimensional control

跨域变构飞行器是一种可根据任务需要和环境特点, 自适应主动改变气动布局塑造最佳机动能力, 从而在大范围空域内实现高效飞行的新型高超声速再入飞行器^[1-3]。相较于传统构型飞行器, 跨域变构飞行器由于需要实时根据飞行器自身状态和任务需求, 研判最佳机动能力构型, 因此快速评估再入机动能力的需求更为迫切。机动能力评估^[4]是再入飞行器弹道规划与实时制导的

关键基础, 其核心目标是通过飞行器当前状态快速求解满足多约束条件的终端覆盖区域。覆盖区域一般指表征飞行器在给定过载、热流、动压等过程约束, 初终端位置与速度等状态以及攻角、倾侧角与变形参数等控制量约束下的最大可达范围^[5], 直接决定任务规划的可行性。然而, 由于变构直接与气动力和控制量攻角和倾侧角紧耦合, 进而通过强非线性运动模型影响飞行器的运动状

收稿日期: 2025-11-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (92271108, 62173336)

*第一作者: 张远龙 (1989—), 男, 贵州都匀人, 副教授, 硕士生导师, E-mail: zhangyl_0728@163.com

引用格式: 张远龙, 肖国铮, 谢愈, 等. 基于虚拟点的跨域变构飞行器再入覆盖区域快速生成[J]. 国防科技大学学报, Citation: Zhang Yuanlong, Xiao Guozheng, Xie Yu, et al. Rapid generation of reentry landing footprint for cross-domain morphing vehicle based on virtual points[J]. Journal of National University of Defense Technology,

态量^[6]。因此,为了尽可能获得可表征跨域变构飞行器再入机动能力的覆盖区域^[7,8],传统定构型的求解方法,特别是攻角方案事先给定的方法无法直接适用,亟须研究兼顾效率与精度的创新性求解框架。

当前,国内外已有许多学者针对再入覆盖区域计算问题开展了深入研究,如 Mease^[9]等人基于 EAGLE 加速度轨迹规划器,结合再入走廊边界生成了满足多种约束条件下的再入覆盖区域,但这类基于经典再入走廊边界的方法需要事先规划参考攻角剖面。本质上,这类方法计算得到的覆盖区域是对当前参考攻角剖面的机动能力表达,一旦改变参考攻角剖面,对应的覆盖区域也相应调整^[5,10]。为此,Zhang^[6]等放开参考攻角剖面约束,提出了一种基于侧向优先的三维剖面覆盖区域求解方法,通过求解多组不同侧向机动策略对应的弹道落点集合获得了滑翔飞行器的再入覆盖区边界。相较于传统参考攻角方案的再入覆盖区边界,基于侧向优先的再入覆盖区边界最高可扩大约 30%,从而为执行包括航路点禁飞区约束在内的复杂严苛任务提供了理论支持。但是,这种方法求解效率低下,需要进行大量数值仿真计算才能得到较为准确结果。为了破解这一难题,Zhang^[11]等人基于阻力加速度-能量(drag acceleration-energy, D-E)曲线的几何预测方法虽能解析横向运动参数,但其边界计算依赖经验假设,难以保证理论完备性;LU^[12]等先是将覆盖区边界生成问题转换为寻求一系列虚拟目标点逼近问题,然后再利用准平衡滑翔条件和极大值与原理研究了包括逼近虚拟点在内的轨迹生成问题的闭式解析最优解,从而大大降低了覆盖区域的求解计算量。但是,为了获得轨迹控制的倾侧角闭式最优解析解,仍需事先规划参考攻角剖面,因此仍未能充分表征再入飞行器,特别是跨域变构飞行器的再入覆盖区域。为了更加全面评估再入飞行器的机动能力,还有一些学者,如李兆亭等^[13],先将覆盖区边界生成问题转化为求解一系列给定纵程下的横程最大问题后,再利用高斯伪谱法、粒子群等优化算法^[14,15]进行求解^[4,5,10]。此外,现有研究多聚焦于固定构型飞行器,采用“方案攻角剖面+倾侧角调整”的简化控制策略,未考虑跨域变构飞行器中攻角、倾侧角与后掠角/伸缩比等多自由度的协同优化需求。传统穷举式数值积分或单自由度优化方法因计算耗时过高无法满足在线任务需求,而现有高效算法(如约束松弛或几何简化)在变构飞行器的高维非线性优化场景下易陷入局

部最优或理论缺陷,难以平衡实时性与精度。

为解决上述问题,论文提出一种融合多维协同控制建模、分段高斯伪谱法求解与虚拟点加速策略的一体化框架。首先,构建包含变后掠角、伸缩比等多自由度参数的动力学模型,将过程约束映射为三维飞行走廊边界,建立攻角、倾侧角与变形量协同优化的轨迹规划问题;其次,设计基于 Legendre 多项式离散的分段高斯伪谱法,通过动态解耦与约束统一转换,将强非线性优化问题转化为稀疏非线性规划(sparse nonlinear optimizer, SNOPT)可高效求解的形式,显著降低计算复杂度;进一步地,提出虚拟参考点加速策略,利用相邻轨迹状态相似性设计初值预测与迭代终止机制,在确保覆盖区域全局极值性的前提下减少 50%以上迭代次数。

1 跨域变构飞行器再入覆盖区域生成问题建模

跨域变构飞行器再入覆盖区域是在满足驻点热流密度、动压及过载等过程约束,控制量攻角、倾侧角幅值约束及自适应主动变构条件下,且满足初终端约束要求的所有可行弹道落点的集合。因此,要想求解覆盖区域,如何快速获得满足上述约束条件下的再入轨迹,尤其是最外侧再入轨迹是首要关键。显然,这是一个优化问题。在进行优化问题求解之前,需首先构建轨迹优化问题求解模型。

根据问题分析,可构建如式(1)所示的一般优化问题求解模型

$$\begin{aligned} \min \quad & J = \Phi(\mathbf{x}_f, t_f, \mathbf{x}_f^*) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \leq 0, i = 1, 2, \dots \\ h_j(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{x}_f, t_f) = 0, j = 1, 2, \dots \\ \mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\max} \\ \mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{\max} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

其中, \mathbf{x}, \mathbf{u} 分别表示再入飞行器的运动状态和控制量,具体 $\mathbf{x} = [r, V, \theta, \sigma, \lambda, \phi]^T$ 分别表示飞行器质心到地心距离、速度、速度倾角、速度方位角、经度及纬度,而控制量 $\mathbf{u} = [\alpha, \nu, \eta, \delta]^T$ 则分别为攻角、倾侧角、伸缩比系数及后掠角; t 为飞行时间,下标 $(\cdot)_0$ 和 $(\cdot)_f$ 分别表示初始和终端时刻对应的状态和控制量,上标 $(\cdot)^*$ 为对应的期望终端状态; \mathbf{x}_{\min} 和 \mathbf{x}_{\max} 分别表示运动状态量的最小和最大容许值,而 \mathbf{u}_{\min} 和 \mathbf{u}_{\max} 为控制量的最小和最大容许值。性能指标函数 J 为

$$\Phi(\mathbf{x}_f, t_f, \mathbf{x}_f^*) = \omega_1 \|\lambda_f - \lambda_f^*\| + \omega_2 \|\phi_f - \phi_f^*\| \quad (2)$$

式中 ω_1, ω_2 为权重系数, λ_f, ϕ_f 分别为终端经度和纬度, λ_f^*, ϕ_f^* 为期望的终端经度和纬度; $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 为飞行器三自由度质心运动模型方程, 具体形式为

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = V \sin \theta \\ \frac{d\lambda}{dt} = \frac{V \cos \theta \sin \sigma}{r \cos \phi} \\ \frac{d\phi}{dt} = \frac{V \cos \theta \cos \sigma}{r} \\ \frac{dV}{dt} = -D^* - g \sin \theta + \omega_e^2 r (\cos^2 \phi \sin \theta - \cos \phi \sin \phi \cos \sigma \cos \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{L^* \cos \nu}{V} - \left(g - \frac{V^2}{r} \right) \frac{\cos \theta}{V} + 2\omega_e \sin \sigma \cos \phi \\ \quad + \frac{\omega_e^2 r}{V} (\cos \phi \sin \phi \cos \sigma \sin \theta + \cos^2 \phi \cos \theta) \\ \frac{d\sigma}{dt} = \frac{V}{r} \cos \theta \tan \phi \sin \sigma + 2\omega_e (\sin \phi - \cos \phi \tan \theta \cos \sigma) \\ \quad + \frac{\omega_e^2 r \sin \phi \cos \phi \sin \sigma}{V \cos \theta} + \frac{L^* \sin \nu}{V \cos \theta} \end{cases} \quad (3)$$

其中, ω_e 为地球自转角速度, t 为时间变量, g 为地球引力加速度; 与传统固定构型飞行器相区分, 变构飞行器的升力和阻力加速度分别采用 L^* 和 D^* 表示, 具体形式为

$$\begin{cases} L^* = \frac{C_L^* S_{\text{ref}} \rho V^2}{2M} \\ D^* = \frac{C_D^* S_{\text{ref}} \rho V^2}{2M} \end{cases} \quad (4)$$

其中, M 为飞行器质量, S_{ref} 为飞行器气动参考面积, ρ 为大气密度, C_L^*, C_D^* 分别为变构飞行器的气动升力和阻力系数。与传统再入飞行器相区别, 跨域变构再入飞行器可同时进行伸缩翼和后掠角变化, 因此, 其 C_L^*, C_D^* 不仅与攻角 α 、马赫数 Ma 相关, 还与变形控制量的伸缩比系数 η 和后掠角 δ 相关。

式(1)中, $g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 表示再入轨迹规划过程中需要考虑的最大过载、动压、驻点热流等不等式约束条件。其中, 过程约束的具体形式分别为

$$\begin{cases} K_h \rho^n V^m \leq \dot{Q}_{\text{max}} \\ 0.5 \rho V^2 \leq q_{\text{max}} \\ \sqrt{L^2 + D^2} \leq g_0 n_{\text{max}} \end{cases} \quad (5)$$

其中, \dot{Q}_{max} 、 q_{max} 及 n_{max} 分别表示飞行器允许的最大驻点热流密度、最大动压及最大总过载; K_h , m 以及 n 均为热流密度公式常数。根据经验, 取 $m=3.15$, $n=0.5$, 而 K_h 的大小则与飞行环境和飞行器的驻点端头半径有关。

式(1)中的等式约束 $h_j(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{x}_f, t_f)$ 主要为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ h(t_f) = h_f \\ V(t_f) = V_f \end{cases} \quad (6)$$

为了方便后续优化求解, 分别用 V_c, R_c, T_c 及 g_0 对上述轨迹优化问题进行无量纲化, 其中 g_0 为地球海平面处引力加速度, R_c 为均质圆球地球平均半径, V_c 和 T_c 的计算公式为

$$\begin{cases} V_c = \sqrt{g_0 R_c} \\ T_c = \sqrt{R_c / g_0} \end{cases} \quad (7)$$

控制约束则主要包括

$$\begin{cases} \alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}], \nu \in [\nu_{\min}, \nu_{\max}] \\ \eta \in [\eta_{\min}, \eta_{\max}], \delta \in [0, 1] \end{cases} \quad (8)$$

至此, 完成了跨域变构飞行器再入轨迹优化问题模型的构建。通过求解式(1)所示模型, 即可获得满足约束条件, 且使性能指标 J 达到最优的跨域变构飞行器再入轨迹。

2 跨域变构飞行器再入覆盖区域快速生成算法

覆盖区域快速生成的关键在于如何快速获得满足给定约束条件下的最外侧弹道落点边界。为此, 该部分首先提出一种基于虚拟点的覆盖区边界生成策略, 将考虑动压、过载等过程约束、运动微分约束及控制约束及初终端状态等多约束复杂条件下连续多维控制的再入覆盖区域生成问题转换为对虚拟点序列逼近的轨迹优化问题; 然后, 针对给定虚拟点的再入轨迹优化问题, 设计了一种基于分段高斯伪谱的轨迹优化算法进行求解; 最后, 为了加速覆盖区边界生成, 提出了一种基于初值改善的加速迭代策略。下面将分别进行展开介绍。

2.1 基于虚拟点的再入覆盖区边界生成策略

如图1所示, 基于虚拟点的再入覆盖区边界生成策略的核心思想是, 通过设置一系列虚拟点, 然后结合式(1)构建的轨迹优化问题模型, 利用分段高斯伪谱法求解出逼近虚拟点序列的实际弹道落点, 进而获得滑翔飞行器再入覆盖区域边界范围。

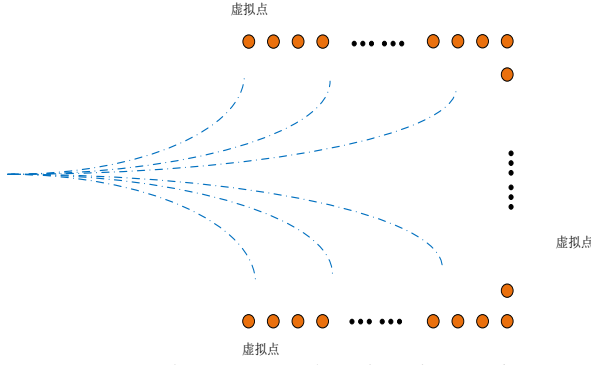


图 1 基于虚拟点的覆盖区边界生成示意图
Fig. 1 Schematic diagram of landing footprint boundary generation based on virtual points

分析表明，虚拟点的选取对覆盖区边界生成的收敛性与准确性具有显著影响。覆盖区边界本质上是飞行器机动能力极限的定量表征。因此，虚拟点的设置原则应当满足两个条件：一是必须位于飞行器理论能力范围之外，以确保边界的包容性；二是距离边界不宜过远，以防止轨迹优化求解陷入局部最优。

基于逼近策略，当虚拟点设置在飞行器能力边界之外时，通过优化算法求解出的“最接近虚拟点”的轨迹落点，即代表了该状态下的能力极限。这些极限落点的集合构成了最终的覆盖区边界。尽管传统定构型飞行器的再入覆盖区通常近似呈椭圆形^[12]，但确切边界受初始状态和气动构型影响，难以预先精确获知。所幸，本文提出的逼近策略对虚拟点分布的几何精度要求并不严苛，无需预知精确边界，仅需虚拟点构成的拓扑形状与待求边界保持一定程度的近似即可。

为了提升方法的泛化能力与适应性，将虚拟点设置为如图 1 所示的左侧半开矩形构型。采用该策略，仅需对飞行器的最大横程和最大纵程进行粗略估算，即可快速生成相应的虚拟点序列，从而有效引导优化过程。

综上所述，基于虚拟点逼近的跨域变构飞行器再入覆盖区边界生成策略流程如图 2 所示。

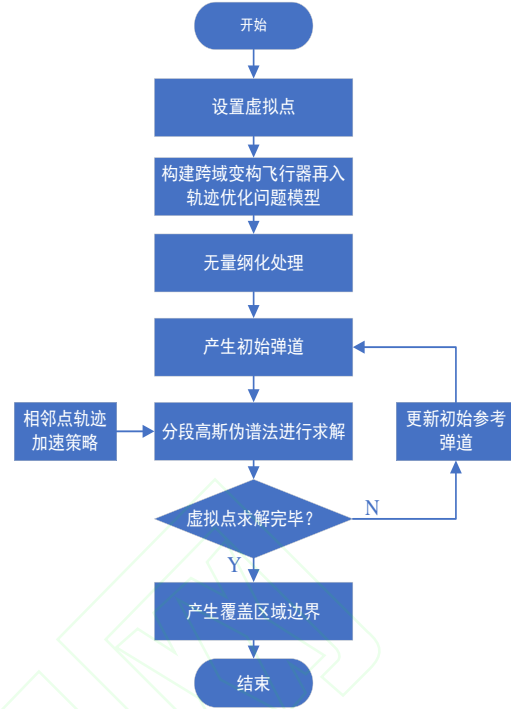


图 2 基于虚拟点的再入覆盖区域求解流程
Fig. 2 Solution process of reentry landing footprint based on virtual points

2.2 基于分段高斯伪谱的再入轨迹优化生成

为了采用分段高斯伪谱法进行求解，首先，将构建的轨迹优化问题模型(1)转换为多段形式进行描述。设待优化弹道分段数为 P ，令 $(\cdot)^{(p)}$ 表示第 p 段弹道对应参数， $p \in [1, \dots, P]$ 。多段最优控制问题可以描述为：寻找控制变量 $\mathbf{u}^{(p)}(t) \in \mathbb{R}^{m_u^{(p)}}$ ($m_u^{(p)}$ 为第 p 段控制量维数)，最小化具有一般性的 Bolza 型综合性能指标 J

$$J = \sum_{p=1}^P \left[\Phi^{(p)}(\mathbf{x}^{(p)}(t_0), t_0^{(p)}, \mathbf{x}^{(p)}(t_f), t_f^{(p)}; \mathbf{q}^{(p)}) \right] \quad (9)$$

且同时满足动态系统微分方程约束

$$\dot{\mathbf{x}}^{(p)}(t) = \mathbf{f}^{(p)}(\mathbf{x}^{(p)}(t), \mathbf{u}^{(p)}(t), t; \mathbf{q}^{(p)}), \quad t \in [t_0^{(p)}, t_f^{(p)}] \quad (10)$$

边界条件

$$\phi_{\min}^{(p)} \leq \phi^{(p)}(\mathbf{x}^{(p)}(t_0), t_0^{(p)}, \mathbf{x}^{(p)}(t_f), t_f^{(p)}; \mathbf{q}^{(p)}) \leq \phi_{\max}^{(p)} \quad (11)$$

以及其他不等式约束（等式约束亦可等价转换为两个不等式约束）

$$\mathbf{C}_{\min}^{(p)} \leq \mathbf{C}^{(p)}(\mathbf{x}^{(p)}(t), \mathbf{u}^{(p)}(t), t; \mathbf{q}^{(p)}) \leq \mathbf{C}_{\max}^{(p)} \quad (12)$$

式 (9)-(12) 中，状态变量 $\mathbf{x}^{(p)}(t) \in \mathbb{R}^{m_x^{(p)}}$ ， $\mathbf{u}^{(p)}(t) \in \mathbb{R}^{m_u^{(p)}}$ 为控制量， $\mathbf{q}^{(p)} \in \mathbb{R}^{m_q^{(p)}}$ 为常数， $m_x^{(p)}$ 、 $m_q^{(p)}$ 及 $m_u^{(p)}$ 分别为第 p 段对应状态量 $\mathbf{x}^{(p)}$ 、常数 $\mathbf{q}^{(p)}$ 及控制量 $\mathbf{u}^{(p)}$ 的维数； t 表示时间变量， $t_0^{(p)}$ 、 $t_f^{(p)}$ 分别为第 p 段弹道对应的初始时间和终端时间； $\phi_{\min}^{(p)}$ 和 $\phi_{\max}^{(p)}$ 分别为第 p 段对应边界条件的最小

值和最大值，当两者取值相等时即表示此时为等式约束，如初始条件； $\mathbf{C}^{(p)}$ 为第 p 段对应的等式或不等式约束函数， $\mathbf{C}_{\min}^{(p)}$ 和 $\mathbf{C}_{\max}^{(p)}$ 为对应的等式或不等式约束最小值和最大值。此外，与一般最优控制问题，多段最优控制问题各分段之间还需满足连接条件，以确保段与段之间保持较好的连续性，即对于第 s 个连接点处，其左右两个分段应满足

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{\min}^{(s)} \leq \mathbf{L}^{(s)}(\mathbf{x}^{(p_i^s)}(t_f), t_f^{(p_i^s)}; \mathbf{q}^{(p_i^s)}, \mathbf{x}^{(p_r^s)}(t_0), t_0^{(p_r^s)}; \mathbf{q}^{(p_r^s)}) \\ \mathbf{L}_{\max}^{(s)} \geq \mathbf{L}^{(s)}(\mathbf{x}^{(p_i^s)}(t_f), t_f^{(p_i^s)}; \mathbf{q}^{(p_i^s)}, \mathbf{x}^{(p_r^s)}(t_0), t_0^{(p_r^s)}; \mathbf{q}^{(p_r^s)}) \\ s = 1, \dots, L \end{cases} \quad (13)$$

式中， $\mathbf{L}^{(s)}$ 为连接约束函数， $\mathbf{L}_{\min}^{(s)}$ 和 $\mathbf{L}_{\max}^{(s)}$ 为连接约束的下限和上限， L 为需满足连接条件的连接点数； p_i^s 和 p_r^s 分别表示连接点处相邻前后两段弹道序号， $p_i^s, p_r^s \in [1, \dots, P]$ 。

然后，针对上述多段最优控制问题，采用分段高斯伪谱法 (segmented gauss pseudospectral method, SGPM) 进行离散化处理，从而将弹道优化问题参数化并转换为非线性规划问题进行求解。分别对每段弹道配置合适数量的离散点，并将状态变量和控制变量在配点处离散化，且各段弹道之间满足段间连接条件，以确保状态量和控制量的连续性。在将整个弹道分段离散化后，再以所有离散点的状态变量和控制变量作为优化参数同时进行优化设计，最终通过插值获得对应的最优控制及最优弹道。具体步骤如下：

Step1: 自变量取值范围的转换

由于高斯伪谱法是在 $[-1, 1]$ 上进行优化，因此需将每一个分段的自变量 t 从对应各段的 $[t_0, t_f]$ 转换到 $[-1, 1]$ 上，即令 τ 满足

$$t^{(p)} = \tau^{(p)} \frac{t_f^{(p)} - t_0^{(p)}}{2} + \frac{t_f^{(p)} + t_0^{(p)}}{2} \quad (14)$$

Step2: 求解 Gauss-Legendre 配点

设第 p 段弹道上的配点数 (不含两端点) 为 $N^{(p)}$ ，令 $\kappa = (\tau_1, \dots, \tau_{N^{(p)}})$ 为配点，它为如下 $N^{(p)}$ 阶 Legendre 多项式的根

$$\begin{aligned} P_{N^{(p)}}(\tau) &= \frac{1}{2^{N^{(p)}} N^{(p)}! d\tau^{N^{(p)}}} \left[(\tau^2 - 1)^{N^{(p)}} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N^{(p)}}{2} \rfloor} \frac{(-1)^n (2N^{(p)} - 2n)!}{2^{N^{(p)}} n!(N^{(p)} - n)!(N^{(p)} - 2n)!} \tau^{N^{(p)} - 2n}, \quad (15) \end{aligned}$$

$$N^{(p)} = 1, 2, \dots$$

显然 $\tau_k \in (-1, 1)$ ，其中 $k = 1, \dots, N^{(p)}$ 。另外令 $\tau_0 = -1$ ， $\tau_{N^{(p)}+1} = 1$ ，并将其和 κ 一起构成第 p 段弹道的离散点，即后续优化求解的配点。

Step3: 离散化

分别将运动模型微分方程、过程约束及初终端条件等不等式和等式约束在各分段配点处进行离散化处理。以区间 $[-1, 1]$ 上的 $N^{(p)} + 1$ 个离散点为插值点，以 $N^{(p)} + 1$ 阶 Lagrange 插值多项式 $L_i^{(p)}(\tau)$ ($i = 0, \dots, N^{(p)}$) 为基函数近似状态变量，得

$$\mathbf{x}^{(p)}(\tau) \approx \mathbf{X}^{(p)}(\tau) = \sum_{i=0}^{N^{(p)}} L_i^{(p)}(\tau) \mathbf{x}^{(p)}(\tau_i) \quad (16)$$

式中，

$$L_i^{(p)}(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^{N^{(p)}} \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (17)$$

同理，控制变量可被近似为

$$\mathbf{u}^{(p)}(\tau) \approx \mathbf{U}^{(p)}(\tau) = \sum_{i=1}^{N^{(p)}} L_i^{(p)}(\tau) \mathbf{u}^{(p)}(\tau_i) \quad (18)$$

为了后文描述方便，将第 p 段弹道配点 τ_k 处的状态量 $\mathbf{X}^{(p)}(\tau_k)$ 记为 $\mathbf{X}_k^{(p)} \in \mathbb{R}^{m_x^{(p)}}$ ，控制量 $\mathbf{U}^{(p)}(\tau_k)$ 记为 $\mathbf{U}_k^{(p)} \in \mathbb{R}^{m_u^{(p)}}$ ，并用 $\mathbf{X}_0^{(p)}$ 和 $\mathbf{X}_f^{(p)}$ 分别表示起始和终端状态。因此，对运动模型微分约束(3)左侧的求导项，同样可通过 Lagrange 插值多项式求导来近似，即

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau_k) \approx \dot{\mathbf{X}}_k^{(p)} = \sum_{i=0}^{N^{(p)}} \dot{L}_i^{(p)}(\tau_k) \mathbf{X}_i^{(p)} \quad (19)$$

其中， $\dot{L}_i^{(p)}(\tau_k)$ 的表达式为

$$\dot{L}_i^{(p)}(\tau_k) = \sum_{l=0, l \neq i}^{N^{(p)}} \frac{\prod_{j=0, j \neq i, l}^{N^{(p)}} (\tau_k - \tau_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^{N^{(p)}} (\tau_i - \tau_j)} \quad (20)$$

因此，为满足式(3)所示的运动模型微分方程约束，状态变量和控制变量在各配点处应满足代数约束方程

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{N^{(p)}} \dot{L}_i^{(p)}(\tau_k) \mathbf{X}_i^{(p)} \\ &- \frac{t_f^{(p)} - t_0^{(p)}}{2} \mathbf{f}^{(p)}(\mathbf{X}_k^{(p)}, \mathbf{U}_k^{(p)}, \tau_k; \mathbf{q}^{(p)}, t_0^{(p)}, t_f^{(p)}) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

由于每段弹道的终点与下一段弹道的起点重合，因此，各段中配点处自然满足运动微分方程约束。但最后一段弹道 (第 P 段弹道) 的终点不在所选的配点上，没有被式(21)施加微分方程约束。根据运动系统微分方程，有

$$\mathbf{x}(t_f^{(P)}) = \mathbf{x}(t_0^{(P)}) + \int_{t_0^{(P)}}^{t_f^{(P)}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (22)$$

因此，可将第 P 段弹道终点状态约束条件离散并用 Gauss 积分来近似，即

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}_f^{(P)} = \\ &\mathbf{X}_0^{(P)} + \frac{t_f^{(P)} - t_0^{(P)}}{2} \sum_{k=1}^{N^{(P)}} \omega_k \mathbf{f}^{(P)}(\mathbf{X}_k^{(P)}, \mathbf{U}_k^{(P)}, \tau_k, t_0^{(P)}, t_f^{(P)}) \end{aligned} \quad (23)$$

其中, $\omega_k = \frac{2}{(1-\tau_k^2)[\dot{P}_{N^{(p)}}(\tau_k)]^2}$ 为 Gauss 求积系数, 而 $P_{N^{(p)}}$ 由式(15)决定。同理, 进一步对多段最优控制问题的其他约束进行离散化处理后, 其边界条件可表示为

$$\phi_{\min}^{(p)} \leq \phi^{(p)}(\mathbf{X}_0^{(p)}, t_0^{(p)}, \mathbf{X}_f^{(p)}, t_f^{(p)}) \leq \phi_{\max}^{(p)} \quad (24)$$

等式和不等式约束可表示为

$$\mathbf{C}_{\min}^{(p)} \leq \mathbf{C}^{(p)}(\mathbf{X}_k^{(p)}, \mathbf{U}_k^{(p)}, \tau_k; t_0^{(p)}, t_f^{(p)}) \leq \mathbf{C}_{\max}^{(p)} \quad (25)$$

而连接条件可表示为

$$\mathbf{L}_{\min}^{(s)} \leq \mathbf{L}^{(s)}(\mathbf{X}_f^{(p_i)}, t_f^{(p_i)}; \mathbf{q}^{(p_i)}, \mathbf{X}_0^{(p_r)}, t_0^{(p_r)}; \mathbf{q}^{(p_r)}) \leq \mathbf{L}_{\max}^{(s)}, (s=1, \dots, L) \quad (26)$$

式中, L 为连接点数; p_i^s 和 p_r^s 分别表示相邻前后两段弹道序号, $p_i^s, p_r^s \in [1, \dots, P]$ 。对于 Bolza 型综合性能指标函数式, 同样可离散化描述为

$$J = \sum_{p=1}^P [\Phi^{(p)}(\mathbf{X}_0^{(p)}, t_0^{(p)}, \mathbf{X}_f^{(p)}, t_f^{(p)}; \mathbf{q}^{(p)})] \quad (27)$$

Step4: 求解离散多段非线性规划问题

目前, 有许多求解非线性规划问题的软件包, 其中, 由 Gill 等开发的适应于求解大规模非线性规划问题的 SNOPT 软件包以其优异的性能得到了广泛的应用。值得说明的是, 上述分段优化方法表面上看似是一个串行优化问题, 因为分段后, 前面一段弹道的终端条件即后面段弹道的初始条件。但实际情况是, 转化为非线性规划方法进行求解时, 是对全程飞行弹道对应的所有离散点同时进行优化计算, 而不是确定前一段弹道后再依次确定后面段弹道, 因此, 分段优化实际上是一个并行优化问题, 能够保证各段最优弹道的综合解即为全程弹道的最优解。

值得注意的是, 分段高斯伪谱法给出的结果仅是其对所有在配点处离散化后的运动状态量和控制量进行约束, 而相邻配点间运动状态和控制量则采用插值方法得到, 故配点间的状态值不一定严格满足给定的约束要求。为了确保优化得到轨迹的有效性和可行性, 还应结合数值积分开展动力学仿真验证。

2.3 基于相邻点轨迹近似的覆盖区边界加速生成策略

由图 2 知, 覆盖区边界的生成需要依靠伪谱法求解逼近所有虚拟点的轨迹落点; 同时, 为了确保伪谱法能够快速生成满足约束和任务需求的轨迹, 在每次利用分段高斯伪谱法进行优化求解前都需要分别给出一个参考轨迹。尽管高斯伪谱法是在整个取值空间对所有可行的状态和控制量进行优化求解, 但是参考轨迹的选取对优化求解的收敛性影响较大, 即若采用同一个参考轨迹进行求解将存在个别解收敛快而其他解收敛相对较

慢, 甚至难以收敛的情况^[16]。基于轨迹在解空间中的连续性, 相邻虚拟点对应的最优轨迹通常具有高度相似性, 且虚拟点分布越密集, 这种相似性越显著。利用这一特性, 在求解当前虚拟点的逼近轨迹时, 可直接采用前一个虚拟点的优化结果作为初值。这种“热启动”策略能够显著减少优化迭代次数, 大幅提升求解效率。

基于此策略, 整个覆盖区边界生成问题可简化为首个虚拟点的定位及其参考轨迹的生成问题。首先, 针对首个虚拟点的位置选取: 若过于靠近最大纵程点, 可能导致生成的边界包络不完整; 若过于靠近起始点甚至位于其左侧, 则可能导致问题无解。为在完整性与可行性之间取得平衡并减少迭代试错, 建议在换极赤道坐标系下, 选取最小纵程点经度与起点经度的中间值作为首个虚拟点的经度参考。

其次, 针对首个虚拟点的参考轨迹生成: 根据飞行器再入动力学特性, 当倾侧角保持较大常值时, 其轨迹近似于特定纵程下的最大横程机动。因此, 结合图 1, 在确定首个虚拟点位置后, 可采用大常值倾侧角策略快速生成初始参考轨迹。

最后, 虚拟点间隔(步长)的设置是影响整体效率的关键因素。间隔过小虽然能提高相邻轨迹的相似度, 增强初值的有效性, 但会导致待求解的优化问题总数激增, 增加计算负担; 反之, 间隔过大虽然减少了求解次数, 却削弱了前序轨迹作为初值的加速效果, 甚至可能导致优化不收敛。因此, 为了实现效率最优, 虚拟点间隔的选取需综合权衡开口矩形边界的经纬度跨度及总数据点规模, 以在计算精度与速度之间找到最佳平衡点。

3 仿真实验

为了分析跨域变构飞行器再入时覆盖区域与变形的映射变化关系, 采用如图 3 所示的对象进行仿真研究。其中, 仿真模型可根据飞行过程中任务需要变换伸缩翼和后掠翼实现气动力的调整。为了专注分析再入阶段变构过程对机动能力的影响, 设置飞行器再入起点状态参数: 高度 80 km、速度 6500 m/s、航向角 60°、速度倾角和经纬度均为 0°; 滑翔终端高度和速度分别为 31.0 km, 2500 m/s, 虚拟点经纬度坐标为 (80°, 55°), 再入过程的峰值驻点热流密度、最大动压以及最大过载分别为 2200 Kw/m², 80 Kpa, 以及 3g; 同时, 再入飞行时不考虑变构过程中相关力热变化的影响。控制量取值范围 $\alpha \in [5^\circ, 20^\circ]$, $\nu \in [-85^\circ, 85^\circ]$; 仿真权重参数取 $w_1=1$ 和 $w_2=10$ 。结合前述算法, 在进行变构飞行器再入覆盖区域仿真前, 先验证基于虚拟点的变构飞行器轨迹生成策略。下面将分别进行展开讨论。

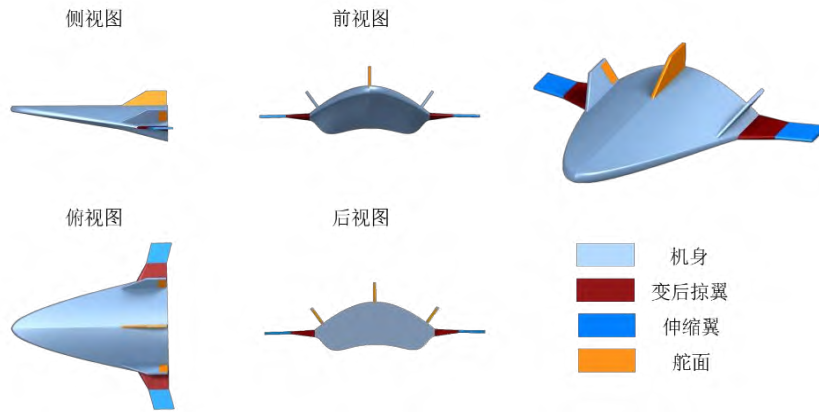


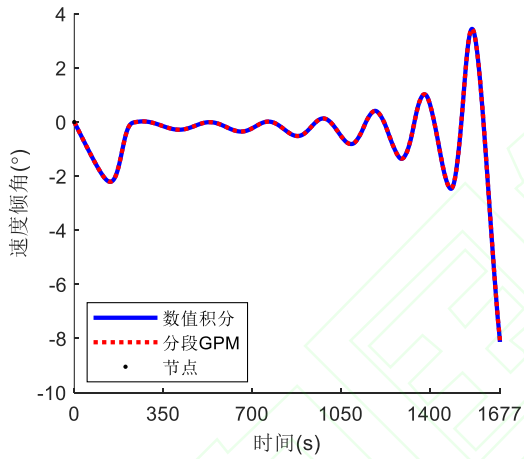
图3 跨域变构飞行器

Fig. 3 Cross-domain morphing vehicle

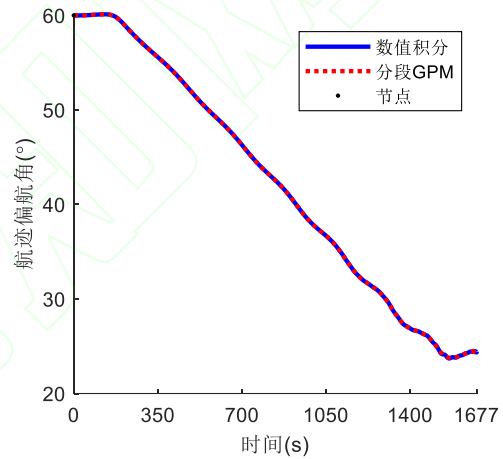
3.1 基于虚拟点的再入轨迹优化生成仿真

利用分段高斯伪谱法, 结合设置的仿真条件,

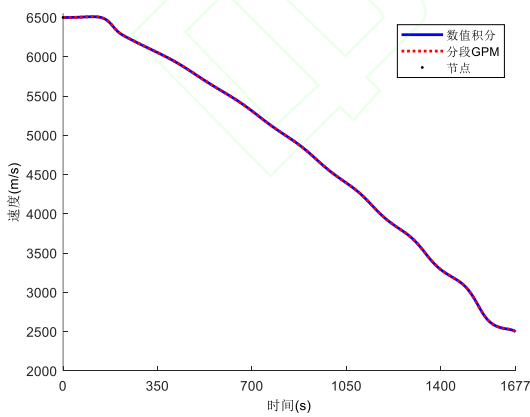
得到的结果如图4所示。相较于传统定构型的高超声速再入飞行器, 跨域变构飞行器可通过主动变构, 调整后掠角和伸缩翼以获得最佳气动外形, 从而实现能力最优。



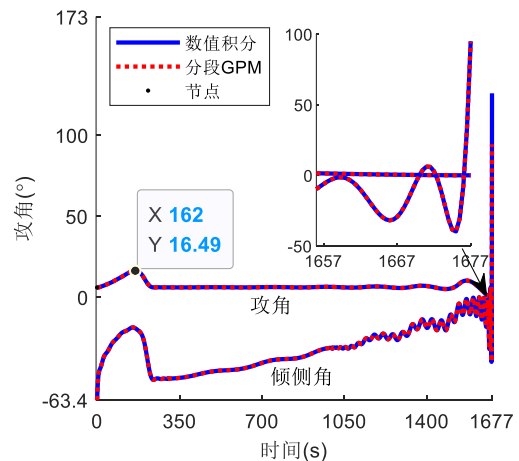
(a) 速度倾角-时间曲线



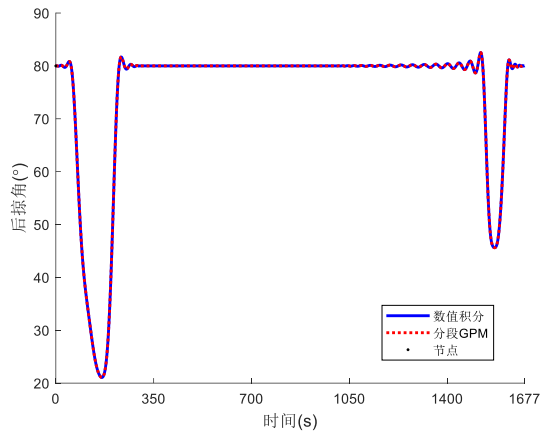
(b) 航迹偏航角-时间曲线



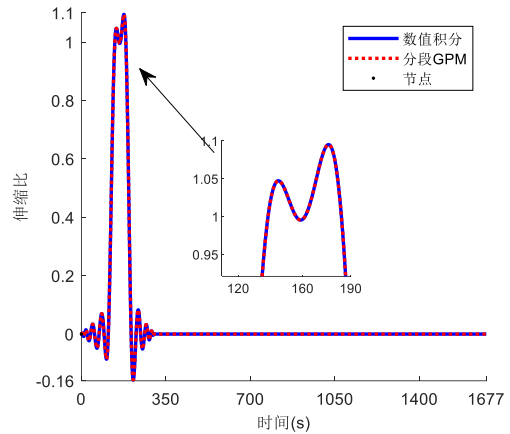
(c) 速度-时间变化曲线



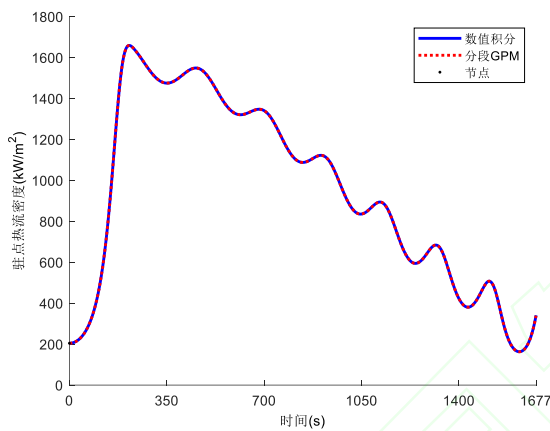
(d) 控制量-时间变化曲线



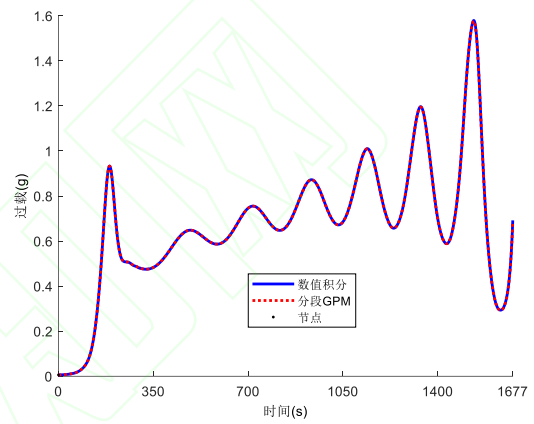
(e) 后掠角-时间变化曲线



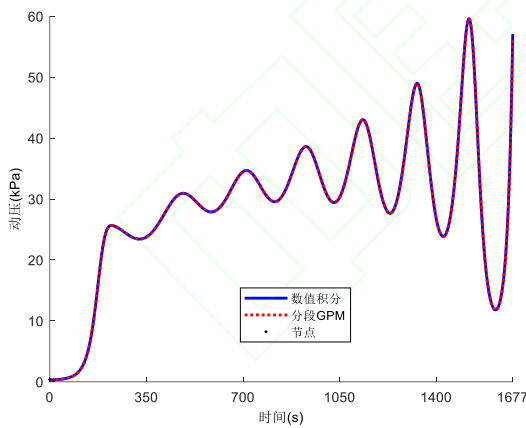
(f) 伸缩比-时间变化曲线



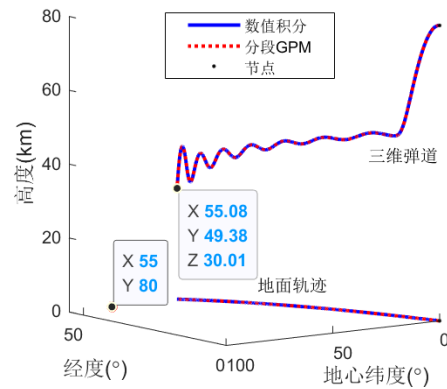
(g) 驻点热流密度-时间变化曲线



(h) 过载-时间变化曲线



(i) 动压-时间变化曲线



(j) 三维弹道曲线

图 4 跨域变构飞行器逼近虚拟点仿真结果

Fig. 4 Simulation results of cross-domain morphing vehicle approaching virtual points

分析知, 由于总射程约 10 000 千米, 相对较远, 因此为了更好地逼近设定的虚拟点, 变构飞行器再入时基本保持准平衡滑翔飞行, 速度倾角大部分处于 0 附近, 同时保持航向角大部分保持在一个近似相对稳定的范围内单调递减 (除初始下降段附近由于高度高, 大气稀薄控制力弱而航向基本不改变)。对于控制量, 因为初始设定为 0, 因此在经过短暂时间调整后, 攻角大部分处于最大升阻比攻角飞行, 而倾侧角则几乎以不超出给

定过程约束条件下保持准平衡滑翔的最大值进行轨迹控制; 同时, 后掠角则在初始下降和末段逼近部分略微有所调整外, 大部分处于最大后掠角状态。伸缩比则只在初始下降部分有所调整, 其余大部分为 0, 即不发生变化。显然, 变构飞行器通过最大化利用大升阻比进行再入滑翔飞行, 实现了兼顾飞行器运动特性和能量损耗下的最优飞行。最后, 图 4(j) 得到的三维轨迹与上述分析吻合, 进一步证明了该方法获得了给定约束下逼近设定

虚拟点的最优轨迹。

3.2 基于虚拟点的覆盖区域

根据图 2 的求解流程，设置虚拟点纬度分别为 $\pm 80^\circ$ ，经度值从 35° 到 100° 依次按需递增，则基于每一个虚拟点计算滑翔轨迹，生成跨域变构飞行器再入覆盖区。观察图 5-图 6 所示的控制量，攻角在初始时刻会达到 20° 的最大值，然后再迅速降低保持至 5° 左右，所有轨迹对应的变化过程在 500s 内完成，对应于高度变化曲线，飞行器在初始阶段以较大的速度倾角向下俯冲，随后将攻角调整至最大获得较大升力将飞行器拉起来，在之后的滑翔阶段攻角一直保持 5° 减小能量损失以获得较大的飞行距离，最后接近目标时将攻角增大至 10° 左右使飞行器再次向下俯冲以达到规定的高度，在俯冲至目标的过程中攻角逐渐减小到 0° 直至到达目标。倾侧角主要控制飞行器的侧向滑翔方向，起到转向的作用，由于每条轨

迹目标虚拟点朝向偏差的不同，倾侧角的幅度基本平均分布在 -80° 到 80° 之间，每条轨迹对应末端的倾侧角幅值会突变是因为使用伪谱法进行分段拟合，倾侧角在末端的实际控制量是符合控制要求的。后掠角和伸缩比这两个变形控制量可以放在一起进行比对说明，从整体变化上来看，后掠角在初始时刻会突然降低到最小值 0° 然后再上升保持最大值 80° 不变，伸缩比则是在初始时刻由 0 上升至最大值 1 然后再下降保持最小值 0 不变，由图 7 和图 8 可知，后掠角越大升阻比越大，伸缩率越大升阻比越小，初始阶段使后掠角减小、升阻比增大的动作是为了让飞行器产生第一段俯冲，后续后掠角再增大回 80° 、伸缩比减小至 0 是为了使飞行器获得较大升阻比进入滑翔轨迹阶段。之后伸缩比始终保持 0 、后掠角保持 80° ，达到最大升阻比使飞行器获得最远飞行能力，在轨迹最后阶段后掠角降低是配合攻角使飞行器再次下压进行末段俯冲。最后图 9 给出了跨域变构飞行器再入覆盖区域的求解结果。

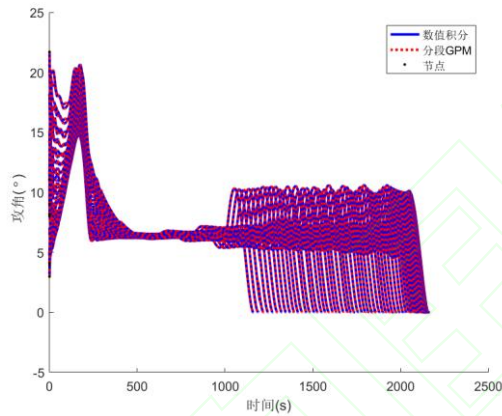


图 5 攻角-时间曲线
Fig. 5 Angle of attack vs. time curve

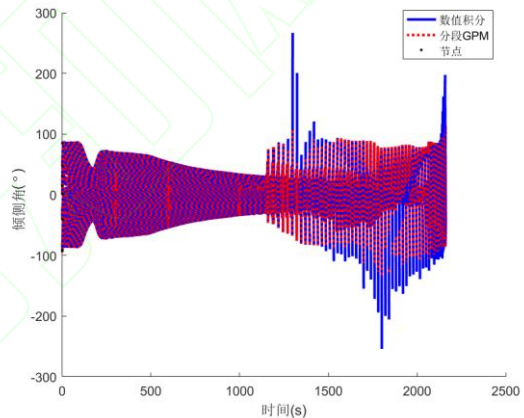


图 6 倾侧角-时间曲线
Fig. 6 Bank angle vs. time curve

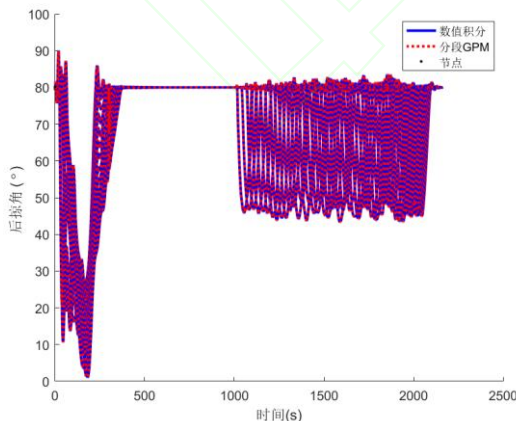


图 7 后掠角-时间曲线
Fig. 7 Sweep angle vs. time curve

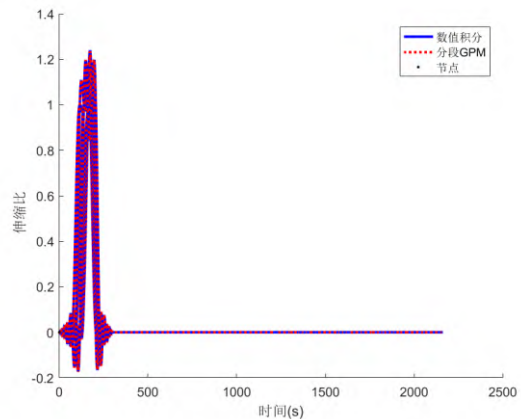


图 8 伸缩比-时间曲线
Fig. 8 Morphing ratio vs. time curve

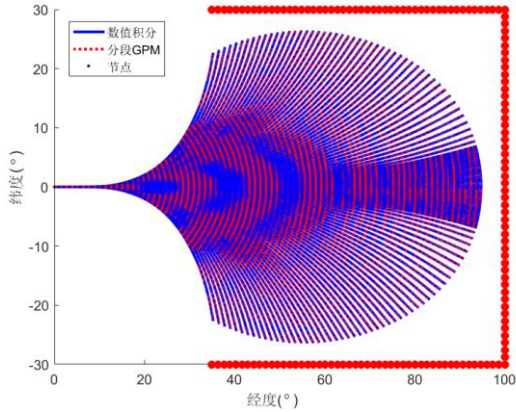


图 9 再入覆盖区域仿真结果

Fig. 9 Simulation results of reentry landing footprint

为了分析采用相邻点轨迹近似策略优化的计算效率，在相同仿真情况下，统计以通用初始轨迹（如 0 攻角、0 倾侧且无变构）作为初值求解单次落点的平均耗时和所提出算法的平均耗时分别为 $t_{通用} = 162\text{ s}$ 和 $t_{优化} = 67\text{ s}$ 。因此，相对于通用初始轨迹的结果，结合虚拟点的设置和相邻轨迹优化策略，求解效率提升可采用如下公式近似计算

$$\delta = \left| \frac{t_{通用} - t_{优化}}{t_{通用}} \right| \times 100\% = 58.6\% \quad (28)$$

此外，为了分析跨域变构飞行器在不同后掠角及伸缩比情况下的覆盖区域变化情况，结合前述方法做了进一步的仿真对比分析。图 10 和图 11 分别给出了不同伸缩比和不同后掠角条件下的覆盖区域变化情况，分析结果可以得出：在其他条件不变的情况下，后掠角与升阻比呈正相关，后掠角越大跨域变构飞行器的升阻比越大，飞行航程越远；伸缩比与升阻比呈负相关，伸缩比越小跨域变构飞行器的升阻比越大，飞行航程越远。因此，为了使跨域变构飞行器能力得到充分发挥以更好完成多样化复杂飞行任务，需要结合具体任务需求和飞行状态进行后掠角及伸缩比的自适应调整。

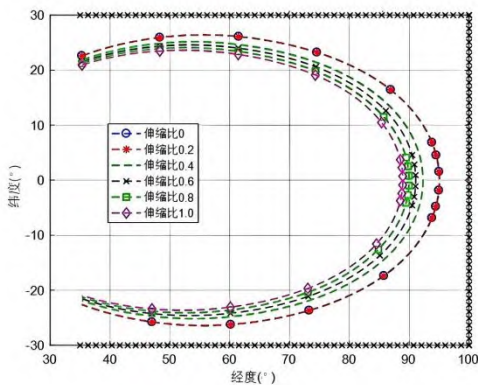


图 10 不同伸缩比下的覆盖区域

Fig. 10 Landing footprint under different

telescopic ratios

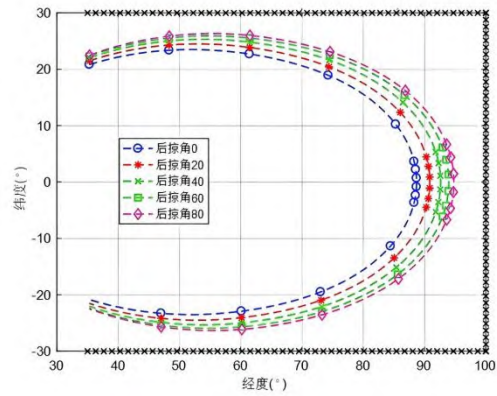


图 11 不同后掠角下的覆盖区域

Fig. 11 Landing footprint under different sweep angles

4 结论

仿真结果表明，通过合理设置虚拟点和相邻点轨迹近似求解策略，可以利用分段高斯伪谱法序列求解出逼近各虚拟点的轨迹落点，从而获得覆盖区边界。对比仿真结果表明，相较于未伸缩或未进行变后掠飞行的定构型飞行器，飞行器通过主动变构，极大拓展了飞行器的能力可达范围，为实现大范围目标可达和复杂机动任务飞行轨迹规划提供理论支持。后续研究将重点聚焦进一步提高覆盖区边界生成的快速性和准确性，从而为跨域变构飞行器轨迹在线规划提供技术支持。

参考文献 (References)

- [1] Li Zheng, Fang Zheng, Jia Zhenyue, et al. Entry trajectory optimization for cross-domain morphing vehicles using oscillation-avoidance-based multistage trust-region sequential convex programming[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2026, 39(4): 103837.
- [2] 何昊, 王鹏. 高速变形飞行器制导控制一体化设计方法[J]. 航空学报, 2024, 45(增刊 1): 299-312.
He Hao, Wang Peng. Integrated guidance and control method for high-speed morphing wing aircraft[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2024, 45(Suppl 1): 299-312. (in Chinese)
- [3] 贾正宇, 张冉, 李惠峰. 跨域变构飞行器自主学习模型预测姿态控制方法[J]. 宇航学报, 2025, 46(3): 499-508.
Jia Zhengyu, Zhang Ran, Li Huifeng. Self-learning model predictive attitude control method for large-

- flight-envelope morphing flight vehicle[J]. *Journal of Astronautics*, 2025, 46(3): 499-508. (in Chinese)
- [4] Yang Zhuoqiao, Liu Xiangdong, Chen Jiabin, et al. Landing footprint prediction for hypersonic morphing vehicle: a generative adversarial network-based method[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2025, 61(6): 16296-16312.
- [5] Chi Fenghua, Wu Meng, Li Fei, et al. Maximum landing footprint calculation method with angle of attack optimization for reentry vehicle[M]//*Advances in guidance, navigation and control*. Singapore: Springer Singapore, 2021: 3321-3333.
- [6] Zhang Yuanlong, Xie Yu, Xu Xin. Generation of landing footprints for re-entry vehicles based on lateral profile priority[J]. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, 2023, 24(1): 261-273.
- [7] 吴楠, 王锋, 赵敏, 等. 高超声速滑翔再入飞行器的可达区快速预测[J]. *国防科技大学学报*, 2021, 43(1): 1-6.
- Wu Nan, Wang Feng, Zhao Min, et al. Fast prediction for footprint of hypersonic glide reentry vehicle[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2021, 43(1): 1-6. (in Chinese)
- [8] Saranathan H. Indirect optimization of multi-phase Mars entry, descent, and landing trajectory involving arbitrary discrete logic[J]. *Advances in Space Research*, 2025, 76(1): 497-518.
- [9] Leavitt J A, Mease K D. Feasible trajectory generation for atmospheric entry guidance[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2007, 30(2): 473-481.
- [10] Liu Qingguo, Liu Xinxue, Wu Jian, et al. A fast computational method for the landing footprints of space-to-ground vehicles[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2020, 31(5): 1062-1076.
- [11] Zhang Yuanlong, Chen Kejun, Liu Luhua, et al. Rapid generation of landing footprint based on geometry-predicted trajectory[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2017, 231(10): 1851-1861.
- [12] Lu Ping, Xue Songbai. Rapid generation of accurate entry landing footprints[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, 33(3): 756-767.
- [13] 李兆亭, 周祥, 张洪波, 等. 基于伪谱法的再入可达域影响因素分析[J]. *上海交通大学学报*, 2022, 56(11): 1470-1478.
- Li Zhaoting, Zhou Xiang, Zhang Hongbo, et al. Analysis of entry footprint based on pseudospectral method[J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2022, 56(11): 1470-1478. (in Chinese)
- [14] Deng Zexiao, Liu Luhua. Peak-heat-flux entry test trajectory optimization by disjunctive programming[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2025, 38(11): 103656.
- [15] Su Ya, Liu Yi. Reentry trajectory optimization for reusable launch vehicle using marine predator whale optimizer and smoothing technique[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2025, 158: 109839.
- [16] Garg D, Patterson M, Hager W W, et al. A unified framework for the numerical solution of optimal control problems using pseudospectral methods[J]. *Automatica*, 2010, 46(11): 1843-1851.