doi:10.11887/j.cn.201401016 http://journal.nudt.edu.cn

基于贝叶斯原理的放大转发中继联合信道估计*

刘海滨[1],王梓斌[2],郑林华[1],袁 福[1]
(1. 国防科技大学 电子科学与工程学院,湖南 长沙 410073;
2. 北京系统工程研究所 信息系统安全技术国防重点实验室,北京 100101)

摘 要:在贝叶斯原理的框架下,依据放大转发中继联合信道等价于两段瑞利信道相叠加的特征,将其概率密度分布这一先验知识与接收端的训练序列相结合,得到了最小均方和最大后验两种估计方法。由于两种方法的准确贝叶斯CRB难以求解获得闭合表达式,从最大熵原理出发,结合复高斯分布性质,推导了MLE准则下的CRB相对应的近似贝叶斯CRB,以衡量不同方法的估计精度。仿真结果表明相比于原有的MLE方法,最大后验估计方法在低信噪比下性能改善明显。

关键词:放大转发;联合信道估计;贝叶斯原理
中图分类号:TN911 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2014)01-088-05

Cascade channel estimators of amplify-and-forward relaying system based on Bayesian theory

LIU Haibin[1], *WANG Zibin*[2], *ZHENG Linhua*[1], *YUAN Fu*[1]
(1. College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. Science and Technology on Information System Security Laboratory, Beijing Institute of System Engineering, Beijing 100101, China)

Abstract: The cascade channel estimation of Amplify-and-Forward (AF) relay system was dealt with by using Bayesian framework. According to the maximum a posteriori (MAP) and the minimum mean of square error (MMSE) rules, two estimators were derived combining the received training signal with the probability distribution function (PDF) knowledge that cascade channel comprises two independent Rayleigh channels. Due to the intractability of exact Bayesian Cramer-Rao Bound (CRB), alternatively, the approximated Bayesian one was obtained based on the principle of maximum entropy to compare with the CRB of MLE. The numeral simulation demonstrates that the new MAP estimator can bring about significantly improved performance, especially in the low signal-to-noise ratio regime.

Key words: amplify-and-forward; cascade channel estimation; Bayesian theory

由于中继技术[1]可以缓解无线信道对发射信号带来的衰减影响,近年来,科研人员在该领域开展了大量研究,发现可以通过中继天线波束成形[2]、中继选择[3]和网络编码[4]等技术实现协同分集,进而扩展通信范围,提高该区域内的信号质量。然而应用上述技术需要通信端和中继已知当前的信道状态信息,因此中继通信系统信道估计占有不可置疑的重要地位。

通信系统进行信道估计常用导频法。信息接收端将经过信道作用的导频信号同原有形式相比较,得到当前的信道系数[5-6]。文献[7]给出了基于最小均方(MSE)准则的导频估计方法,同时讨论了导频序列的形式和与数据部分的相对位置给估计性能带来的影响。文献[8]针对中继通信在时隙上可分为发送端至中继和中继至接收端两阶段的特征,分别推导了MMSE准则下联合信道(Cascade Channel)和分段信道(Disintegrate Channel)的估计方法,并且讨论了训练序列长度和两种估计方式优势比较的关系。文献[9]考虑了通信端和中继均架设多天线的情况,为了消除无线信道引入的不利影响,综合考虑中继处的波束成形和信道估计问题,对中继至接收端和发送端至中继这两个阶段的导频形式分别进行了设计,并给出了在线性最小均方(LMMSE)准则下联合信道估计所能达到的性能。与文献[9]有所不同,文献[10]着眼于多个单天线中继的情况,通信系统采用了能够获得完全协同分集的分布式空时编码形式,得到了LMMSE准则下的联合信道

* **收稿日期**:2013-04-28
作者简介:刘海滨(1983—),男,吉林省吉林市人,博士研究生,E-mail:china132011@163.com;
郑林华(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:lhzheng@nudt.edu.cn

估计表达式,并给出了训练序列在长度和数学形式上需要满足的性质。

现实中较为常见的情形为:两移动通信用户之间由于阻隔严重,需要经过其他用户转发建立连接。其特点表现为:一方面,移动通信载体体积受限,难以实现阵列增益;另一方面,普通用户设备作为中继,不可能像基站一样对接收到的信号进行幅度较为明显的放大处理,直接导致通信接收端获得的导频信号信噪比不高。这就要求新的信道估计方法相比于常规的 MLE 方法具有在较低信噪比环境下更为优良的性能。

本文给出了基于贝叶斯原理[11]的后验式联合信道估计方法,通过对联合信道先验知识的了解来提高估计性能。经典的瑞利信道模型认为两点间信道服从方差一定的零均值复高斯分布,中继联合信道等效于两个随机变量乘积,服从某种概率分布[12],故可以将实际接收到的数据与此概率分布相结合,得到在整体上优于先验式(MLE)的估计方法。另外,由于概率分布中包含特殊函数,难以得到克劳美罗限(Cramer – Rao Bound)的闭合表达式[11]。尽管如此,本文采用复高斯分布近似的方法获得了近似贝叶斯 CRB。经过与先验式方法的 CRB 对比,验证了提出的新方法的优势。

1　系统模型

考虑通信用户 A 和 B 之间存在严重衰落,需要从相同身份且能够同时相连接的其他用户中选择若干作为中继。首先,用户 A 占用一个时隙向这些用户发送训练序列。在另一时隙,用户 B 也向这些用户发送训练序列。此时通过一定的准则选出较为合适的中继用户,选择的方法可以参考文献[3]。假设用户 C 被选出且已经完成了 $A-C$ 段的 h 和 $B-C$ 段的 g 的信道估计。在接下来的两个时隙中,用户 C 分别向用户 A 和用户 B 放大转发对方先前的序列信号以便于它们完成信道估计。假设在估计的整个过程中信道系数保持不变,且用户 A、B、C 间已经完成同步过程。全部连接建立过程如图 1 所示。

此时假设信道系数 h 和 g 分别服从方差为 σ_h^2 和 σ_g^2 的零均值复高斯分布,有 $h\sim\mathcal{CN}(0,\sigma_h^2)$ 和 $g\sim\mathcal{CN}(0,\sigma_g^2)$。令向量 $\boldsymbol{t}_1$ 和 $\boldsymbol{t}_2$ 表示用户 A 和用户 B 发送的长度为 N 的训练序列,即 $\boldsymbol{t}_1=(t_{11},t_{12},\cdots,t_{1N})^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{t}_2=(t_{21},t_{22},\cdots,t_{2N})^{\mathrm{T}}$,且 $|t_{1i}|^2=P_1$、$|t_{2i}|^2=P_2$。

用户 C 在前两个时隙接收到的信号为

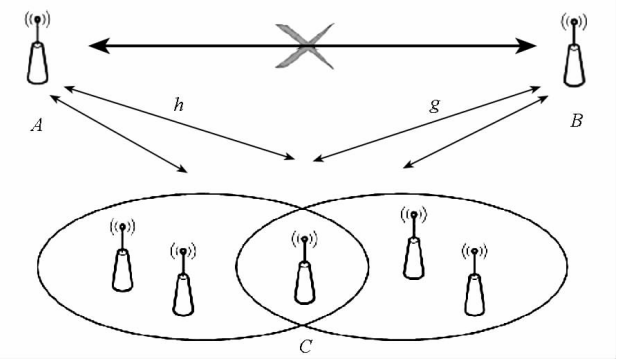


图 1　中继网络传输模型

Fig. 1　Relay communication networks model

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_1=h\boldsymbol{t}_1+\boldsymbol{n}_{11}\\ \boldsymbol{r}_2=g\boldsymbol{t}_2+\boldsymbol{n}_{21}\end{cases}\tag{1}$$

中继 C 对接收信号分别放大并转发,用户 A 和用户 B 实际接收到的信号为

$$A:y_1=\alpha_1h\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{n}_{12}=\alpha_1hg\boldsymbol{t}_2+\alpha_1h\boldsymbol{n}_{21}+\boldsymbol{n}_{12}$$

$$B:y_2=\alpha_2g\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{n}_{22}=\alpha_2hg\boldsymbol{t}_1+\alpha_2g\boldsymbol{n}_{11}+\boldsymbol{n}_{22}$$

其中 $\boldsymbol{n}_{11}$ 和 $\boldsymbol{n}_{21}$、$\boldsymbol{n}_{12}$、$\boldsymbol{n}_{22}$ 分别表示在中继用户 C、用户 A 和用户 B 接收端混入的加性复高斯白噪声,不失一般性,可认为 $\boldsymbol{n}_{ij}\sim\mathcal{CN}(0,\sigma_n^2\boldsymbol{I}_N)$。$\alpha_i(i=1,2)$ 代表中继用户 C 的放大系数,有 $\alpha_1=\sqrt{P_r/\sigma_h^2\cdot P_1+\sigma_n^2}$ 和 $\alpha_2=\sqrt{P_r/\sigma_g^2\cdot P_2+\sigma_n^2}$,其中 P_r 为中继放大功率。下面仅对用户 A 的接收信号进行信道估计,用户 B 的处理过程类似。在不引起歧义的要求下,用户 A 的接收信号表达可以简化为

$$y_1=\alpha h\boldsymbol{r}+\boldsymbol{n}_2=\alpha hg\boldsymbol{t}_2+\alpha h\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2\tag{2}$$

根据训练序列的性质,将 $\boldsymbol{t}_2^{\mathrm{H}}$ 和式(2)作 Hadamard 积,有

$$\boldsymbol{t}_2^{\mathrm{H}}\odot y_1=\alpha hgP_2\cdot\boldsymbol{1}+\boldsymbol{t}_2^{\mathrm{H}}\odot(\alpha h\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2)\tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{1}=(1,1,\cdots,1)_{1\times N}^{\mathrm{T}}$,整理式(3)有

$$\frac{\boldsymbol{t}_2^{\mathrm{H}}\odot y_1}{\alpha P_2}=hg\cdot\boldsymbol{1}+\frac{\boldsymbol{t}_2^{\mathrm{H}}}{\alpha P_2}\odot(\alpha h\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2)\tag{4}$$

式中的 hg 为待估计的联合信道系数,等式右边第二项为经过两个时隙后引入的总干扰,根据 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 的循环对称性质,近似服从 $\mathcal{CN}\left(0,\frac{1}{P_2}\left(\sigma_h^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)\sigma_n^2\boldsymbol{I}_N\right)$。为了后续内容讨论方便,令 $z=\frac{\boldsymbol{t}_2^{\mathrm{H}}\odot y_1}{\alpha P_2}$,$b=hg$,$\sigma^2=\frac{1}{P_2}\left(\sigma_h^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)\sigma_n^2$。

2　联合信道系数估计方法

2.1　MLE 估计方法

将式(4)中的 hg 看作未知常数,根据 N 次观测,似然概率 $p(\boldsymbol{z};b)$ 为

$$p(z;b)=\left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^N\exp\left(-\frac{\|z-b\cdot 1\|_2^2}{\sigma^2}\right) \quad (5)$$

为使误差项 $\mathrm{E}[(b-\hat{b})(b-\hat{b})^{\mathrm{H}}]$ 最小,有

$$\hat{b}_{MLE}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}z_i \quad (6)$$

2.2 基于贝叶斯准则的估计方法

贝叶斯方法认为待估计参数是满足某一特定概率密度分布的随机变量的具体实现。因此,该方法融合了变量分布知识,相比于经典方法,估计得到的参数具有更低的 MSE 特性。经典方法把估计中的有偏性和方差看作误差的两个来源,在确保无偏的前提下降低整体误差,与此相对应,贝叶斯方法侧重于在有偏性和方差之间寻找达到误差最小的平衡点。由于信道系数 h 和 g 均为零均值、方差 σ_h^2 和 σ_g^2 已知的循环复对称高斯随机变量,联合信道等价于两者的叠加相乘,根据分布特征,能够得到关于 hg 的先验概率。基于贝叶斯原理可以获得误差性能更好的方法。

令 $r=|b|$、$\theta=\angle b$,可知其概率密度函数[12]为

$$p(r,\theta)=\frac{2r}{\pi\sigma_h^2\sigma_g^2}K_0(2r/\sigma_h\sigma_g)\quad r\geqslant 0 \quad (7)$$

式中的 $K_0(\cdot)$ 表示阶数为 0 的第二类修正贝塞尔函数。将极坐标转化为平面坐标,有

$$p(b)=\frac{2|b|}{\pi\sigma_h^2\sigma_g^2}K_0\left(\frac{2|b|}{\sigma_h\sigma_g}\right) \quad (8)$$

同式(5)相类似,条件似然函数为

$$p(z|b)=\left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^N\cdot\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}|z_i-b|^2\right) \quad (9)$$

继而可以得到关于接收数据 z 同联合信道系数 b 的分布,有

$$\begin{aligned}p(z,b)&=p(z|b)\cdot p(b)\\&=\frac{2|b|}{\pi\sigma_h^2\sigma_g^2}K_0\left(\frac{2|b|}{\sigma_h\sigma_g}\right)\left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^N\cdot\\&\quad\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}|z_i-b|^2\right)\end{aligned} \quad (10)$$

根据不同的代价函数[11],可以得到最小均方(MMSE)及最大后验(MAP)两种估计方法。

2.2.1 最小均方方法

根据最小均方估计 $\mathrm{E}(b|z)$ 的定义,结合式(7)和式(9),分别有

$$\hat{r}_{MMSE}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}r^2\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}|z_i-r\exp(j\theta)|^2\right)K_0(2r/\sigma_h\sigma_g)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}r\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}|z_i-r\exp(j\theta)|^2\right)K_0(2r/\sigma_h\sigma_g)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta} \quad (11)$$

$$\hat{\theta}_{MMSE}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\theta r\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}|z_i-r\exp(j\theta)|^2\right)K_0(2r/\sigma_h\sigma_g)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}r\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}|z_i-r\exp(j\theta)|^2\right)K_0(2r/\sigma_h\sigma_g)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta} \quad (12)$$

由于式(11)、(12)难以推导出闭合形式解,可以通过二维数值积分方法得到近似解。

2.2.2 最大后验方法

最大后验估计量满足

$$\hat{b}_{MAP}=\arg\max p(b|z)=\arg\max p(z,b) \quad (13)$$

结合复数求导法则 $\frac{\partial|b|^2}{\partial b}=\frac{\partial(bb^*)}{\partial b}=b^*$ 及 $K_0'(\cdot)=K_1(\cdot)$ 和式(10),有

$$\left[\frac{|b|}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{N}z_i-Nb^*\right)+\frac{b^*}{|b|}\right]K_0\left(\frac{2|b|}{\sigma_h\sigma_g}\right)+\frac{b^*}{\sigma_h\sigma_g}K_1\left(\frac{2|b|}{\sigma_h\sigma_g}\right)\Bigg|_{b=\hat{b}_{MAP}}=0 \quad (14)$$

式(14)的数值解可通过牛顿迭代法获得。

3 估计方法的性能限

为了从理论上对前面所讨论的联合信道估计方法所能达到的性能进行研究和比较,在本节分别给出了先验方法的 CRB 和后验方法的近似贝叶斯 CRB 的解析表达式。

3.1 先验方法的 CRB

由于此时待估计向量长度为 1,即仅为 b,故费舍信息矩阵退化为标量形式[13]。

$$J_b=\mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial\ln p(z;b)}{\partial b^*}\right)\left(\frac{\partial\ln p(z;b)}{\partial b^*}\right)^{\mathrm{H}}\right] \quad (15)$$

其中

$$\frac{\partial\ln p(z;b)}{\partial b^*}=-\frac{1}{\sigma^2}(z-b\cdot 1)^{\mathrm{T}} \quad (16)$$

将式(16)代入式(15),可以得到 $J_b=\frac{1}{\sigma^4}\mathrm{E}(\|z-b\cdot 1\|_2^2)=\frac{N}{\sigma^2}$,因此无偏估计量 $\hat{b}$ 的 CRB 为

$$\mathrm{var}(b)\geqslant\frac{1}{J_b}=\frac{\sigma^2}{N} \quad (17)$$

3.2　后验方法的近似贝叶斯 CRB

贝叶斯 CRB 将待估计量 b 看作随机变量,在计算过程中综合考虑其分布函数 $p(b)$ 这一先验信息[14] 为估计性能所做出的改善程度,此时的费舍信息为

$$J'_b = \mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial \ln p(z|b)}{\partial b^*} + \frac{\partial \ln p(b)}{\partial b^*}\right)\cdot \left(\frac{\partial \ln p(z|b)}{\partial b^*} + \frac{\partial \ln p(b)}{\partial b^*}\right)^{\mathrm{H}}\right] \tag{18}$$

由于 $p(b)$ 的表达式中含有特殊的贝塞尔函数,导致式(18) 难以得到闭合形式解。一种处理的方式是采用形式相对简化的 Γ 分布以近似 $p(b)$[15-16],使两个分布的一、二阶矩相等,继而得到 Γ 分布的参数值。然而在求取数学期望过程中会出现积分值奇异的现象,导致该方法不可行。本文根据信息论中的最大熵原理[17],即在所有均值和方差已知的分布中,高斯分布的熵值最大,意味着此时的随机变量携带的信息量最低,可以得到关于 J'_b 的保守近似 $J'_{b'}$。根据文献[12] 可知,由于 $p(b)$ 呈中心对称,其均值为零,方差为 $\sigma_h^2\sigma_g^2$,有

$$p(b') = \frac{1}{\pi\sigma_h^2\sigma_g^2}\exp\left(-\frac{|b'|}{\pi\sigma_h^2\sigma_g^2}\right) \tag{19}$$

得到的近似贝叶斯 CRB 为[11]

$$\mathrm{var}(b) \geqslant \frac{1}{J'_b} \approx \frac{1}{J'_{b'}} = \frac{1}{\dfrac{N}{\sigma^2} + \dfrac{1}{\sigma_h^2\sigma_g^2}} = \frac{\sigma^2\sigma_h^2\sigma_g^2}{N\sigma_h^2\sigma_g^2 + \sigma^2} \tag{20}$$

4　数值仿真与分析

本节通过数值仿真比较上述联合信道估计方法性能。假设信道系数、加性复高斯噪声的方差均为 1。定义参数 β 为中继用户 C 的放大功率同用户 A 发送的单位训练序列符号功率的比值;而信噪比(SNR)为单位训练序列符号功率 P_1 和加性噪声 σ_n^2 的比值。随机产生 100 个服从式(8)分布的 hg 作为真值。借助蒙特卡洛仿真方法,每个真值在不同的信噪比条件下加入噪声和干扰后,采用上述各种方法来估计,将重复进行 10^5 次的均方误差结果累加后取平均作为比较。

图 2 给出了固定训练序列长度 N 为 4, β 取值不同时各方法的均方误差(MSE)性能对比。图 3 为训练序列长度 N 取 4 和 8, β 为 0.1 的情况下各方法的 MSE 性能比较。可以看到式(13)的 MAP 方法在低信噪比区域表现明显优于 MLE 方法,说明联合信道的先验信息部分抵消了接收信号中噪声干扰的不利影响,提高了估计精度;随着信噪比不断增大,改善的程度趋向于消失。图 2 和图 3 中反映的另一个现象是式(11)和(12)得到的 MMSE 方法性能改善下降缓慢,逐渐被 MLE 方法超过,并且在高信噪比时趋于饱和。原因是分别采用了 MMSE 方法对联合信道幅度 r 和相位 θ 估计并加以非线性合并,说明片面应用先验知识的 MMSE 方法未必优于无先验知识的 MLE 方法。在本文模型中,加大系数 β 意味着用户 C 自身通信功率降低,而增加训练序列长度则会占用 C 通信时隙数目。从这个角度来看,β 和 N 值较低条件下性能同 MLE 方式对比显著的 MAP 方法在实际应用中具有重要意义。

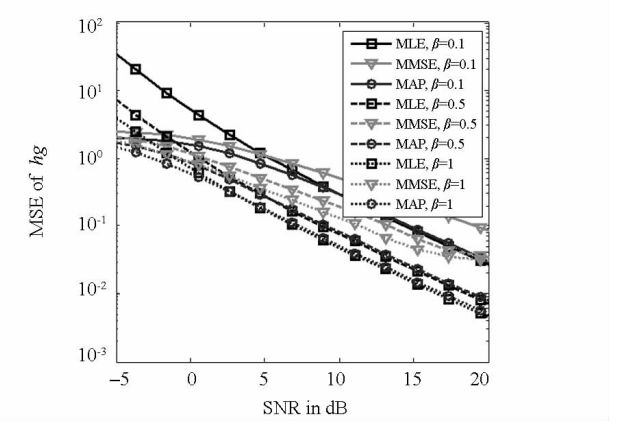


图 2　不同 β 值条件下联合信道估计算法方法比较

Fig. 2　Comparison of cascade channel estimators with different β

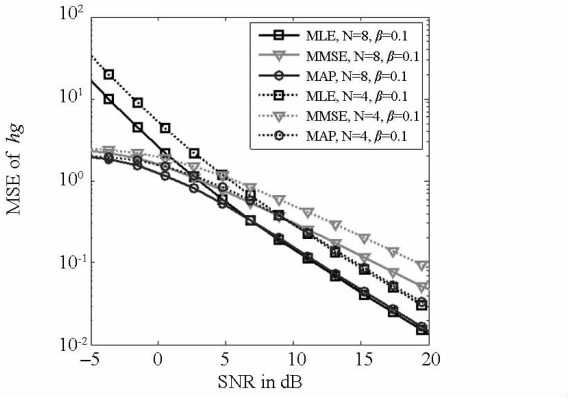


图 3　不同 N 值条件下联合信道估计方法比较

Fig. 3　Comparison of cascade channel estimators with different N

为了进一步说明后验式方法的优势,设固定训练序列长度 N 为 4,在 β 取值不同条件下分别计算 CRB 和近似贝叶斯 CRB,结果如图 4 所示。在较低信噪比情况中,近似贝叶斯 CRB 与同条件下的 CRB 相比优势明显,此后两者在高信噪比时

几乎重合。为了便于比较,认为当近似贝叶斯 CRB 和 CRB 相距小于 1dB(约 1.25)时两者相等,由图5可以看出在 β 分别为 0.1、0.5 和 1 的条件下,重合处位于 3dB、5dB 和 10.5dB 附近。

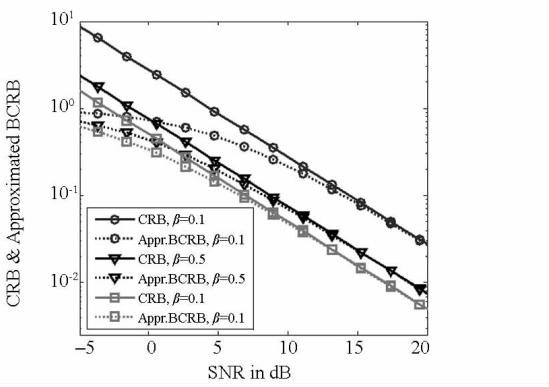


图4 不同 β 值条件下联合信道估计方法的 CRB 和近似贝叶斯 CRB 比较

Fig. 4 Comparison of CRB and approximated BCRB with different β

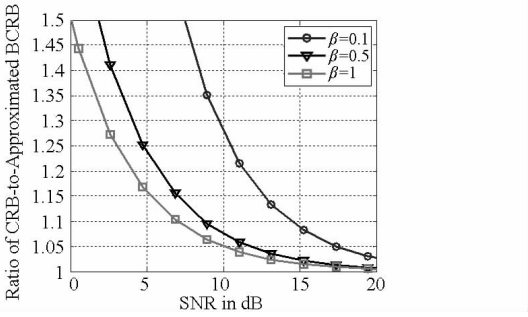


图5 不同 β 值条件下联合信道估计方法的 CRB 和近似贝叶斯 CRB 比值

Fig. 5 Comparison of CRB-to-approximated BCRB ratios with different β

5 结论

本文针对单向 AF 中继通信系统中的联合信道估计,提出了基于贝叶斯原理的后验估计式,即最大后验方法和最小均方方法。另外,根据最大熵原理,给出了近似贝叶斯 CRB 作为性能比较的参考。仿真结果表明最大后验方法在低信噪比区域内明显降低了联合信道系数估计均方误差。

参考文献(References)

[1] Laneman J N, Wornell G W. Energy-efficient antenna sharing and relaying for wireless networks [C]//Proceedings of WCNC, 2000(1): 7 – 12.

[2] Ding Z G, Chin W H, Leung K K. Distributed beamforming and power allocation for cooperative networks [J]. Wireless Communications, IEEE Transactions on, 2008, 7(5): 1817 – 1822.

[3] Yindi J, Jafarkhani H. Single and multiple relay selection schemes and their achievable diversity orders [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2009, 8(3): 1414 – 1423.

[4] Lu L, Liew S C. Asynchronous physical-layer network coding [J]. Wireless Communications, IEEE Transactions on, 2012, 11(2): 819 – 831.

[5] Lang T, Sadler B M, Min D. Pilot-assisted wireless transmissions: general model, design criteria, and signal processing[J]. Signal Processing Magazine, IEEE, 2004, 21(6): 12 – 25.

[6] Hassibi B, Hochwald B M. How much training is needed in multiple-antenna wireless links? [J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 2003, 49(4): 951 – 963.

[7] Min D, Lang T. Optimal design and placement of pilot symbols for channel estimation [J]. Signal Processing, IEEE Transactions on, 2002, 50(12): 3055 – 3069.

[8] Amin O, Gedik B, Uysal M. Channel estimation for amplify-and-forward relaying: cascaded against disintegrated estimators [J]. Communications, IET, 2010, 4(10): 1207 – 1216.

[9] Ting K, Yingbo H. Optimal design of source and relay pilots for mimo relay channel estimation [J]. Signal Processing, IEEE Transactions on, 2011, 59(9): 4438 – 4446.

[10] Sun S, Yindi J. Channel training design in amplify-and-forward mimo relay networks [J]. Wireless Communications, IEEE Transactions on, 2011, 10(10): 3380 – 3391.

[11] Kay S M. Fundamentals of statistical signal processing volume I: estimation theory[M]. Prentice Hall, Inc, 1993.

[12] O'Donoughue N, Moura J M F. On the product of independent complex gaussians[J]. Signal Processing, IEEE Transactions on, 2012, 60(3): 1050 – 1063.

[13] Carvalho E d, Cioffi J, Slock D. Cramer-rao bounds for blind multichannel estimation [C]//Proceedings of Global Telecommunications Conference, 2000: 1036 – 1040.

[14] Jaynes E T. Prior probabilities [J]. Systems Science and Cybernetics, IEEE Transactions on, 1968, 4(3): 227 – 241.

[15] Al-Ahmadi S, Yanikomeroglu H. On the approximation of the pdf of the sum of independent generalized-K rvs by another generalized-K pdf with applications to distributed antenna systems[C]//Proceedings of WCNC, 2010: 1 – 6.

[16] Peppas K P. Accurate closed-form approximations to generalised-K sum distributions and applications in the performance analysis of equal-gain combining receivers [J]. Communications, IET, 2011, 5(7): 982 – 989.

[17] Jaynes E T. Information theory and statistical mechanics[J]. Physical Review, 1957, 106(4): 620 – 630.