国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第17卷第1期 1995年3月 Vol. 17 No. 1

坐标变换对双/多基地雷达测量误差的影响*

程洪玮 孙仲康

（国防科技大学电子技术系 长沙 410073）

摘 要 本文讨论了坐标变换对测量误差的影响，并且定量分析了坐标变换前后的测量误差变化情况，得出了相应的结论。

关键词 坐标变换，测量误差，影响，定量分析

分类号 TN953

双/多基地雷达系统或卫星定位系统测量数据的处理，往往首先把各站测得的数据作坐标旋转变换，变换成某一中心站地理坐标系中的数据，然后再作定位或跟踪解算。坐标变换将对测量数据作非线性处理，本文就这种处理对测量误差的影响进行探讨。

1 坐标变换前后的测量误差之描述

由于在进行坐标变换时，在雷达测量数据的斜距 R、方位角 β、俯仰角 ϵ 之中，参与变换处理的是测量数据中的方位角 β 及高低角 ϵ，所以，这里只讨论坐标变换对方位角及高低角测量误差的影响。

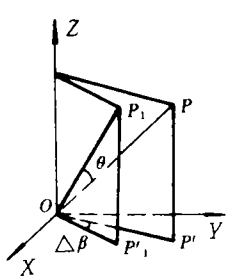


图 1 原坐标系下 $\Delta\beta$、$\Delta\epsilon$ 之描述

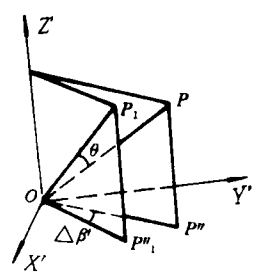


图 2 新坐标系下 $\Delta\beta'$、$\Delta\epsilon'$ 之描述

设在未经过坐标变换处理时，目标在某站[T 站]的地理坐标系中的 OP 方向上[见图 1]，而雷达测量数据中由于叠加有测量噪声，其所指示的目标位置在 OP_1 方向上，OP 与 OP_1 之间有一夹角 θ，该夹角 θ 投映到 T 站地理坐标系[设为 Gt 系]中的 XOY 平面上得到的夹角为 $\Delta\beta=\angle YOP'_1-\angle YOP'$，$\Delta\beta$ 即为通常认为的方位角测角误差；两仰

* 1994年3月22日收稿

角之差为 $\Delta\varepsilon=\angle POP'-\angle P_1OP'_1$，$\Delta\varepsilon$ 即为通常认为的高低角测角误差。

经过坐标变换处理，即将原 Gt 系中的测量数据转变成与中心站(设为 R 站)地理坐标系(设为 Gr 系)相平行的新坐标系(设为 Gt' 系)中的数据。此时 OP 与 OP_1 之位置仍然保持不变，但由于新坐标系 Gt' 系之 $X'OY'$ 平面跟原来 Gt 系之 XOY 平面相比倾斜了某一角度，此时 OP 与 OP_1 投映到 $X'OY'$ 平面所得的夹角 $\Delta\beta'$ 就不再等于原来 Gt 系中的 $\Delta\beta$。同样地，Gt' 系中的 $\Delta\varepsilon'$ 角也不等于 Gt 系中的 $\Delta\varepsilon$(见图 2)，并且 $\Delta\beta'$ 与 $\Delta\beta$、$\Delta\varepsilon$ 以及 $\Delta\varepsilon'$ 与 $\Delta\beta$、$\Delta\varepsilon$ 之间是非线性的关系。显然，$\Delta\beta'$ 及 $\Delta\varepsilon'$ 之大小跟夹角 θ 以及坐标旋转方式有直接关系。

2 变换前后测量误差之关系

在双/多基地雷达系统中，单站雷达一般为二坐标(2D)或三坐标(3D)雷达，2D 雷达测量结果为一个定位平面(β 平面)及斜距 R，3D 雷达测量结果为一个点，或认为是一个方向矢及一斜距。跟雷达测量数据相应的坐标变换方式有面-面变换和线-线变换方式。

严格地说，跟 $\Delta\beta'$ 及 $\Delta\varepsilon'$ 之大小有关的量有：测量值 β、ε，测量误差 $\Delta\beta$ 及 $\Delta\varepsilon$，T、R 两站之地理站址(经纬度及海拔高度)以及站址测量误差。考虑到实际情况，各站坐标系原点之地理坐标可由 GPS 系统或大地测量系统提供，一经确定之后，在雷达进行动态测量时，站址(坐标原点)本身的测量误差是固定不变的，也就是说它不是随机变量，而是雷达系统的系统误差。但由于站址位置的测量精度很高，对 $\Delta\beta'$、$\Delta\varepsilon'$ 之影响极小，因而在探讨 $\Delta\beta'$ 及 $\Delta\varepsilon'$ 之变化规律时，可以忽略去有关坐标系原点(站址)测量误差的影响。

2.1 面-面变换对测量误差的影响

二坐标雷达测得的数据是方位角及斜距(无高低角信息)，即得到的定位面是方位平面及半径为斜距的球面。坐标变换时，把方位定位平面转换成跟中心站的地理坐标系相平行之新坐标系 Gt 系中的平面。设未转换前的方位定位平面之平面法矢为$[A\ B\ C]^T$，设转换后所得的方位定位平面之平面法矢为$[A'B'C']^T$，由参考文献[1][2]得：

$$[A\ B\ C]^T=[\sin\beta 1\quad -\cos\beta\quad 0]^T \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix}A'\\B'\\C'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\sin\beta+a_2\cos\beta\\b_1\sin\beta+b_2\cos\beta\\c_1\sin\beta+c_2\cos\beta\end{bmatrix} \tag{2}$$

式中：β 为原坐标系 Gt 系下测得的目标之方位角；a_1、a_2、b_1、b_2、c_1、c_2 分别跟坐标变换之正交变换矩阵的元素有关，其中：

$$a_1=C_{21}C_{33}-C_{23}C_{31},\ a_2=C_{22}C_{33}-C_{23}C_{32}$$
$$b_1=C_{13}C_{31}-C_{11}C_{33},\ b_2=C_{13}C_{23}-C_{12}C_{33}$$
$$c_1=C_{11}C_{23}-C_{13}C_{21},\ c_2=C_{12}C_{23}-C_{13}C_{22}$$

式中：$C_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$为由 Gt 系到 Gt' 系的坐标变换正交矩阵 $C_{Gt}^{Gt'}$ 之元素，为：

$$C_{Gt}^{Gt'}=[C_{ij}]_{3\times 3} \tag{3}$$

其中：

$$C_{11}=\cos(\lambda t-\lambda r);\qquad C_{12}=\sin Lr\sin(\lambda t-\lambda r);$$
$$C_{13}=-\cos Lr\sin(\lambda t-\lambda r);\quad C_{21}=-\sin Lt\sin(\lambda t-\lambda r);$$

$$C_{22} = \cos Lr\cos Lt - \sin(\lambda t - \lambda r)\sin Lr\sin Lt;$$
$$C_{23} = \sin Lr\cos Lt - \cos(\lambda t - \lambda r)\cos Lr\sin Lt;$$
$$C_{31} = \sin(\lambda t - \lambda r)\cos Lt;$$
$$C_{32} = \cos Lr\sin Lt - \cos(\lambda t - \lambda r)\sin Lr\cos Lt;$$
$$C_{33} = \sin Lr\sin Lt + \cos(\lambda t - \lambda r)\cos Lr\cos Lt.$$

其中 λr、Lr 为 R 站[中心站]的经纬度，λt、Lt 为 T/R 站(发射站)的经纬度。考虑到通常情况下 R 站、T/R 站之间相距不大于 300 公里，两站之经、纬度差在 3°以下，因而新旧坐标系之间的倾斜角很小，$[A'B'C']^T$ 中 C' 近似于 0，可以认为定位平面近似垂直于新坐标系，即新坐标系上的方位角近似为：

$$\beta' = \operatorname{arctg}\frac{A'}{B'} = \operatorname{arctg}\frac{a_1\sin\beta + a_2\cos\beta}{b_1\sin\beta + b_2\cos\beta} \tag{4}$$

定义原坐标系中方位角的测量值为 $\beta_m = \beta + \Delta\beta$，$\Delta\beta$ 为测量误差；定义新坐标系中由方位角的测量值转换而得到的值为 $\beta'_m = \beta' + \Delta\beta'$，$\Delta\beta'$ 为误差，则有：

$$\beta'_m = \operatorname{arctg}\frac{A'_m}{B'_m} = \operatorname{arctg}\frac{a_1\sin\beta_m + a_2\cos\beta_m}{b_1\sin\beta_m + b_2\cos\beta_m}$$
$$= \operatorname{arctg}\frac{a_1\sin(\beta + \Delta\beta) + a_2\cos(\beta + \Delta\beta)}{b_1\sin(\beta + \Delta\beta) + b_2\cos(\beta + \Delta\beta)} \tag{5}$$

由于 $\Delta\beta$ 比较小，用泰勒级数把(5)式展开，忽略高次项，并整理得：

$$\beta'_m = \operatorname{arctg}\frac{A'}{B'} + \frac{B'(a_1\cos\beta - a_2\sin\beta) - A'(b_1\cos\beta - b_2\sin\beta)}{A'^2 + B'^2}\Delta\beta \tag{6}$$

则有

$$\Delta\beta' = \frac{B'(a_1\cos\beta - a_2\sin\beta) - A'(b_1\cos\beta - b_2\sin\beta)}{A'^2 + B'^2}\Delta\beta \tag{7}$$

(7)式即变换前后的误差关系式。由式中可以看出，$\Delta\beta'$ 跟 β、$\Delta\beta$ 及站址有关。定义系数式：

$$P(\beta) = \frac{B'(a_1\cos\beta - a_2\sin\beta) - A'(b_1\cos\beta - b_2\sin\beta)}{A'^2 + B'^2} \tag{8}$$

那么，有

$$\Delta\beta' = P(\beta)\Delta\beta \tag{9}$$

若设测量误差 $\Delta\beta$ 为 0 均值、方差为 σ_β^2 的正态噪声，则

$$\sigma_{\beta'}^2 = P^2(\beta)\sigma_\beta^2 \tag{10}$$

上式反映了坐标变换前后测量误差的变化，用计算机作定量分析。由(9)式及(10)式，β 值由 0°～360°之间变化，所设置的系统Ⅰ、系统Ⅱ两测量系统中两测量站间距离不大于 300 公里，经、纬度差不大于 3°，可得图 3 和图 4 之结果。

从上述结果可以看出：

坐标变换前后的方位角测量误差跟方位角及布站均相关。如果测量站之间的相距适中(不大于 300 公里)，那么，坐标变换对测量误差的影响在千分之几以内，可以忽略。

2.2 线-线变换对测量误差的影响

线-线变换是针对三坐标雷达而言的。假设在 T 站地理坐标系[Gt 系]测得的目标参

数为 β_m、ε_m、R_m，与之相应的目标在 Gt 系之真值位置为 β、ε、R。同前所述，忽略站址

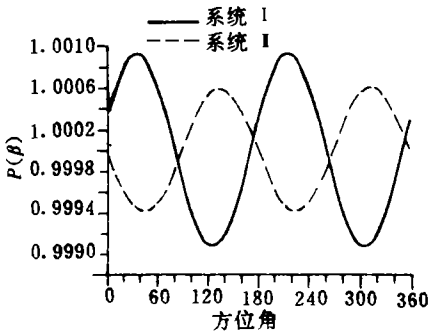


图 3　面－面变换前后的测量误差的关系

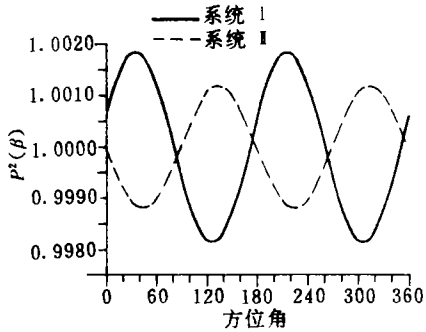


图 4　面－面变换前后面测量误差方差的关系

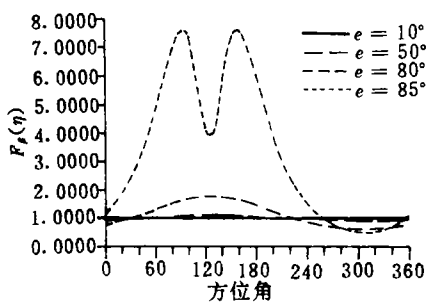


图 5　系统 I，R=0．1 时方位方差系数 F_β（η）

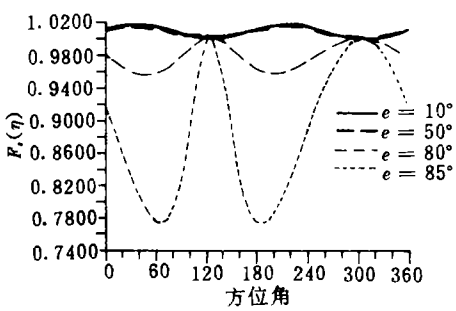


图 6　系统 I、η=0．1 时高低方差系数 F_ε（η）

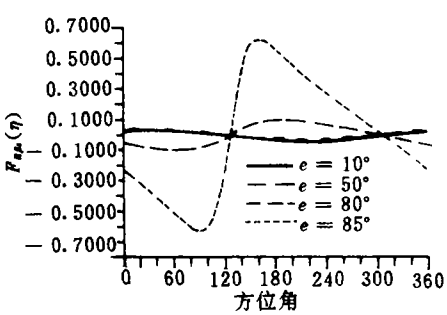


图 7　系统 I，η=0．1 时方位与高低的相关项系数 $F_{R\beta\varepsilon}$（η）

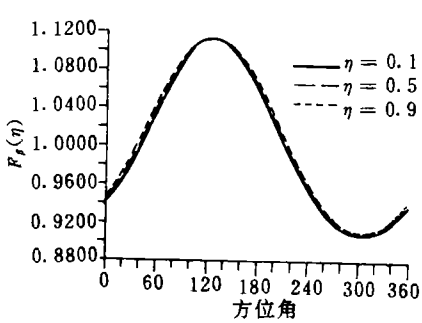


图 8　系统 I，高低角 E=50°时方位方差系数 F_β（η）

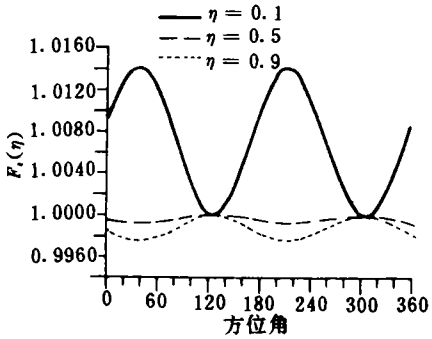


图 9　系统 I，高低角 $E=50°$时高低方差系数 $F_\epsilon(\eta)$

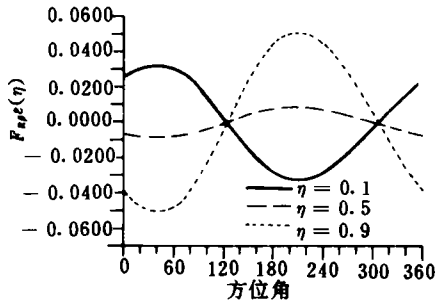


图 10　系统 I，高低角 $E=50°$时方位与高低的相关项系数 $F_{R\beta\epsilon}(\eta)$

本身的测量误差，设经过坐标变换后测量数据在新坐标系 Gt′系中的值为 β'_m，ε'_m、$R'_m=R_m$，为简便，先设变换前后的非线性关系为

$$\begin{bmatrix}\beta'\\ \varepsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_\beta(\beta,\ \varepsilon)\\ F_\epsilon(\beta,\ \varepsilon)\end{bmatrix} \tag{11}$$

以及：

$$\begin{bmatrix}\beta'_m\\ \varepsilon'_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_\beta(\beta_m,\ \varepsilon_m)\\ F_\epsilon(\beta_m,\ \varepsilon_m)\end{bmatrix} \tag{12}$$

式中：β'、ε'为真值 β、ε 经变换后之数据；$F_\beta(.,.)$ 为 β 角变换函数；$F_\epsilon(.,.)$ 为 ε 角变换函数。

那么，在原坐标系中测量误差描述为

$$\Delta V=\begin{bmatrix}\beta_m-\beta\\ \varepsilon_m-\varepsilon\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta\beta\\ \Delta\varepsilon\end{bmatrix} \tag{13}$$

在新坐标系 Gt′系中误差描述为

$$\Delta V'=\begin{bmatrix}\beta'_m-\beta'\\ \varepsilon'_m-\varepsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_\beta(\beta_m,\varepsilon_\beta)-F_\beta(\beta,\ \varepsilon)\\ F_\epsilon(\beta_m,\varepsilon_m)-F_\epsilon(\beta,\ \varepsilon)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta\beta'\\ \Delta\varepsilon'\end{bmatrix} \tag{14}$$

$F_\beta(.,.)$、$F_\epsilon(.,.)$ 皆为非线性函数，由于 $\Delta\beta$，$\Delta\varepsilon$ 都比较小，不妨在 $(\beta,\ \varepsilon)$ 附近将其展开为泰勒级数，并忽略高次项，有

$$\beta'_m=F_\beta(\beta_m,\ \varepsilon_m)=F_\beta(\beta,\ \varepsilon)+\frac{\partial F_\beta}{\partial\beta}\Delta\beta+\frac{\partial F_\beta}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon \tag{15}$$

$$\varepsilon'_m=F_\epsilon(\beta_m,\ \varepsilon_m)=F_\epsilon(\beta,\ \varepsilon)+\frac{\partial F_\epsilon}{\partial\beta}\Delta\beta+\frac{\partial F_\epsilon}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon \tag{16}$$

那么

$$\Delta V'=\begin{bmatrix}F_\beta(\beta_m,\ \varepsilon_m)-F_\beta(\beta,\ \varepsilon)\\ F_\epsilon(\beta_m,\ \varepsilon_m)-F_\epsilon(\beta,\ \varepsilon)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_\beta}{\partial\beta}&\dfrac{\partial F_\beta}{\partial\varepsilon}\\ \dfrac{\partial F_\epsilon}{\partial\beta}&\dfrac{\partial F_\epsilon}{\partial\varepsilon}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta\beta\\ \Delta\varepsilon\end{bmatrix} \tag{17}$$

定义系数阵为

$$A=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_\beta}{\partial\beta} & \dfrac{\partial F_\beta}{\partial\epsilon}\\ \dfrac{\partial F_\epsilon}{\partial\beta} & \dfrac{\partial F_\epsilon}{\partial\epsilon}\end{bmatrix}\cdot[a_{ij}]_{2\times2}(i,j=1,2) \tag{18}$$

则有

$$\Delta V'=\begin{bmatrix}\Delta\beta'\\ \Delta\epsilon'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\Delta\beta\\ \Delta\epsilon\end{bmatrix} \tag{19}$$

上式即为变换前后之误差关系式。在进行数据处理时，更关心的是变换后误差之协方差矩阵，即：

$$\begin{aligned}P_{\Delta V'}&=E\{\Delta V'\Delta V'^T\}\\&=E\{A\begin{bmatrix}\Delta\beta\\ \Delta\epsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\beta\\ \Delta\epsilon\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\}\end{aligned} \tag{20}$$

若设变换前的测量误差是独立的，且方差分别为 σ_β^2、σ_ϵ^2，则有：

$$P_{\Delta V}=\begin{bmatrix}\sigma_\beta^2 & 0\\ 0 & \sigma_\epsilon^2\end{bmatrix} \tag{21}$$

则变换后得：

$$\begin{aligned}P_{\Delta V'}&=E\{\Delta V'\Delta V'^T\}=\begin{bmatrix}\sigma_{\beta'}^2 & R_{\beta'\epsilon'}\\ R_{\beta'\epsilon'} & \sigma_{\epsilon'}^2\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\sigma_\beta^2 & 0\\ 0 & \sigma_\epsilon^2\end{bmatrix}A^{\mathrm{T}}\\&=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_\beta^2 & 0\\ 0 & \sigma_\epsilon^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\&=\begin{bmatrix}a_{11}^2\sigma_\beta^2+a_{12}^2\sigma_\epsilon^2 & a_{11}a_{21}\sigma_\beta^2+a_{12}a_{22}\sigma_\epsilon^2\\ a_{11}a_{21}\sigma_\beta^2+a_{12}a_{22}\sigma_\epsilon^2 & a_{21}^2\sigma_\beta^2+a_{22}^2\sigma_\epsilon^2\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{22}$$

由上式知，经变换后：

方位角误差方差为：$\sigma_{\beta'}^2=a_{11}^2\sigma_\beta^2+a_{12}^2\sigma_\epsilon^2$ (23)

高低角误差方差为：$\sigma_{\epsilon'}^2=a_{21}^2\sigma_\beta^2+a_{22}^2\sigma_\epsilon^2$ (24)

方位角误差与高低角误差不独立，两者之相关项为：

$$R_{\beta'\epsilon'}=a_{11}a_{21}\sigma_\beta^2+a_{12}a_{22}\sigma_\epsilon^2 \tag{25}$$

为便于定量讨论，将（23）、（24）、（25）三式改为：

$$\sigma_{\beta'}^2=a_{11}^2\sigma_\beta^2+a_{12}^2\sigma_\epsilon^2=F_\beta(\eta)\sigma_\beta^2$$

$$\sigma_{\epsilon'}^2=a_{21}^2\sigma_\beta^2+a_{22}^2\sigma_\epsilon^2=F_\epsilon(\eta)\sigma_\epsilon^2$$

$$R_{\beta'\epsilon'}=a_{11}a_{21}\sigma_\epsilon^2+a_{12}a_{22}\sigma_\epsilon^2=F_{R\beta\epsilon}(\eta)\sigma_\beta^2$$

式中：$F_\beta(\eta)$、$F_\epsilon(\eta)$、$F_{R\beta\epsilon}(\eta)$ 分别为系数式，$\eta=\sigma_\epsilon^2/\sigma_\beta^2$。

定义原坐标系 Gt 系中目标的方向矢为：$d=[l\ m\ n]^T$；

定义经变换后坐标系 Gt' 系中目标的方向矢为：$d'=[l'\ m'\ n']^T$；

由文献[1]可以推导出矩阵 A 之元素 a_{ij}（i，$j=1$，2）的具体表达式：

$$a_{11}=\frac{\partial F_\beta}{\partial\beta}=\frac{m'(C_{11}m-C_{12}1)-1'(C_{21}m-C_{22}1)}{1'^2+m'^2}$$

$$a_{12}=\frac{\partial F_\beta}{\partial \epsilon}$$

$$=\frac{m(-C_{11}\sin\beta\sin\epsilon-C_{12}\cos\beta\sin\epsilon+C_{13}\cos\epsilon)-1(-C_{21}\sin\beta\sin\epsilon-C_{22}\cos\beta\sin\epsilon+C_{23}\cos\epsilon)}{1'^2+m'^2}$$

$$a_{21}=\frac{\partial F_\epsilon}{\partial \beta}=\frac{1}{\sqrt{1-n'^2}}[C_{31}\cos\beta\cos\epsilon-C_{32}\sin\beta\cos\epsilon]$$

$$a_{22}=\frac{\partial F_\epsilon}{\partial \beta}=\frac{1}{\sqrt{1-n'^2}}[-C_{31}\sin\beta\sin\epsilon-C_{32}\cos\beta\sin\epsilon+C_{33}\cos\epsilon]$$

上述各式中，C_{ij}（i，j=1，2，3）为（3）式正交矩阵 $C_{Gt'}^{Gt'}=[C_{ij}]$ 的元素。

由上述讨论可知，上述各关系式中函数关系比较复杂，因而不容易看出其变化规律，下面将利用计算机对各关系式作定量考察。为了便于定量分析而作以下设置，即设置两套双基地雷达系统（一发二收）：

T/R 站地理位置为：东经 λ_T，北纬 L_T，海拔高度 H_T；

R_1 站地理位置为：东经 λ_{R1}，北纬 L_{R1}，海拔高度 H_{R1}；

R_2 站地理位置为：东经 λ_{R2}，北纬 L_{R2}，海拔高度 H_{R2}；

设定 T/R 与 R_1 系统为系统 I，T/R 与 R_2 系统为系统 Ⅱ。分别在 η=0.1、0.5、0.9，β=0°～360°，0°<ε<90°等情况下作定量考察，得图 5 至图 10 之结果。

由上述结果可以看出：

(1)未经坐标变换之前相互间统计独立的方位角测量误差 $\Delta\beta$ 与高低角测角误差 $\Delta\epsilon$，经坐标变换之后不再独立，其相关性大小跟方差大小，站址、空间位置都有关（见（25）式）。

(2) 经坐标变换之后的测量误差 $\Delta\beta'$，$\Delta\epsilon'$ 跟未变换前的测量误差 $\Delta\beta$，$\Delta\epsilon$ 之大小、站址、空间位置都有关［见（23）式、(24）式］，其中这两者之方差之极大、极小值点的位置跟站址、空间位置有直接关系。经求导得知，变换之后 $\Delta\beta'$ 方差之极小值位置位于 $T/R-R$ 连线方位上（证明从略），而这一位置正是变换之后 $\Delta\epsilon'$ 方差之极大值位置。物理概念上解释如下：参见图 1 及图 2，考虑极端情况，若经坐标变换后 POP_1 平面跟新坐标系 Gt′ 系的 $X'OY'$ 平面重合，那么此时之 $\Delta\beta'$ 最大［等于 θ］，而 $\Delta\epsilon'$ 最小；又若坐标变换后 POP_1 平面跟新坐标系 Gt′ 系的 $X'OY'$ 平面垂直，那么此时之 $\Delta\beta'$ 最小，而 $\Delta\epsilon'$ 最大［等于 θ］。因而，经变换后的方位误差方差之极大值位置与高低误差方差之极小值位置总是出现在同一方位上。

3 小 结

由上述讨论得知，对于面-面变换而言，坐标变换前后的方位角测量误差跟方位角及布站均相关。如果测量站之间的相距适中（不大于 300 公里），那么，坐标变换对测量误差的影响不大。

对于线-线变换而言，若认为在未经坐标变换以前的方位角测量误差与高低角测量误差是统计独立的，那么经坐标变换之后，它们不再独立。经坐标变换之后之方位误差、高低误差及它们之间的相关项都跟系统布站、空间位置、原方位误差和高低误差之大小

三者有关。

综上所述，坐标变换对测量误差有一定的影响，在作精确定位解算时必须要作相应的考虑。

参 考 文 献

1 孙仲康，陈辉煌. 定位、导航与制导. 国防工业出版社，1988

2 陈芳允，贾乃华. 卫星测控手册，科学出版社，1992

The Influence of Coordinate Transform upon the Measurement Error of Bistatic/Multistatic Radar

Cheng Hongwei Sun Zhongkang

(Department of Electronic Technology)

Abstract

This paper presents a discussion of the influence of coordinate transform on the measurment error of bistatic/multistatic radar syftem. Quantitativetive analysis of the influence and relative conclusions are also given in the paper.

Key words: Coordinate Transform, Measurment Error, Influence, Quantitative Analysis