## 真比例导引律的降维分析方法<sup>\*</sup>

黎克波,陈 磊,张 翼

(国防科技大学 航天与材料工程学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:提出了三维真比例导引律的降维分析方法。首先研究视线的运动规律,提出了视线的两种旋转 角速度及其计算方法,建立了视线运动方程与新的弹目相对运动方程。其次通过对弹目相对运动的分析,发 现在三维空间中存在视线瞬时旋转平面,可以在该平面内构造二维制导律,以应用于三维拦截问题的制导控 制。然后将空间真比例导引律不加任何近似与线性化直接引入视线瞬时旋转平面,使其维度从三维降为二 维,并对其制导特性进行了分析。最后通过仿真对比分析,验证了真比例导引律降维分析方法的有效性。

关键词:导弹制导;视线运动方程;真比例导引;降维分析方法

中图分类号: V448.133 文献标志码: A 文章编号: 1001 - 2486(2012) 03 - 0001 - 05

# Dimension-reduction method of true proportional navigation guidance law

#### LI Kebo, CHEN Lei, ZHANG Yi

(College of Aerospace and Materials Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China) **Abstract:** The dimension-reduction method of the true proportional navigation (TPN) guidance law is proposed. Firstly, the rotation principle of the line of sight (LOS) was investigated, two kinds of angular velocities of LOS were presented, and so were their calculation methods. Then, the LOS kinematic equation was advanced, and the new relative dynamic equation between interceptor and target was proposed. It was found that there is an instantaneous rotation plane of LOS (IRPL) in the three-dimensional (3D) space, in which two-dimensional (2D) guidance laws can be constructed to serve for 3D interception guidance. The spatial 3D true proportional navigation (TPN) guidance law was directly introduced into IRPL without any approximation and linearization to transform into dimension-reduced 2D TPN, and the characteristics were studied. Finally, an exoatmospheric interception was taken for simulation to demonstrate the effectiveness of the theory presented in this paper.

Key words: missile guidance; kinematic equation of LOS; true proportional navigation; dimension-reduction method

比例导引律(PN)是目前最为实用和研究最 为广泛的制导律,经过几十年的发展,已经得到了 PN 的多种形式。20 世纪 90 年代以前学者对 PN 的研究主要集中在二维平面,集大成者是 C D Yang 和 C C Yang<sup>[1]</sup>,他们提出了比例导引律的一 种统一框架,并将其对制导律的数学分析方法推 广至三维真比例导引律(TPN)<sup>[2-3]</sup>。

20世纪90年代中后期,一些学者开始对三 维弹目相对运动与制导律的构造提出新的思想。 Duflos等<sup>[4]</sup>基于导弹制导的捕获要求,提出了一 种制导建模方法,并推导了三维空间中的扩展真 比例导引律(GTPN),使其具有与 PPN 相同的捕 获区域。Chiou 和 Kuo<sup>[5-7]</sup>基于古典微分几何曲 线理论,将导弹和目标的运动轨迹视为三维空间 中的曲线,提出了弧长体系下导弹制导的微分几 何制导指令。李超勇等<sup>[8]</sup>将 Chiou 和 Kuo 所提出 的微分几何制导指令从弧长体系转化至时域内, 并推导了在拦截高速目标时的初始捕获必要条件 与奇异条件。Tyan<sup>[9]</sup>基于修正极坐标系(MPC), 利用变量替换构建弹目相对运动方程,提出了新 的制导律统一框架,并对 TPN、GTPN、扩展理想比 例导引律(GIPN)以及 PPN 的性能和捕获区域进 行了分析。以上学者研究的着眼点各不相同,包 括:导弹的捕获要求、弧长体系下的微分几何曲线 理论、修正极坐标系等。

与以往的文献不同,本文首先对视线的旋转 规律进行研究,提出了视线的两种旋转方式和旋 转角速度,并建立了视线运动方程。同时结合弹 目相对运动,构建了新的相对运动方程。通过对 该方程的分析,发现弹目相对运动可以解耦为视 线瞬时旋转平面内的相对运动与该平面的转动, 并且在视线瞬时旋转平面内构造二维制导律,可

<sup>\*</sup> 收稿日期:2011-10-15

基金项目:国家 863 计划资助项目

作者简介:黎克波(1986—),男,贵州金沙人,博士研究生,E-mail: likeboreal@qq.com; 陈磊(通信作者),男,教授,博士,硕士生导师,E-mail: clwhl@263.net

以解决三维拦截问题。本文将三维 TPN 不加任何近似与线性化,直接引入视线瞬时旋转平面,成为降维 TPN,并通过拦截高速大机动目标的仿真算例,验证真比例导引律降维分析方法的有效性。

#### 1 视线运动方程

拦截弹和目标在发射惯性系中运动,其相对 位置关系如图1所示。



图1 弹目相对位置关系

Fig. 1 The relative position between interceptor and target 由图可知

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_t - \boldsymbol{r}_m = r\boldsymbol{e}_r \tag{1}$$

其中,r为弹目相对距离,e,为弹目相对视线方向 单位矢量。e,在空间中的旋转是三维的,但若不 考虑其绕自身的旋转,则降低为二维。

设视线瞬时旋转角速度矢量为 $\boldsymbol{\omega}_s = \boldsymbol{\omega}_s \boldsymbol{e}_{\omega}, \boldsymbol{e}_{\omega}$ 为该角速度的方向,有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}_s \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{\omega}_s \boldsymbol{e}_\omega \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{\omega}_s \boldsymbol{e}_\theta \qquad (2)$$

其中, $\omega_s$ 即为视线的瞬时转率,根据定义, $\omega_s \ge 0$ 。  $e_r, e_{\theta}, e_{\omega}$ 为相互垂直正交的单位向量,以拦截弹 质心为原点,组成视线旋转坐标系。 $e_r$ 和 $e_{\theta}$ 组成 视线瞬时旋转平面(IRPL, Instantaneous Rotation Plane of LOS), $e_{\omega}$ 为该平面的法向。由(2)式,有

$$\boldsymbol{e}_{\theta} = \boldsymbol{e}_{\omega} \times \boldsymbol{e}_{r} \tag{3}$$

在三维空间中,视线瞬时旋转平面会发生转动,因而该平面的法向 $e_{\omega}$ 也会发生旋转。由于 $e_{\omega}$ 是 $e_{r}$ 角速度方向的单位矢量,因此只能在垂直于 $e_{r}$ 的平面内发生旋转。设 $e_{\omega}$ 的旋转角速度为 $\Omega_{s} = \Omega_{s}e_{r}$ ,则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\omega}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega}_{s} \times \boldsymbol{e}_{\omega} = \boldsymbol{\Omega}_{s} \boldsymbol{e}_{r} \times \boldsymbol{e}_{\omega} = -\boldsymbol{\Omega}_{s} \boldsymbol{e}_{\theta} \quad (4)$$

根据定义, $\Omega_s$ 可正可负。

对上式求导,有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{e}_{\omega} \times \boldsymbol{e}_{r})$$

$$=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{e}_{r}+\boldsymbol{e}_{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{r}}{\mathrm{d}t}$$
(5)

将(2)式和(4)式代入(5)式,有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\theta}}{\mathrm{d}t} = -\omega_{s}\boldsymbol{e}_{r} + \boldsymbol{\Omega}_{s} \cdot \boldsymbol{e}_{\omega} \tag{6}$$

将(2)、(4)式和(6)式联合起来,可以得到 视线的运动方程:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}_{s}\boldsymbol{e}_{\theta} \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\theta}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{\omega}_{s}\boldsymbol{e}_{r} + \boldsymbol{\Omega}_{s}\boldsymbol{e}_{\omega} \qquad (7) \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\omega}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{\Omega}_{s}\boldsymbol{e}_{\theta} \end{cases}$$

由以上分析可知,视线的旋转可以分为两种 方式,即视线在其瞬时旋转平面内的旋转,角速度 大小为 $\omega_s$ ,旋转轴为 $e_{\omega}$ ;视线瞬时旋转平面的旋 转,角速度大小为 $\Omega_s$ ,旋转轴为 $e_r$ 。 $\omega_s$ 即为视线 的瞬时转率, $\Omega_s$ 即为视线瞬时旋转平面的瞬时 转率。

#### 2 弹目相对运动方程

对(1)式求导,有

$$\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_t - \boldsymbol{V}_m$$
 (8)

其中, $V_i$ 为目标速度矢量, $V_m$ 为拦截弹速度矢量,V为弹目相对速度矢量。将(2)式和(7)式代入(8)式,有

$$\dot{r}\boldsymbol{e}_{r}+r\boldsymbol{\omega}_{s}\boldsymbol{e}_{\theta}=\boldsymbol{V}_{t}-\boldsymbol{V}_{m}=\boldsymbol{V}$$
(9)

由(1)式和(9)式可知  $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{\theta}$ 的计算方法:

$$\boldsymbol{e}_{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}, \boldsymbol{e}_{\theta} = \frac{\boldsymbol{V} - (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{e}_{r})\boldsymbol{e}_{r}}{|\boldsymbol{V} - (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{e}_{r})\boldsymbol{e}_{r}|} \qquad (10)$$

对(9)式继续求导,有

$$\boldsymbol{a}_{t} - \boldsymbol{a}_{m} = \ddot{r}\boldsymbol{e}_{r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{r}}{\mathrm{d}t} + (\dot{r}\boldsymbol{\omega}_{s} + \dot{r}\boldsymbol{\omega}_{s})\boldsymbol{e}_{\theta} + r\boldsymbol{\omega}_{s}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\theta}}{\mathrm{d}t}$$
(11)

其中, $a_i$ 为目标的加速度, $a_m$ 为拦截弹的加速度。 将视线的运动方程(7)代入(11)式,有

$$\boldsymbol{a}_{t} - \boldsymbol{a}_{m} = (\ddot{r} - r\omega_{s}^{2})\boldsymbol{e}_{r} + (\dot{r\omega_{s}} + 2\dot{r}\omega_{s})\boldsymbol{e}_{\theta} + r\omega_{s}\Omega_{s}\boldsymbol{e}_{\omega}$$
(12)

(12)式即为视线旋转坐标系内的弹目相对运动 方程,可以改写为如下标量方程组:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\omega_s^2 = a_{tr} - a_{mr} \\ \dot{r}\omega_s + 2\dot{r}\omega_s = a_{t\theta} - a_{m\theta} \\ r\omega_s \Omega_s = a_{t\omega} - a_{m\omega} \end{cases}$$
(13)

下标"*r*,*θ*,*ω*"分别表示沿视线旋转坐标系三轴的 分量。该相对运动方程与经典的视线坐标系内的 方程<sup>[11]</sup>相比,形式更加简洁,且没有三角函数项。

#### 3 视线两种旋转角速度的计算

视线旋转坐标系  $\{e_r, e_\theta, e_\omega\}$ 与视线坐标系  $o_A - x_s y_s z_s$  的关系如图 2 所示。





Fig. 2 The relationship among the LOS rotation coordinates, the LOS coordinates and the launch inertial coordinates

图 2 中,发射惯性系  $o_A - x_A y_A z_A$  通过"23"旋转得到视线坐标系  $o_A - x_s y_s z_s$ ,欧拉角分别为:视线高低角  $\varepsilon$ 、视线方位角 $\beta$ 。于是有

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{s} = \cos\varepsilon \cos\beta \cdot \boldsymbol{x}_{A} + \sin\varepsilon \cdot \boldsymbol{y}_{A} \\ -\cos\varepsilon \sin\beta \cdot \boldsymbol{z}_{A} \\ \boldsymbol{y}_{s} = -\sin\varepsilon \cos\beta \cdot \boldsymbol{x}_{A} + \cos\varepsilon \cdot \boldsymbol{y}_{A} \quad (14) \\ +\sin\varepsilon \sin\beta \cdot \boldsymbol{z}_{A} \\ \boldsymbol{z}_{s} = \sin\beta \cdot \boldsymbol{x}_{A} + \cos\beta \cdot \boldsymbol{z}_{A} \end{cases}$$

其中, $x_A$ 、 $y_A$ 、 $z_A$  表示发射惯性系三轴的方向, $x_s$ 、 $y_s$ 、 $z_s$  表示视线坐标系三轴的方向。

设视线坐标系的旋转角速度ω为

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\dot{\beta}} + \boldsymbol{\dot{\varepsilon}} = \boldsymbol{\dot{\beta}} \boldsymbol{y}_A + \boldsymbol{\dot{\varepsilon}}_s \boldsymbol{z}_s$$
  
=  $\boldsymbol{\dot{\beta}} \sin \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{\dot{\beta}} \cos \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{y}_s + \boldsymbol{\dot{\varepsilon}} \boldsymbol{z}_s$  (15)

虽然 ω 在 x, 方向上有分量,但由于不需要考 虑视线绕自身的滚动旋转,因此视线的旋转角速 度(除去绕 x, 轴的滚动角速度)可为

$$\boldsymbol{\omega}_{s} = \boldsymbol{\beta} \cos \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{y}_{s} + \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{z}_{s} \qquad (16)$$

由(2)式可知

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{s} = \sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}\cos\varepsilon\right)^{2} + \dot{\varepsilon}^{2}} \\ \boldsymbol{e}_{\omega} = \frac{\boldsymbol{\omega}_{s}}{\boldsymbol{\omega}_{s}} = \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}\cos\varepsilon \cdot \mathbf{y}_{s} + \dot{\varepsilon}\mathbf{z}_{s}}{\sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}\cos\varepsilon\right)^{2} + \dot{\varepsilon}^{2}}} \end{cases}$$
(17)

于是有

$$\boldsymbol{e}_{\theta} = \boldsymbol{e}_{\omega} \times \boldsymbol{e}_{r} = \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{y}_{s} - \dot{\boldsymbol{\beta}} \cos \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{z}_{s}}{\sqrt{\left(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cos \boldsymbol{\varepsilon}\right)^{2} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{2}}} \qquad (18)$$

$$\omega_{s} = \beta \cos \varepsilon \cdot \mathbf{y}_{s} - \beta \varepsilon \sin \varepsilon \cdot \mathbf{y}_{s} + \beta \cos \varepsilon \cdot \dot{\mathbf{y}}_{s} + \varepsilon z_{s} + \varepsilon z_{s} = (\beta \cos \varepsilon - 2\beta \varepsilon \sin \varepsilon) \cdot \mathbf{y}_{s} + (\beta^{2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon + \varepsilon) \cdot z_{s}$$
(19)

再对ω。按视线的运动方式求导,有

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}_{s}\boldsymbol{e}_{\omega}) = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{s}\boldsymbol{e}_{\omega} + \boldsymbol{\omega}_{s}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\omega}}{\mathrm{d}t}$$
$$= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{s}\boldsymbol{e}_{\omega} + \boldsymbol{\omega}_{s}\boldsymbol{\Omega}_{s} \times \boldsymbol{e}_{\omega}$$
$$= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{s}\boldsymbol{e}_{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{s}\boldsymbol{\Omega}_{s}\boldsymbol{e}_{\theta} \qquad (20)$$

可得视线转率导数与视线挠率的计算表 达式:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{s} = \dot{\omega}_{s} \cdot \boldsymbol{e}_{\omega} = \frac{\dot{\beta}\ddot{\beta}\cos^{2}\varepsilon - \dot{\beta}^{2}\dot{\varepsilon}\sin\varepsilon\cos\varepsilon + \dot{\varepsilon}\ddot{\varepsilon}}{\sqrt{(\dot{\beta}\cos\varepsilon)^{2} + \dot{\varepsilon}^{2}}} \\ \Omega_{s} = \frac{-\dot{\omega}_{s} \cdot \boldsymbol{e}_{\theta}}{\omega_{s}} \\ = \frac{(2\dot{\varepsilon}^{2} - \dot{\beta}^{2}\cos^{2}\varepsilon)\dot{\beta}\sin\varepsilon - (\ddot{\beta}\dot{\varepsilon} + \ddot{\varepsilon}\dot{\beta})\cos\varepsilon}{\sqrt{(\dot{\beta}\cos\varepsilon)^{2} + \dot{\varepsilon}^{2}}} \end{cases}$$

(21)

根据以上分析,  $e_r, e_{\theta}, e_{\omega}, \omega_s, \omega_s, \Omega_s$ 皆可以表示为  $\varepsilon, \beta, \dot{\varepsilon}, \dot{\beta}, \ddot{\varepsilon}, \ddot{\beta}$ 的函数。导引头可以通过测量视线高低角  $\varepsilon$  和视线方位角  $\beta$ ,并进行相应滤波,计算视线运动方程的各参数。

### 4 真比例导引律的降维

本文采用 Duflos<sup>[4]</sup> 对目标捕获的定义:拦截 弹对目标的捕获是拦截弹通过制导控制,在有限 时间  $t_f$  内,使弹目相对距离  $r(t_f)$ 降低至 0。表达 式如下:

$$\exists t_f < \infty , \quad r(t_f) = 0 \tag{22}$$

为了避免视线转率趋于无穷大,还需满足如下 条件:

$$r(t_f)\omega_s(t_f) = 0 \tag{23}$$

由相对运动方程(13)式可知,方程组:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\omega_s^2 = a_{tr} - a_{mr} \\ \dot{r}\omega_s + 2\dot{r}\omega_s = a_{ta} - a_{ma} \end{cases}$$
(24)

决定弹目相对距离 r 和瞬时视线转率  $\omega_s$  的变化, 而方程

$$r\omega_s\Omega_s = a_{t\omega} - a_{m\omega} \tag{25}$$

决定视线瞬时旋转平面的旋转角速率 $\Omega_s$ 的变化。  $r_x\omega_s 与 \Omega_s$ 的计算是解耦的。于是,通过该方程可 以将弹目相对运动的二阶非线性耦合常微分方程 组解耦为两种运动:视线瞬时旋转平面内的相对 运动;视线瞬时旋转平面的转动。

根据捕获的定义,即使在拦截末段 $\Omega_s \neq 0$ ,只

要可以控制视线转率  $\omega_s$  收敛,则导弹仍然可以捕获目标。并且,视线旋转坐标系  $e_r$ 、 $e_{\theta}$ 、 $e_{\omega}$  的旋转总是趋向于减小相对加速度在  $e_{\omega}$  上的分量,使  $\Omega_s$  随弹目相对距离的减小而趋于某一较小的有界值。由于相对运动方程(13)高度非线性,将通过数值仿真验证这一理论。根据以上分析,可以忽略拦截弹在  $e_{\omega}$  方向上的控制而使  $a_{ma} = 0$ 。

由(24)式的第一式,有  
$$\ddot{r} = a_{rr} - a_{mr} + r\omega_s^2$$
 (26)

$$\frac{\mathrm{d}(a_{tr} - a_{mr})}{\mathrm{d}t} + 2\omega_s(a_{t\theta} - a_{m\theta}) - 3\dot{r}\omega_s^2 \qquad (27)$$

根据(26)、(27)两式可知,当存在不可忽略的 $\omega_s$ 时,弹目相对加速度沿 $e_r$ 方向的分量" $a_{tr} - a_{mr}$ "对r的影响与沿 $e_{\theta}$ 方向上的分量" $a_{t\theta} - a_{m\theta}$ "相比,是一个高阶小量;当 $\omega_s$ 趋近于0时,由于弹目相对速度r足够小,可以忽略" $a_{tr} - a_{mr}$ "对拦截产生的影响。因此对于以最终捕获目标为目的的导弹,可以不控制沿视线方向的运动,使 $a_{mr} = 0$ 。于是,根据对弹目相对运动方程的分析,解决制导问题的关键是求解 $e_{\theta}$ 方向上的制导指令加速度 $a_{m\theta}$ 。

传统的空间制导律通常选择在视线坐标系内 建立三维弹目相对运动方程<sup>[11]</sup>:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r(\omega_{ys}^2 + \omega_{zs}^2) = a_{tx} - a_{mx} \\ \dot{r}\omega_{zs} + 2\dot{r}\omega_{zs} + r\omega_{xs}\omega_{ys} = a_{ty} - a_{my} \\ \dot{r}\omega_{ys} + 2\dot{r}\omega_{ys} - r\omega_{xs}\omega_{zs} = -a_{tz} + a_{mz} \end{cases}$$
(28)

其中,  $\omega_{xs} = \beta \sin \varepsilon$ , 为  $\omega$  在  $x_s$  轴的分量;  $\omega_{ys} = \beta \cos \varepsilon$ , 为  $\omega$  在  $y_s$  轴的分量;  $\omega_{zs} = \varepsilon$ , 为  $\omega$  在  $z_s$  轴 的分量;  $[a_{tx}, a_{ty}, a_{tz}]^{T}$ 、  $[a_{mx}, a_{my}, a_{mz}]^{T}$  为目标与 拦截弹的加速度在视线坐标系内的表示。空间 TPN 制导指令表达式如下:

$$\begin{cases} a_{mx} = 0\\ a_{my} = N |\dot{r}| \omega_{zs} \\ a_{mz} = -N |\dot{r}| \omega_{zz} \end{cases}$$
(29)

其中,N为有效导航比,满足比例导引弹道收敛条件:N>2。TPN 在 y<sub>s</sub>、z<sub>s</sub>上的两个制导指令加速 度是相互独立的,其共同作用的结果相当于在拦 截弹上作用了一个合加速度:

 $\boldsymbol{a}_{m} = -Nr\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{y}_{s} + Nr\boldsymbol{\beta}\cos\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{z}_{s}$ 

$$= N\dot{r} \sqrt{(\dot{\beta}\cos\varepsilon)^{2} + \dot{\varepsilon}^{2}} \cdot \left(\frac{-\varepsilon \cdot \mathbf{y}_{s} + \beta\cos\varepsilon \cdot \mathbf{z}_{s}}{\sqrt{(\dot{\beta}\cos\varepsilon)^{2} + \dot{\varepsilon}^{2}}}\right)$$
(30)

将(17)式和(18)式代入(30)式,有  
$$a_m = -Nr\omega_s \cdot e_{\theta}$$
 (31)

(31)式中, $\omega_s$  为视线在其瞬时旋转平面内的转率, $e_\theta$  为视线法向,同样位于视线瞬时旋转平面内。因此,三维 TPN 可以不加任何近似与线性化,直接转化成视线瞬时旋转平面内的二维 TPN。由(17)式和(18)式可知,真比例导引律的降维只需要视线高低角和方位角的一阶微分信息,可以应用于工程实际。

将(31)式代入(24)式的第二式可得

$$\dot{r\omega_s} + 2\dot{r}\omega_s = a_{\iota\theta} + N\dot{r}\omega_s \qquad (32)$$

若初始时刻视线转率为ω<sub>s</sub>,且目标不机动,可以 由(32)式推导出

$$\dot{r\omega_s} = (N-2)\dot{r}\omega_s \tag{33}$$

进一步推导出

$$\omega_s = \omega_{s0} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{(N-2)} \tag{34}$$

由(34)式可知,当N > 2时,对非机动目标, TPN 可以使视线瞬时旋转平面内的视线转率随弹 目相对距离的减小而逐渐降低至0。这与平面真 比例导引律的性能分析相一致。至此,空间三维 TPN 已经转化为视线瞬时旋转平面内的二维 TPN,可以直接采用对平面 TPN 的分析方法,来研 究三维 TPN 的性能。根据 Guelman 对平面 TPN 的研究<sup>[12]</sup>,TPN 对非机动目标的初始捕获条件为  $(r_0\omega_0)^2 \leq (2N-1)r_0^2$  (35)

 $(r_0\omega_{s0})^2 \leq (2N-1)\dot{r}_0^2$  (35) (35)式对于视线瞬时旋转平面内的降维 TPN 而 言仍然成立。三维真比例导引律通过降维以后, 可以应用对平面 TPN 的分析方法对其性能进行 研究,降低了分析问题的难度。

#### 5 仿真分析

以拦截大气层外高速机动目标仿真为例,初 始状态参数如表1所示。

表1 拦截初始条件

Tab. 1	Inertial interception condition		
拦截弹	X	Y	Ζ
位置(km)	2837.575	735. 590	119. 855
速度(km/s)	5.055	-0.872	0. 158
目标	X	Y	Ζ
位置(km)	2882.410	735.033	80. 905
速度(km/s)	1.156	0.337	5.621

设目标在发射惯性系的  $y_A$ ,  $z_A$  方向有常加速 度  $a_t = \begin{bmatrix} 0 & 4g_0 \end{bmatrix}^T$ , 制导系数 N = 4, 不考虑 视线角测量噪声, 取导引头采样周期为 10ms, 盲 区为 500m, 计算脱靶量。仿真结果如图 3 和图 4 所示。







图 4 空间 TPN 与降维 TPN 的瞬时过载 Fig. 4 The instantaneous overloads of TPN and dimension-degenerated TPN

从以上仿真结果可以发现,三维 TPN 和降维 TPN 具有几乎一致的拦截弹道和过载分布。仿真 结果显示,两种 TPN 的脱靶量皆为 0.1760m。

视线瞬时旋转平面的旋转角速度 *Ω*。在拦截 过程中的变化趋势如图 5 所示。



图 5 IRPL 瞬时转率的变化

Fig. 5 The instantaneous IRPL rate of TPN

由图可知,IRPL的瞬时转率在拦截过程中逐 渐降低至0,代表了视线瞬时旋转平面逐渐趋于 稳定的过程。

#### 6 结 论

本文基于对视线旋转基本原理的研究,提出 了视线的两种旋转角速度及其计算方法,得到了 视线运动方程。将视线运动与弹目相对运动结合 起来,得到了新的弹目相对运动方程。通过对弹 目相对运动方程的分析,发现存在视线瞬时旋转 平面,在该平面内可以构造二维制导律,应用于三 维拦截问题。

将空间真比例导引律不加近似与线性化地直接引入视线瞬时旋转平面,得到了具有二维形式的降维 TPN,可以应用研究平面 TPN 的经典方法 对其性能进行分析,降低了分析问题的难度。通过数值仿真,验证了真比例导引律降维分析方法的有效性。

#### 参考文献(References)

- [1] Yang C D, Yang C C. A unified approach to proportional navigation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1997, 33(2):557-567.
- [2] Yang C D, Yang C C. Analytical solution of 3D true proportional navigation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1996, 32(4): 1509-1522.
- [3] Yang C D, Yang C C. Analytical solution of three-dimensional realistic true proportional navigation [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics. 1996, 19(3):569 - 577.
- [4] Duflos E, Penel P, Vanheeghe P. 3D guidance law modeling[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1999, 35(1): 72 - 83.
- [5] Chiou Y C, Kuo C Y. Geometric approach to three dimensional missile guidance problems [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(2): 335-341.
- [6] Kuo C Y, Chiou Y C. Geometric analysis of missile guidance command [ J ]. IEEE Proceedings: Control Theory and Applications, 2000, 147(2):205-211.
- [7] Kuo C Y, Soetanto D, Chiou Y C. Geometric analysis of flight control command for tactical missile guidance [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2001, 9(2):234 -243.
- [8] 李超勇, 荆武兴, 齐治国,等. 空间微分几何制导律应用研究[J]. 宇航学报, 2007, 28(5): 1235 1240.
  LI Chaoyong, JING Wuxin, QI Ziguo, et al. Application of the 3D differential geometric guidance commands[J]. Journal of Astronautics, 2007, 28(5): 1235 1240. (in Chinese)
- [9] Tyan F. The capture region of a general 3D TPN guidance law for missile and target with limited maneuverability [C]// Proceedings of the American Control Conference, Arlington, VA June 25 - 27, 2001.
- [10] Tyan F. Unified approach to missile guidance laws: a 3D extension [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2005, 41(4): 1178 – 1199.
- [11] Chen L, Zhang B. Novel TPN control algorithm for exoatmospheric intercept[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2009, 20(6): 1290 – 1295.
- [12] Guelman M. The closed-form solution of true proportional navigation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1976, 12(4): 472-482.