国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第17卷第1期 1995年3月 Vol. 17 No. 1

梁的蠕变脆性各向同性弯曲损伤模型*

杨光松 金 星 陆寅初

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘 要 本文在梁的纯弯曲损伤基本假设条件下，导出了弯曲损伤的基本方程，与Kachanov的材料刚度劣化(受载横截面积减小)定义拉伸损伤变量类似，以梁的弯曲刚度劣化(惯性矩减小)定义弯曲损伤变量，从而建立了与Kachanov拉伸损伤模型相类似的梁的各向同性弯曲损伤模型。最后，以受蠕变纯弯曲梁为实例进行了损伤分析，在一次近似条件下，该弯曲损伤模型的材料常数可由Kachanov拉伸损伤模型的材料常数确定，且所得计算结果与Kachanov拉伸损伤模型所得结果比较吻和，表明该弯曲损伤模型是合理适用的。

关键词 纯弯曲梁，蠕变，拉伸损伤，弯曲损伤，各向同性损伤模型

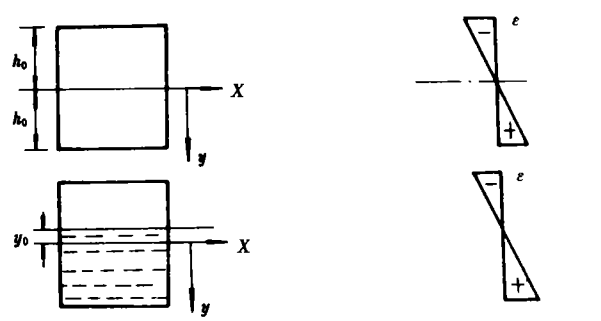
分类号 O344.6

近年来，连续介质损伤力学已在蠕变、疲劳、塑性成型、寿命预估等方面得到成功的应用。然而，实际工程问题中应用最多的仍主要集中于单向或均布的平面应力状态，对于三维应力状态或非均布的应力状态，由于应力分布比较复杂，损伤状态也相当复杂，用各向同性损伤模型分析计算误差较大。鉴于实际工程结构中主要采用平板和壳体结构，且承受横向弯曲载荷较多，因此将各向同性（平面应力）拉伸损伤模型推广应用到梁、板和壳的弯曲损伤情形，对于损伤力学在工程实际中的应用发展具有重要意义。

1 梁纯弯曲损伤模型的基本假设

如图1所示，假设梁的横截面为一矩形截面(如图1(a)所示)，在外载(弯矩作用)或其它环境条件下，材料受到损伤。现对梁的损伤状态作如下假设：

1. 损伤是由拉应力引起的，在纯弯曲载荷作用下，损伤沿梁的宽度均匀分布。梁的有效宽度



(a) 受损梁的矩形横截面 (b) 受损梁的直法线假设

图1 梁的纯弯曲损伤变形模型

* 1994年3月25日收稿，1994年5月26日修改

$\tilde{b}$ 为

$$\tilde{b} = b(1-\omega) \tag{1}$$

式中：ω 为（Kachanov）拉伸损伤变量；b 为梁的宽度。

2. 无损伤时，梁的横截面 Euler-Bernauli 平面假设成立，剪力的影响可以忽略不计，则几何关系为

$$\varepsilon = ky \tag{2}$$

式中：ε 为轴向（x 方向）应变；k 为轴线曲率；y 为纵向坐标。

对于受损后的梁，假设损伤不影响层间作用，梁的高度不变。由于梁的横截面存在损伤，使其中性轴移动。y_0 为中性轴与 x 轴（梁的横截面中心轴）之间的距离。如图 1(a)所示，如果此时梁的横截面 Euler-Bernauli 平面假设仍然成立，则几何关系（简称为广义应变等效条件）为

$$\varepsilon = \tilde{k}(y + y_0) \tag{3}$$

式中：$\tilde{k}$ 为受损梁的有效曲率；y_0 为受损梁的中性轴移动距离。

显见无损伤影响时，(3)式即为(2)式，且有

$$\tilde{k} = k, \qquad y_0 = 0 \tag{4}$$

3. 如果(1)式中的单向拉抻损伤变量 ω 为 Kachanov 各向同性损伤变量，则根据 Lemaitre 应变等效原理，有效应力 $\bar{\sigma}$ 满足无损伤时的弹性本构关系

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon = E\tilde{k}(y + y_0) \tag{5}$$

式中：E 为杨氏（Young）弹性模量。

4. Kachanov 损伤变量 ω 的发展方程仍采用 Kachanov 假设

$$\frac{d\omega}{dt} = \begin{cases} A\left(\dfrac{\sigma}{1-\omega}\right)^n = A\bar{\sigma}^n & \sigma > 0 \\ 0 & \sigma \leqslant 0 \end{cases} \tag{6}$$

式中：A、n 为常数。

2 梁的弯曲损伤模型

对于承受纯弯矩静载作用的情形，根据静力平衡条件有：

2.1 合力平衡

$$N = \int_{-h_0}^{h_0} \sigma b dy = \int_{-h_0}^{h_0} E\tilde{k}b(1-\omega)(y + y_0)dy = 0$$

从而得

$$y_0 = \frac{1}{2h_0}\int_{-h_0}^{h_0} \omega(y + y_0)dy \tag{7}$$

上式表明受损后梁中性轴移动的距离 y_0 为材料损伤（对损伤中性轴 $y=-y_0$ 处）的一次矩。

2.2 弯矩平衡

$$M = \int_{-h_0}^{h_0} \sigma b y dy = \int_{-h_0}^{h_0} E\tilde{k}b(1-\omega)(y + y_0)ydy \tag{8}$$

式中：M 为表观弯矩。

如果定义梁的横截面有效惯性矩 $\bar{I}$ 为

$$\bar{I} = \int_{-h_0}^{h_0} (1-\omega) b (y+y_0)^2 dy \tag{9}$$

则弯曲损伤变量 β 可定义为弯曲刚度（惯性矩）的劣化。即有

$$\beta = 1 - \frac{\bar{I}}{I} \tag{10}$$

上式中梁的横截面惯性距 I 为

$$I = \int_{-h_0}^{h_0} b y^2 dy = \frac{2}{3} b h_0^3 \tag{11}$$

由(8)式至(10)式得

$$M = EkI = E\bar{k}\,\bar{I} = E\bar{k}(1-\beta)I \tag{12}$$

从而可得与 Kachanov 各向同性拉伸损伤模型相类似的各种有关等效概念。如：

有效弯矩

$$\bar{M} = M/(1-\beta) \tag{13}$$

有效曲率

$$\bar{k} = k/(1-\beta) \tag{14}$$

有效惯性矩

$$\bar{I} = (1-\beta)I \tag{15}$$

由(12)式可得

$$\bar{M} = EI\bar{k} \tag{16}$$

如果将曲率看作广义应变，弯矩看作广义应力，则上式与(5)式相类似，可称为广义应变等效原理。

如果记

$$\omega_1 = \frac{1}{2h_0^2} \int_{-h_0}^{h_0} \omega (y+y_0) dy \tag{17a}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2h_0^2} \int_{-h_0}^{h_0} \omega (y+y_0)^2 dy \tag{17b}$$

式中：ω_1 为损伤（对损伤中性轴 $y=-y_0$ 处）的无量纲一次矩；ω_2 为损伤（对损伤中性轴 $y=-y_0$ 处）的无量纲二次矩。

从而有

$$\xi = y_0/h_0 = \omega_1 \tag{18}$$

$$\beta = 3(\omega_2 - \omega_1^2) \tag{19}$$

因此，受损梁的无量纲中性轴距离 ξ（即中性轴移动的距离与横截面半高度之比）为材料损伤的无量纲一次矩，弯曲损伤变量为损伤的无量纲二次矩与一次矩平方之差的三倍。显见，如果单向拉伸损伤在整个横截面上均匀分布，且拉压性质一致时，则梁的中性轴不变，弯曲损伤变量回复为单向拉伸损伤变量，即与 Kachanov 损伤变量一致。

对于等温或绝热过程，梁弯曲变形的 Helmhotz 自由能为

$$p\psi = \frac{1}{2}EI(1-\beta)k^2 \tag{20}$$

则弯曲损伤本构关系为

$$M = EIk(1-\beta) \tag{21}$$

上式中的 k 为有效曲率，以便与拉伸损伤模型的表达形式一致。弯曲损伤能量释放率（对偶力）为

$$Y_\beta = \frac{1}{2}EIk^2 = \frac{1}{2EI}\left(\frac{M}{1-\beta}\right)^2 \tag{22}$$

弯曲损伤发展方程可由(10)式利用 Kachanov 损伤发展方程(6)式导出，同时为了实际工程计算中的简便适用，弯曲损伤发展方程也可假设为与 Kachanov 单向拉伸损伤发展方程相类似的表述形式，其合理性将在后面讨论。即有

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = B\frac{M^n}{(1-\beta)^m} \tag{23}$$

式中：B、n、m 为常数。

损伤初始条件为

$$t = 0: k = k_0, \beta = 0 \tag{24}$$

式中：k_0 为广义应变（曲率）阈值。

损伤破坏准则为

$$t = t_c: Y = Y_c, \beta = 1 \tag{25}$$

式中：Y_c 为弯曲损伤能量释放率临界破坏值。

损伤破坏时间为

$$t_c = [(m+1)BM^n]^{-1} \tag{26}$$

3 纯弯曲梁蠕变脆性损伤开裂实例分析

假设有一各向同性混凝土梁，受弯矩 M 作用发生蠕变脆性损伤。现在分两个阶段进行讨论：

3.1 损伤最严重($y=h_0$)处发生开裂之前的情形

微分(19)式，并将(17)式代入得弯曲损伤变量对时间的变化率

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2h_0^3}\int_{-h_0}^{h_0}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}(y+y_0)^2\mathrm{d}y \tag{27}$$

由于有效应力为

$$\bar{\sigma} = \frac{Ek}{1-\beta}(y+y_0) \tag{28}$$

将上式和(6)式代入(27)式，积分得弯曲损伤发展方程

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{3(1+\xi)^{n+3}}{2(n+1)(n+3)t_0(1-\beta)^n} \tag{29}$$

上式中 t_0 为单向拉伸应力与 $y=h_0$ 处应力相同时的 Kachanov 蠕变断裂寿命。即有

$$t_0 = [A(n+1)(Ekh_0)^n]^{-1} \tag{30}$$

由(18)和(17a)式，微分两次并整理得无量纲中性轴距离 ξ 的微分方程

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{(n+2)^2}{(n+1)(1+\xi)}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\frac{n}{1-\beta}\frac{d\beta}{dt}\frac{d\xi}{dt} \tag{31}$$

初始条件为：

$$t=0;\beta=0,\xi=0;\frac{d\beta}{dt}=\frac{1}{2(n+1)(n+3)t_0},\frac{d\xi}{dt}=\frac{1}{2(n+1)(n+2)t_0} \tag{32}$$

积分(31)式，并利用初始条件(32)式，得无量纲中性轴距离 ξ 变化规律为

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{1}{2(n+1)(n+2)t_0}\quad\frac{(1+\xi)^{\frac{(n+2)^2}{n+1}}}{(1-\beta)^n} \tag{33}$$

弯曲损伤变量 β 与无量纲中性轴距离 ξ 之间的关系为

$$\beta=\frac{3(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\left[(1+\xi)^{\frac{n}{n+1}}-1\right] \tag{34}$$

由(6)式和(28)式，得 Kachanov 损伤变量沿梁高度的分布规律为

$$\omega(Y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n+1)t_0}\displaystyle\int_0^t\frac{(1+\xi)^n}{(1-\beta)^n}dt, & -\xi\leqslant Y\leqslant 1\\ 0 & -1\leqslant Y\leqslant-\xi\end{cases} \tag{35}$$

式中 $Y=y/h_0$ 为梁的无量纲高度。

由(3)式，应变沿梁高度的分布规律为

$$\varepsilon=\frac{Y+\xi_0}{1-\beta}\varepsilon_0 \tag{36}$$

式中 $\varepsilon=kh_0$ 为无损伤时梁在 $y=h_0$ 处的应变。

有效应力沿梁高度的分布规律为

$$\bar{\sigma}=\frac{Y+\xi}{1-\beta}\sigma_0 \tag{37}$$

式中 $\sigma_0=E\varepsilon_0$ 为无损伤时梁在 $y=h_0$ 处的应力。

表观应力沿梁高度的分布规律为

$$\sigma=\frac{Y+\xi}{1-\beta}(1-\omega)\sigma_0 \tag{38}$$

将(33)式代入(35)式积分，则在梁损伤最严重($y=h_0$)处，Kachanov 损伤变量为

$$\omega=\frac{2(n+1)(n+2)}{2n+3}\left[1-(1+\xi)^{-\frac{2n+3}{n+1}}\right] \tag{39}$$

假设此处开始开裂($\omega=1$)的时间为 t_1，则此时的无量纲中性轴距离为

$$\xi_0=\left[1-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right]^{-\frac{n-1}{2n+3}}-1 \tag{40}$$

此时的弯曲损伤变量为

$$\beta_0=\frac{3(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\left[\left(1-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right)^{-\frac{n}{2n+3}}-1\right] \tag{41}$$

由(33)和(34)式，得初始开裂时间 t_1 为

$$\frac{t_1}{t_0}=2(n+1)(n+2)\int_0^{\xi_0}\frac{\left[1+\frac{3(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\left(1-(1+\xi)^{\frac{n}{n+1}}\right)\right]^n}{(1+\xi)^{\frac{(n+2)^2}{n+1}}}\mathrm{d}\xi \tag{42}$$

表 1 给出了不同 n 值的计算结果。

表 1　$y=h_0$ 处开始开裂时不同 n 值的计算结果

n	2	4	6	8
$\hat{\xi}_0$	0.1593	0.0964	0.0694	0.0543
β_0	0.3728	0.2456	0.1842	0.1476
$\bar{\sigma}(h_0)/\sigma_0$	1.8484	1.4533	1.3109	1.2369
t_1/t_0	1.8620	2.7419	3.6148	4.4845
t_1/t_0	1.7835	2.6427	3.5584	4.4317
误差%	−4.22	−3.62	−1.56	−1.18

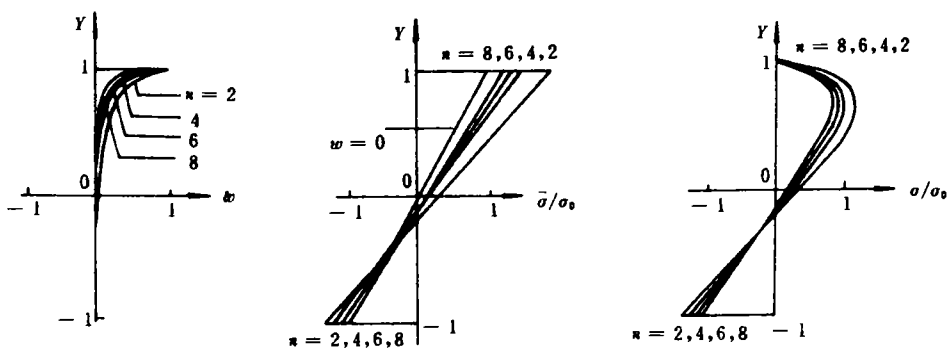


图 2　$y=h_0$ 处开始开裂时 Kachanov 损伤变量与应力沿梁高度变化规律

如图 2 和表 1 所示，随着 n 的增大，Kachanov 损伤变量与有效应力减小，弯曲损伤变量与开裂时间增大。

如果在(40)至(42)式中取一次近似，得 $y=h_0$ 处开始开裂时的损伤变量、开裂时间和无量纲中性轴距离等的近似表达式：

$$\hat{\xi}_0=\frac{1}{2(n+2)};\beta_0=\frac{3}{2(n+3)};\frac{t_1}{t_0}=\frac{(n+1)}{2} \tag{43}$$

如(43)式所示，弯曲损伤的初始开裂时间 t_1 是 Kachanov 均匀拉伸损伤模型开裂时间 t_0 的$(n+1)/2$ 倍，这是由于弯曲变形的不均匀拉伸应力引起的。由于 n 越大，受损梁中性轴移动距离越小，弯曲损伤变量越小、$y=h_0$ 处有效应力的增加也越小，从而开裂时间越长。表明该损伤模型的计算结果是合理的。

将(34)式代入(29)式，弯曲损伤发展方程简化为

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}=\frac{3}{2(n+1)(n+3)t_0}\frac{\left(1+\frac{n(n+3)}{3(n+1)(n+2)}\beta\right)^{\frac{(n-1)(n+3)}{n}}}{(1-\beta)^n} \tag{44}$$

将弯曲损伤的发展方程(23)式记为

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}=B_1\frac{M^{n_1}}{(1-\beta)^{m_1}} \tag{45}$$

比较(45)和(44)式知，它们具有相近的表达形式，表明弯曲损伤发展方程(23)式的假设形式是合理的。如果取一次近似，则(42)式中的各材料常数可确定为

$$B_1=\frac{3A}{2(n+3)}\left(\frac{h_0}{I}\right)^n=\frac{3M^{-n}}{2(n+1)(n+3)t_0} \tag{46a}$$

$$m_1=n+\frac{(n+3)^2}{3(n+2)};n_1=n \tag{46b}$$

如果 $y=h_0$ 处开裂时仍有 $\beta=\beta_0$，则得弯曲损伤模型的初始开裂时间 t_1' 为

$$t_1=\frac{1-(1-\beta_0)^{m_1+1}}{B_1M^n(m_1+1)}=\frac{2(n+1)(n+3)}{3(m_1+1)}\left[1-(1-\beta_0)^{m_1+1}\right]t_0 \tag{47}$$

上式的计算结果如表 1 所示，与(42)式的精确计算结果相当吻合，最大相对误差为 4.22%，表明本文提出的弯曲损伤模型可以较准确描述梁的初始损伤开裂（第一阶段）。

3.2 $y=h_0$ 处发生开裂后的情形

如前所述，$t=t_1$ 时，$y=h_0$ 处发生开裂。假设 $t>t_1$ 时，$y=h(t)$处发生开裂。此时的弯曲损伤发展方程与(27)式类似，为

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}=\frac{3}{2h_0^3}\int_{-h_0}^{h}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}(y+y_0)^2\mathrm{d}y \tag{48}$$

将(6)式和(28)式代入上式，并对等式右边积分，得

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}=\frac{3(H+\xi)^{n+3}}{2(n+1)(n+3)t_0(1-\beta)^n} \tag{49}$$

式中：H 为无量纲开裂点位置 h/h_0)；ξ 仍为无量纲中性轴距离。

类似(31)式的推导过程，此时无量纲中性轴距离 ξ 的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}=\frac{(n+2)^2}{(n+1)(H+\xi)}\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{n}{1-\beta}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}+\frac{n+2}{H+\xi}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} \tag{50}$$

积分上式，此时无量纲中性轴距离 ξ 随时间的发展变化规律为

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\frac{(1+\xi_0)^{\frac{n+2}{n+1}}(H+\xi)^{n+2}}{2(n+1)(n+2)t_0(1-\beta)^n}e^{\frac{n+2}{n+1}\int_{t_0'}^{t}\frac{\mathrm{d}\xi}{H-\xi}} \tag{51}$$

受损梁横截面上任一位置 $h(t)$处的单向拉伸损伤变量 ω 为

$$\omega=\frac{1}{(n+1)t_0}\int_{t_0'}^{t}\frac{(H(t)+\xi(\tau))^n}{(1-\beta(\tau))^n}\mathrm{d}\tau \tag{52}$$

式中：t_0' 为开裂点初始损伤时间。

t 时刻的开裂点为 $h(t)$时，即无量纲开裂点位置为 $H(t)$时，有

$$1=\frac{1}{(n+1)t_0}\int_{t_0'}^{t}\frac{(H(t)+\xi(\tau))^n}{(1-\beta(\tau))^n}\mathrm{d}\tau \tag{53}$$

微分上式，则无量纲开裂点位置 $H(t)$ 随时间的发展变化规律为

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-\frac{\left(\dfrac{H+\xi}{1-\beta}\right)^{n}}{n\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{[H(t)+\xi(\tau)]^{n-1}}{(1-\beta(\tau))^{n}}\mathrm{d}\tau} \tag{54}$$

联立(48)、(51)和(54)式，解得弯曲损伤变量 β、无量纲中性轴距离 ξ 和无量纲开裂点位置 H 随时间 t 的变化规律。

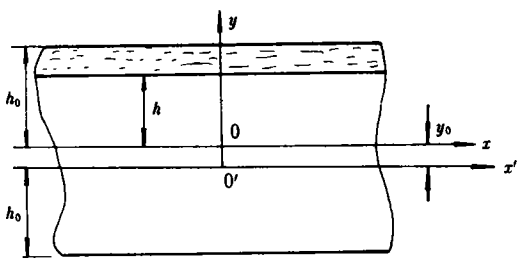


图 3　梁弯曲损伤的开裂模型

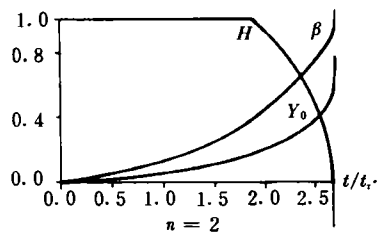


图 4　弯曲损伤沿梁高度的变化规律

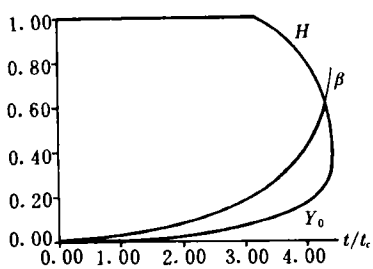


图 5　无量纲中性轴距离沿梁高度的变化规律

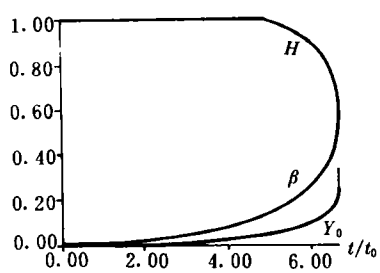


图 6　开裂点位置沿梁高度的变化规律

图 4、图 5 和图 6 分别给出了 $n=2$，5，9 时梁的弯曲损伤变量、无量纲中性轴距离和无量纲开裂点位置随时间的变化规律。如图所示，弯曲损伤和中性轴移动距离随时间增加不断增大；开裂点位置在初始开裂之后随时间下降，到梁完全断裂时，变化最快；并且 n 越大，变化越平缓，开裂时间越长。对不同 n 值的梁蠕变断裂时间计算结果示于表 2 中。

如表 2 所示，弯曲损伤的第二阶段与第一阶段具有同样的特性，n 越大，弯曲损伤变量和中性轴距离的值越小、有效应力的增加也越小，从而开裂时间越长。

同第一阶段一样，如果将第二阶段弯曲损伤发展方程(23)式记为

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}=B_2\frac{M^{n_2}}{(1-\beta)^{m_2}} \tag{55}$$

表 2　梁完全破坏的断裂时间

n	2	4	6	8
ξ_0	0.1593	0.0964	0.0694	0.0543
β_0	0.3728	0.2456	0.1842	0.1476
t_1/t_0	1.8620	2.7119	3.6148	4.4845
t_2/t_0	2.6826	3.8240	4.9545	6.0919
t_2'/t_0	2.8708	3.9000	5.0117	6.1383
误差%	7.02	1.99	1.18	0.76

将上式与(48)式比较可知，它们仍具有相似的形式。由一次近似确定上式中各材料常数，为

$$B_2 = \frac{3(1+\xi_0)^{n+3}M^{-n}}{2(n+1)(n+3)t_0(1-\beta_0)^{n-m_2}} \tag{56a}$$

$$m_2 = n + \frac{(n+3)^2}{3(n+2)} \frac{1-\beta_0}{(1+\xi_0)^{\frac{n}{n+1}}}\left[1 + \frac{3n}{n(n+1)} \frac{1}{1-(1+\xi_0)^{\frac{3n+4}{n+1}}}\right] \tag{56b}$$

$$n_1 = n \tag{56c}$$

积分(55)式，则梁完全断裂时弯曲损伤模型开裂时间 t_2' 为

$$t_2' = \frac{2(n+1)(n+3)(1-\beta_0)^n}{3(1+\xi_0)^{n+3}(m_2+1)}t_0 \tag{57}$$

上式的计算结果如表 2 所示，最大相对误差为 7.02%，表明本文提出的弯曲损伤模型同样可用于描述梁的第二 阶段的损伤开裂。

3.3　弯曲损伤开裂的简单损伤模型描述

如上所述，梁弯曲损伤开裂的第一阶段和第二阶段的简单损伤模型都是由损伤发展方程取一次近似得到的。为了便于实际工程应用，可将第一阶段和第二阶段的弯曲损伤发展规律用同一个简单损伤模型(23)式来统一描述。

初始条件和连接条件为：$t=0(\beta=0)$ 和 $y=h_0$ 处开始开裂($\beta=\beta_0$、$\xi=\xi_0$)时，弯曲损伤变化率与 Kachanov 损伤分析模型的第一阶段和第二阶段初始值相同，则各材料常数可确定为

$$B = \frac{3M^{-n}}{2(n+1)(n+3)t_0};m = n - (n+3)\frac{\ln(1+\xi_0)}{\ln(1-\beta_0)} \tag{58}$$

将上式代入(23)式，积分得弯曲损伤变量与时间的关系为

$$\beta = 1 - \left[1 - \frac{3(m+1)t}{2(n+1)(n+3)t_0}\right]^{\frac{1}{m+1}} \tag{59}$$

由上式得 h_0 处开始开裂的时间 t_1^* 为

$$t_1^* = \frac{2(n+1)(n+3)}{3(m+1)}\left[1-(1-\beta_0)^{m+1}\right]t_0 \tag{60}$$

整个梁完全断裂($\beta=1$)的时间 t_2^* 为

$$t_2^* = \frac{2(n+1)(n+3)}{3(m+1)}t_0 \tag{61}$$

表 3　梁完全破坏的断裂时间

n	2	4	6	8
$\hat{\xi}_0$	0.1593	0.0964	0.0694	0.0543
β_0	0.3728	0.2456	0.1842	0.1476
t_1/t_0	1.8620	2.7419	3.6148	4.4845
t_1^*/t_0	1.9242	2.7919	3.6600	4.5271
误差%	3.34	1.82	1.25	0.95
t_2/t_0	2.6826	3.8240	4.9534	6.0919
t_2^*/t_0	2.1814	3.2025	4.2140	5.2211
误差%	−18.68	−16.25	−14.93	−14.29

(60)和(61)式的计算结果如表 3 所示，其最大相对误差为 18.68%，而且整个梁的断裂时间 t_2^* 位于 Kachanov 精确分析模型计算结果的梁初始开裂时间 t_1 和梁完全断裂时间 t_2 之间，且靠近梁初始开裂时间 t_1，即用(61)式来预测梁的损伤断裂寿命稍偏保守，这在工程上是适用的。这表明本文提出的弯曲损伤模型用于描述梁的整体损伤开裂也是合理的。

4　简单结论

本文提出的弯曲损伤模型具有明显的物理意义，在一次近似条件下其材料常数可方便地用 Kachanov 的单向拉伸损伤模型的材料常数确定，当然也可用弯曲损伤试验直接确定其材料常数，计算分析简便，同时梁平剖面假设和弯曲损伤模型也有待进一步深入研究和实验验证，以便于对实际工程结构进行损伤分析。

参　考　文　献

1　郝松林，陈铸增．损伤及损伤力学．国防科技大学学报，1984，6 (2)

2　杨光松，周明鹤．玻璃纤维增强复合材料的损伤分析，国防科技大学学报，1988，10 (3)

3　杨光松．微结构弹性损伤模型．固体力学学报，1989，(2)

4　Kachanov L. M. Introduction to Continuum Damage Mechanics. Martinus Nijhoff Publishers，1986

A Creep Bending Damage Model on Beams

Yang Guangsong　Jin Xin　Lu Yinchu

(Department of Astrautics)

Abstract

In this paper, based on the basic assumptions of pure bending damage of beams, the elementary equations are drived, in which the definition of bending damage variable is defined by reduction of moment of inertia similar to that of tensile damage variable defined by reduction of loading area, a simple bending damage model is proposed similar to kachanov's tensile damage model. As an example, a bending damage analysis of a beam for creep pure bending is made, the material's constants of the simple bending damage model can be determined in first approximation to kachanov's tensile damage model, the calculating results are compared in good agreement with the results obtained by kachanov's tensile damage model. It shows that the bending damage model is reasonable.

Key words　pure bending beams, creep, tensile damage, bending damage.