doi:10.11887/j.cn.201402020 http://journal.nudt.edu.cn

磁性目标跟踪的后验克拉美罗下限分析与计算*

吴志东,周穗华,张宏欣
(海军工程大学 兵器工程系,湖北 武汉 430033)

摘 要:为了求解磁性目标跟踪问题的后验克拉美罗下限(PCRB),提出了PCRB-GMSPPF算法。该算法利用高斯混合采样粒子滤波算法对目标状态的真实后验概率密度分布进行抽样,再通过蒙特卡洛积分法迭代求解每个观测时刻的Fisher信息矩阵,进而得出目标状态估计的PCRB;克服了基于PF算法求解PCRB过程中由于粒子退化和贫化问题造成不能从后验概率分布中正确抽样的缺点;在建立磁性目标跟踪的状态模型和观测模型的基础上进行仿真分析,将求解出的PCRB与采用GMSPPF及PF算法进行跟踪的均方根误差做对比,验证所提的PCRB-GMSPPF算法的有效性,结果表明:针对磁性目标跟踪问题,PCRB-GMSPPF算法较PCRB-PF算法具有更好的准确性,并可用于一般的非线性模型跟踪误差下限分析。

关键词:后验克拉美罗下限;高斯混合采样粒子滤波算法;磁性目标;跟踪;均方根误差
中图分类号:TP274 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2014)02-0118-06

Computing the recursive posterior Cramer-Rao bound for magnetic target tracking

WU Zhidong, ZHOU Suihua, ZHANG Hongxin
(Department of Weapon Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract: The PCRB-GMSPPF algorithm is proposed in order to achieve the computation of posterior Cramer-Rao bound in magnetic target tracking issues. In the proposed method, the GMSPPF algorithm is adopted to perform the sampling toward the actual posterior distribution of target state, hence the Fisher information matrix at each observation time in PCRB computation can be approximated using Monte Carlo integral method. The proposed method overcomes the depletion and degeneracy problem which causes the failure to correctly sample in posterior distribution. The simulation analysis is performed on the basis of the establishment of magnetic target tracking state model and observation model. The proposed PCRB is compared with the mean square error performance of tracking using GMSPPF and PF algorithm to validate correctness of proposed PCRB computation algorithm. The results exhibits that PCRB-GMSPPF outperforms the PCRB-PF in accuracy for magnetic target tracking issues, and can be generalized for general non-linear tracking model analysis for error lower bound.

Key Words: recursive posterior Cramer-Rao bound; GMSPPF; magnetic target; tracking; mean square error

基于磁场信号的磁性目标跟踪具有隐蔽性好、信号穿透性强等优点,被广泛应用于水下自动监测系统[1]。磁性目标跟踪本质上属于贝叶斯框架下的非线性滤波问题[2]。目前很难设计出非线性滤波的最优估计器,一般使用次优估计器。而次优估计器存在不同程度的缺陷,需要通过理论误差下限评估其性能[3]。工程上经常使用克拉美罗下限(Cramer-Rao Bound, CRB)作为估计误差的理论下限。

文献[4]首次提出了使用CRB作为非线性状态估计的理论下限,但只分析了连续时间系统的情况且没有给出递归形式,计算量较大。针对多维离散非线性系统,文献[5]提出了一种PCRB(recursive Posterior Cramer-Rao Bound)的递归计算方法。该方法给出了从当前时刻到下一时刻的后验Fisher信息矩阵的递推公式,且每个时刻的Fisher信息矩阵的逆对应当前时刻状态的最小均方误差,以保证每一时刻得到准确的误差下限。文献[6-8]分别将递归PCRB方法用于单传感器单个目标跟踪和多个目标跟踪以及声源定位和跟踪(ASLT)问题。但这些文献[6-8]并没有讨论如何精确计算期望积分。文献[9-10]提出了PCRB-PF算法,该算法使用基于序贯蒙特卡洛方法的粒子滤波(Particle Filter, PF)得到后验概率

* **收稿日期**:2013-08-06
基金项目:国家自然科学基金资助项目(51109215)
作者简介:吴志东(1986—),男,河南汤阴人,博士研究生,E-mail:3092004009wzd@163.com;
周穗华(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:zzsrice@163.com

密度的分布抽样值以近似期望积分，并应用解决具有非线性、非高斯特点的单雷达单目标跟踪问题。由于磁性目标跟踪是观测方程高度非线性、状态后验概率密度非高斯问题，粒子滤波在解决此类问题时存在着退化、贫化缺点[11]，会导致其无法准确估计出后验概率密度。文献[12]提出了高斯混合采样粒子滤波算法（Gaussian Mixture Sigma-Point Particle Filters，GMSPPF），用于克服上述粒子滤波的缺点。在此基础上，论文提出了 PCRB-GMSPPF 算法。

为了计算磁性目标跟踪的误差下限，需要得到其概率模型。通过建立噪声干扰下磁性目标跟踪的状态空间模型，确定了目标状态参数（包括位置、速度和磁矩）和磁场观测数据之间的关系。在仅有磁场观测数据的情况下，可以使用状态空间模型和 PCRB-GMSPPF 算法预测出每一时刻状态参数的 MSE。给出了 PCRB-GMSPPF 算法流程。进行了仿真实验，通过与应用 GMSPPF、PF 算法进行跟踪的 MSE 进行对比，检验 PCRB 的有效性。

1　磁性目标跟踪的状态空间模型

图 1 给出了磁性目标跟踪问题的几何模型。图中所示的直角坐标系中，$S1$ 和 $S2$ 是观测传感器及其位置坐标；M_x，M_y，M_z 是目标在坐标系中的磁矩参数；虚线箭头所指是目标的运动轨迹，假设目标是在 $z=H_z$ 的水平面内匀速直线运动，H_z 是已知常数，v 是目标的运动速度。

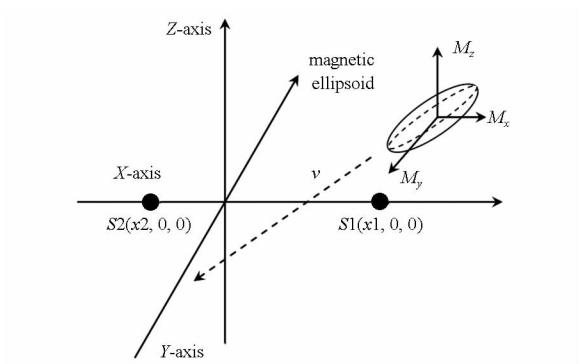


图 1　磁性目标跟踪问题的几何模型

Fig. 1　Geometry model of magnetic ellipse tracking issue

由于目标在一个平面内匀速直线运动，则可以将其状态转换过程看作线性变化。式（1）和式（2）分别给出了磁性目标跟踪的状态方程和观测方程，它们分别决定了跟踪问题的转移概率密度分布 $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$ 和似然概率密度分布 $p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)$。

$$\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_{k-1}+\boldsymbol{\nu}_{k-1} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{n}_k \tag{2}$$

式中，$\boldsymbol{x}_k$ 为目标的状态向量；$\boldsymbol{G}$ 为状态转移矩阵；$\boldsymbol{y}_k$ 是观测向量；$\boldsymbol{\nu}_{k-1}$ 和 $\boldsymbol{n}_k$ 是维数为 n_v、n_w 的状态噪声和观测噪声；$\boldsymbol{h}(\cdot)$ 是观测函数。

状态向量组成由下式给出：

$$\boldsymbol{x}_k=(x_k,y_k,v_{x,k},v_{y,k},M_{x,k},M_{y,k},M_{z,k}) \tag{3}$$

式中：x_k，y_k 是 k 时刻目标的位置；由于目标在一个高度已知的平面内匀速直线运动，则 z_k 是已知常数且 $v_{z,k}=0$；$v_{x,k}$，$v_{y,k}$，$M_{x,k}$，$M_{y,k}$，$M_{z,k}$ 为待估计的参数；分别为目标沿 x 轴、y 轴的运动速度，和目标沿 x 轴、y 轴、z 轴方向的磁矩分量。根据上面的分析可以写出状态方程的具体形式：

$$\begin{cases}x_k=x_{k-1}+T_s\cdot v_{x,k-1},y_k=y_{k-1}+T_s\cdot v_{y,k-1}\\ v_{x,k}=v_{x,k-1},v_{y,k}=v_{y,k-1},\\ M_{x,k}=M_{x,k-1},M_{y,k}=M_{y,k-1},M_{z,k}=M_{z,k-1}\end{cases} \tag{4}$$

式中：T_s 是采样间隔。

本文使用磁性目标感应出的磁场信号作为观测量。在直角坐标系中，假设磁性目标在 k 时刻，空间 (x_i,y_i,z_i) 处感应磁场强度是 $(B_{x,k},B_{y,k},B_{z,k})^{\mathrm{T}}$，则模型的观测函数可以写为[13]：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}(X_k)&=[B_{x,k}(x_k)\quad B_{y,k}(x_k)\quad B_{z,k}(x_k)]^{\mathrm{T}}\\&=\begin{bmatrix}a_{x,k}M_x+a_{y,k}M_y+a_{z,k}M_z\\ b_{x,k}M_x+b_{y,k}M_y+b_{z,k}M_z\\ c_{x,k}M_x+c_{y,k}M_y+c_{z,k}M_z\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5}$$

式中，

$$a_{x,k}=-\frac{3}{4\pi}\left(\frac{1}{2K^3}\ln\frac{A_i+K}{A_i-K}-\frac{A_i}{K^2t_i}\right),$$

$$a_{y,k}=\frac{3}{4\pi}\frac{x_i\cdot y_i}{A_iB_i^2t_i},\ a_{z,k}=\frac{3}{4\pi}\frac{x_i\cdot z_i}{A_iB_i^2t_i},$$

$$b_{y,k}=-\frac{3}{8\pi}\left(\frac{A_i}{B_i^2K^2}-\frac{1}{2K^3}\ln\frac{A_i+K}{A_i-K}-\frac{2B_iy_i^2}{B_i^4t_i}\right),$$

$$b_{z,k}=\frac{3}{4\pi}\frac{A_iy_iz_i}{B_i^4t_i},\ b_{x,k}=a_{y,k},\ c_{x,k}=a_{z,k},$$

$$c_{z,k}=-\frac{3}{8\pi}\left(\frac{A_i}{B_i^2K^2}-\frac{1}{2K^3}\ln\frac{A_i+K}{A_i-K}-\frac{2A_iz_i^2}{B_i^4t_i}\right),$$

$c_{y,k}=b_{z,k}$。式中：$K=\sqrt{L^2-B^2}$，L 为长半轴，B 为短半轴；

$$t_k=\sqrt{[x_k^2+y_k^2+z_k^2+K^2]^2-4K^2x_k^2},$$

$$A_k=\sqrt{\frac{1}{2}[x_k^2+y_k^2+z_k^2+K^2+t_k]},$$

$$B_k=\sqrt{\frac{1}{2}[x_k^2+y_k^2+z_k^2-K^2+t_k]}。$$

2　PCRB-GMSPPF 算法

对于标准的概率密度函数，其状态参数的估

计方差可以表示为：

$$\boldsymbol{P}_k = E\{[\hat{\boldsymbol{x}}_k - \boldsymbol{x}_k][\hat{\boldsymbol{x}}_k - \boldsymbol{x}_k]^{\mathrm{T}}\} \geqslant \boldsymbol{J}_k^{-1} \quad (6)$$

式中：$\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 是状态的估计值，$\boldsymbol{J}_k$ 是 Fisher 信息矩阵，可以表示为 $\boldsymbol{J}_k = E\{-\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\nabla_{\boldsymbol{x}_k}^{\mathrm{T}}\ln p(x_k, y_k)\}$，$\boldsymbol{J}_k$ 的递归表达式如下[5]：

$$\boldsymbol{J}_k = \boldsymbol{D}_{k-1}^{22} - \boldsymbol{D}_{k-1}^{21}(J_{k-1} + \boldsymbol{D}_{k-1}^{11})^{-1}\boldsymbol{D}_{k-1}^{12} \quad (7)$$

式中：

$$\boldsymbol{D}_{k-1}^{11} = E_{p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_k)}\{-\nabla_{\boldsymbol{x}_{k-1}}\nabla_{\boldsymbol{x}_{k-1}}^{\mathrm{T}}\ln p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})\} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{D}_{k-1}^{12} = E_{p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_k)}\{-\nabla_{\boldsymbol{x}_{k-1}}\nabla_{\boldsymbol{x}_k}^{\mathrm{T}}\ln p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})\} = [\boldsymbol{D}_{k-1}^{21}] \quad (9)$$

$$\boldsymbol{D}_{k-1}^{22} = E_{p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_k)}\{-\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\nabla_{\boldsymbol{x}_k}^{\mathrm{T}}\ln p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})\} + E_{p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_k)}\{-\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\nabla_{\boldsymbol{x}_k}^{\mathrm{T}}\ln p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)\} \quad (10)$$

其中，上述迭代计算的初始值是：$\boldsymbol{J}_0 = E\{-\nabla_{\boldsymbol{x}_0}\nabla_{\boldsymbol{x}_0}^{\mathrm{T}}\ln p(\boldsymbol{x}_0)\}$。

式(1)可以看出跟踪问题的状态模型是线性的，且假设噪声满足高斯分布。则状态转移概率可以表示为：

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}) = N(\boldsymbol{x}_k;\ \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{Q}) \quad (11)$$

根据状态方程(1)得到：

$$E_{p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_k)}\{-\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\nabla_{\boldsymbol{x}_k}^{\mathrm{T}}\ln p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})\} = \boldsymbol{Q}^{-1} \quad (12)$$

$$\boldsymbol{D}_{k-1}^{11} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{G}, \boldsymbol{D}_{k-1}^{12} = -\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}Q^{-1}, \boldsymbol{D}_{k-1}^{21} = -\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{G}。$$

由此得到了计算 Fisher 信息矩阵需要的大部分变量，下面计算 $\boldsymbol{D}_{k-1}^{22}$ 的第 2 项。该项是关于似然概率 $p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)$ 的期望积分。定义下面的函数：

$$\Lambda_{k-1}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k) = -\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\nabla_{\boldsymbol{x}_k}^{\mathrm{T}}\ln p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k) \quad (13)$$

在状态噪声和观测噪声服从高斯分布的条件下，式(13)可化简为以下形式[5]：

$$\Lambda_{k-1}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k) = \nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{R}^{-1}\nabla_{\boldsymbol{x}_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k) \quad (14)$$

根据式(10)，则 $\boldsymbol{D}_{k-1}^{22}$ 可表示为：

$$\boldsymbol{D}_{k-1}^{22} = \int[\boldsymbol{Q}^{-1} + \Lambda_{k-1}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k)]P(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_k)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k \quad (15)$$

上式的积分可以用后验概率的离散采样点求和平均近似。文献[9]使用基于序贯蒙特卡洛方法的标准粒子滤波算法估计后验概率密度并估计出 Fisher 信息矩阵，则 $\boldsymbol{D}_{k-1}^{22}$ 的计算公式可以表示为离散求和的形式：

$$\boldsymbol{D}_{k-1}^{22} \cong \frac{1}{N_s}\sum_{n=1}^{N_s}[\boldsymbol{Q}^{-1} + \Lambda_{k-1}(\boldsymbol{\chi}_k^{(n)}, \boldsymbol{y}_k)] \quad (16)$$

式中：$\boldsymbol{\chi}_k^n$，$\forall n = 1, \cdots, N_s$ 是从后验概率密度函数 $P(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_k)$ 中采样的粒子，N_s 是粒子个数。但是标准粒子滤波算法解决非线性、非高斯问题时存在的问题有：

1)重采样过程中，个别粒子的权值过大会导致其被多次复制，使得用于描述后验概率的粒子数量变少、多样性变差。

2)使用先验状态转移概率 $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$ 作为建议分布，没有考虑最新观测值，使得从重要性概率密度中采样得到的值和从真实后验概率密度中采样得到的样本存在较大的偏差，不能适用于蒙特卡洛假设，导致算法失败。

由于磁性目标跟踪的状态维数较高，且观测方程是高度非线性的，使其后验概率分布复杂且没有解析形式。标准粒子滤波算法很难近似其后验概率密度分布，下面的仿真实验验证了该推论。为了解决这个问题，论文提出使用高斯混合采样粒子滤波(GMSPPF)算法。GMSPPF 算法将基于重要性采样的测量更新和基于 Sigma 点卡尔曼滤波(Sigma Point Kalman Filter，SPKF)的高斯求和滤波器的时间更新及产生建议分布相结合。通过权重期望最大化算法，从基于重要性采样的测量更新阶段产生的带权重的后验粒子中恢复出后验概率密度。权重期望最大化方法替代了标准粒子滤波算法的重采样并克服了粒子贫化问题。该算法在时间更新和建议分布步骤中，使用当前时刻状态的真实值作为等效状态后验概率密度的高斯混合模型的均值。下面给出算法实现的步骤。

Step. 1 时间更新和产生建议分布

在时刻 $k-1$，假设状态参数的后验概率密度可以使用 G 个高斯混合模型近似：

$$p_g(\boldsymbol{x}_{k-1}|\boldsymbol{Y}_{k-1}) = \sum_{g=1}^{G}\alpha_{k-1}^{(g)}N(\boldsymbol{x}_{k-1}; \boldsymbol{\mu}_{k-1}^{(g)}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(g)})$$

式中，$\boldsymbol{Y}_{k-1} = \boldsymbol{y}_{1:k-1}$。并且过程噪声和观测噪声密度可以分别使用下面的 I 和 J 个高斯混合模型来近似：

$$p_g(\boldsymbol{v}_{k-1}) = \sum_{i=1}^{I}\beta_{k-1}^{(g)}N(\boldsymbol{v}_{k-1}; \boldsymbol{\mu}_{v_{k-1}}^{(i)}, \boldsymbol{Q}_{k-1}^{(i)})$$

$$p_g(\boldsymbol{n}_k) = \sum_{j=1}^{J}\gamma_k^{(j)}N(\boldsymbol{n}_k; \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{n}_k}^{(j)}, \boldsymbol{R}_k^{(j)})$$

当 $G'' = GIJ$ 时，SPKF 算法得到 $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1})$ 和 $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Y}_k)$ 的高斯混合模型。定义下面映射关系：$g' = g + (i-1)G; g'' = g' + (j-1)GI$。则有下面的伪代码：

1. For $j = 1, \cdots, J, \tilde{p}_j(\boldsymbol{n}_k) = N(\boldsymbol{n}_k; \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{n},k}^{(j)}, \boldsymbol{R}_k^{(j)})$;
   For $i = 1, \cdots, I, \tilde{p}_i(\boldsymbol{v}_k) = N(\boldsymbol{v}_k; \boldsymbol{\mu}_{v,k}^{(i)}, \boldsymbol{Q}_k^{(i)})$;
   For $g = 1, \cdots, G, \tilde{p}_g(\boldsymbol{x}_{k-1}|\boldsymbol{Y}_{k-1}) = N(\boldsymbol{x}_{k-1}; \boldsymbol{\mu}_{v,k}^{(g)}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(g)})$;
2. For $g' = 1, \cdots, G'$,

$$\tilde{p}_{g'}(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{Y}_{k-1}) = N(\boldsymbol{x}_k; \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k^{(g')}, \tilde{\boldsymbol{P}}_k^{(g')})$$

$$\alpha_k^{(g')} = \frac{\alpha_k^{(g)} \beta_{k-1}^{(i)}}{\sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{I} \alpha_k^{(g)} \beta_{k-1}^{(i)}}$$

(a) For $g'' = 1, \cdots, G''$, $\tilde{p}_{g''}(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{Y}_k) = N(\boldsymbol{x}_k; \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k^{(g'')}, \tilde{\boldsymbol{P}}_k^{(g'')})$

$$\alpha_k^{(g'')} = \frac{\alpha_k^{(g')} \gamma_k^{(j)} \boldsymbol{S}_k^{(j)}}{\sum_{g'=1}^{G'} \sum_{j=1}^{J} \alpha_k^{(g')} \gamma_k^{(j)} \boldsymbol{S}_k^{(j)}}$$

式中：$\boldsymbol{S}_k^{(j)} = p_j(\boldsymbol{y}_k \mid \boldsymbol{x}_k)$，$\boldsymbol{x}_k = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k^{(g')}$，$\boldsymbol{y}_k$ 是当前时刻观测值。

(b) $p_{g'}(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{Y}_{k-1}) = \sum_{g'=1}^{G'} \alpha_k^{(g')} N(\boldsymbol{x}_k; \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k^{(g')}, \tilde{\boldsymbol{P}}_k^{(g')})$

后验状态概率密度可以写为：

$$p_g(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{Y}_k) = \sum_{g''=1}^{G''} \alpha_k^{(g'')} N(\boldsymbol{x}_k; \boldsymbol{\mu}_k^{(g'')} = \boldsymbol{x}_k^{(\text{真实值})}, \boldsymbol{P}_k^{(g'')})$$

Step. 2　测量更新

1. 从 $p_g(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{Y}_k)$ 中采样 N 个粒子 $\{\chi_k^{(l)};\ l = 1, \cdots, N\}$ 并计算权重：

$$\tilde{\omega}_k^{(l)} = \frac{p_g(\gamma_k \mid \chi_k^{(l)}) p_g(\chi_k^{(l)} \mid \boldsymbol{Y}_{k-1})}{p_g(\chi_k^{(l)} \mid \boldsymbol{Y}_k)}$$

2. 归一化权重：$\omega_k^{(l)} = \tilde{\omega}_k^{(l)} / \sum_{l=1}^{N} \tilde{\omega}_k^{(l)}$；

3. 根据前面得到的加权的粒子 $\{\omega_k^{(l)}, \chi_k^{(l)};\ l = 1, \cdots, N\}$，得到的 k 时刻高斯混合后验分布：

$$p_g(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{Y}_k) = \sum_{g=1}^{G} \alpha_k^{(g)} N(\boldsymbol{x}_k; \boldsymbol{\mu}_k^{(g)}, \boldsymbol{P}_k^{(g)})$$

Step. 3　后验克拉美罗计算

1. 将粒子 $\chi_k^{(l)}$ 代入 $\Lambda_{k-1}(\boldsymbol{\chi}_k^{(n)}, \boldsymbol{y}_k)$；
2. 估计 $\boldsymbol{D}_{k-1}^{22}$ 的值；
3. 计算 $\boldsymbol{J}_k = \boldsymbol{D}_{k-1}^{22} - \boldsymbol{D}_{k-1}^{21} (\boldsymbol{J}_{k-1} + \boldsymbol{D}_{k-1}^{11})^{-1} \boldsymbol{D}_{k-1}^{12}$；
4. 设置 $k = k + 1$，回到 Step. 1。

表 1　状态参数的初始值

Tab. 1　Initial value of the state parameter

参数	x_0 m	y_0 m	v_x (m/s)	v_y (m/s)	M_x (nA·m²)	M_y (nA·m²)	M_z (nA·m²)
数值	1000	1000	−20	−20	$-1.38 \cdot 10^9$	$-2.91 \cdot 10^8$	$5.33 \cdot 10^8$

3　仿真实验和结果分析

论文通过与贝叶斯滤波器得到的均方根误差进行对比，来检验 PCRB 的精度。最优贝叶斯滤波器的均方根误差矩阵和 Fisher 信息矩阵的逆矩阵是一致的。GMSPPF 算法是一种在非线性、非高斯系统中有较好估计性能的次优贝叶斯滤波器，其估计性能接近最优贝叶斯滤波器。因此，使用 GMSPPF 算法进行跟踪的均方根误差可以作为参考，来验证求解出的 PCRB 的精度。下面通过仿真检验 PCRB-GMSPPF 的精度，并使用 PF 算法做对比。

按照图 1 所示的几何模型进行仿真。其中，目标的焦距参数是 60m；两个三分量磁传感器 $S1$ 和 $S2$ 分别位于 (50,0,0) m 和 (−50,0,0) m 处。跟踪算法的初始条件设置如下：

1) 状态误差 $\boldsymbol{\nu}_{k-1} \sim N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{Q})$，其中均值 $u = [0,0,0,0,0,0]^{\mathrm{T}}$，方差 $\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(10,10,1,1,10^6,10^6,10^6)$，状态参数的初始值设置为 $\boldsymbol{X}_0 = [0,0,0,0,0,0]^{\mathrm{T}}$，初始方差 $\boldsymbol{P}_0 = \mathrm{diag}(1000,1000,30,30,10^9,10^9,10^9)$；选取的粒子个数是 $N = 2000$；

2) 测量点的时间间隔 $T_s = 0.4$s，观测误差 $\boldsymbol{n}_k \sim \mathbb{N}[(0,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{I}_{6\times 6}]$。

图 2 给出了 PCRB-GMSPPF 算法计算过程中粒子权值的变化，可以看到在计算初期，粒子权值的波动较小，没有跟踪到后验概率密度，到 20s 后粒子权值出现了较大的峰值，估计出了实际的后验概率。图 3 给出的是 PCRB-PF 算法得到的粒子权值随时间变化图。图中可以看出权值变化均在 10^{-3} 以下，0 ~ 40s 内粒子权值没有浮动，且后面的权值没有明显的峰值。说明 PCRB-PF 算法没能得到准确的状态后验概率密度。

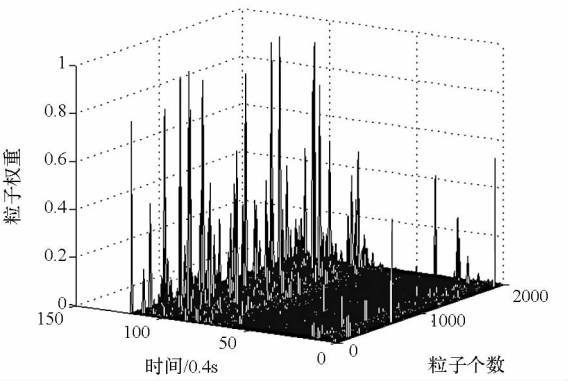


图 2　PCRB-GMSPPF 算法的粒子权值计算结果

Fig. 2　The result of particle weight by PCRB-GMSPPF

从图 4 给出的状态后验概率密度分布可以看出后验概率的非高斯性。图 4 ~ 7 分别给出了由 PF 和 GMSPPF 算法估计出的状态参数的均方根误差和 PCRB-GMSPPF 计算出的 PCRB 对比。将图中 PCRB 的结果曲线和图 2 比较可以发现：图 2 中权值没有波动的区域是 8 ~ 32s 之间，而此区间对应的 PCRB 较大；在 40s 之后权值变化体现了真实的后验概率密度，对应的 PCRB 数值趋于 0。从图中得到的一致结果是：与 PF 算法相比，GMSPPF 算法有更好的估计性能；在 32s 以后 GMSPPF 算法的均方根误差和 PCRB 一致，甚至更低；PF 算法的均方根误差发散，偏离 PCRB 较

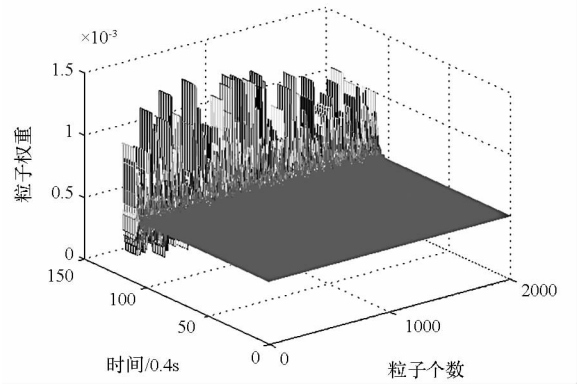


图3 PCRB-PF 算法的粒子权值计算结果

Fig. 3 The result of particle weight by PCRB-PF

大,说明该算法没能得到准确的后验概率,这也是PCRB-PF 算法得到图 3 所示结果的原因。结果表明,提出的 PCRB-GMSPPF 计算方法可以准确求解出复杂非线性、非高斯系统的克拉美罗下限。

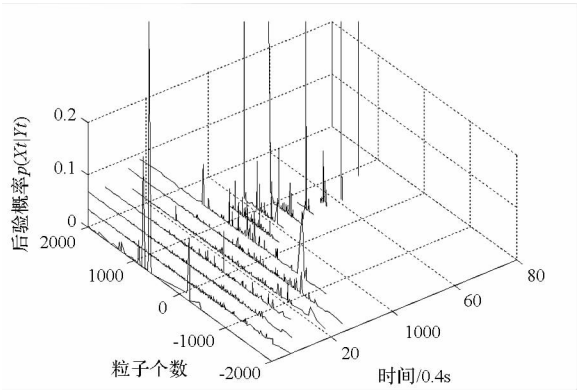


图4 PCRB-GMSPPF 算法估计出的状态后验概率密度

Fig. 4 Result of posterior probability by PCRB-GMSPPF

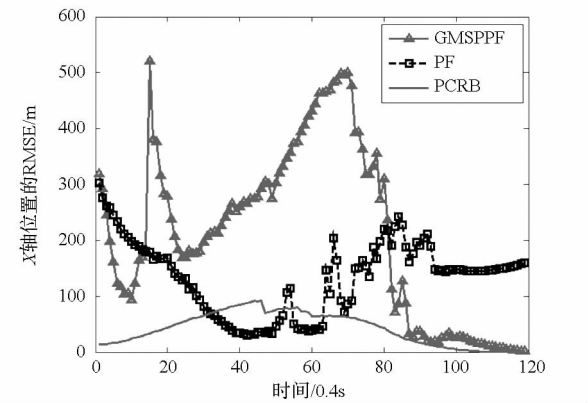


图5 X 轴位置的均方根误差和 PCRB-GMSPPF 计算出的 PCRB 对比

Fig. 5 Comparison of x-position's RMSE among GMSPPF, PF and PCRB-GMSPPF

4 结论

通过理论推导和与非线性最小均方误差估计器的对比验证表明,PCRB 精确的限定了无偏序贯贝叶斯估计器的误差下限。对于高度非线性系统,只有通过产生足够近似后验概率分布的样本值进行蒙特卡洛积分才可以得到准确的 PCRB,

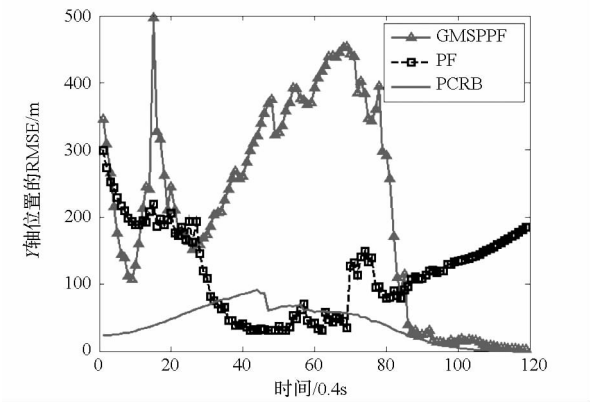


图6 Y 轴位置的均方根误差和 PCRB-GMSPPF 计算出的 PCRB 对比

Fig. 6 Comparison of y-position's RMSE among GMSPPF, PF and PCRB-GMSPPF

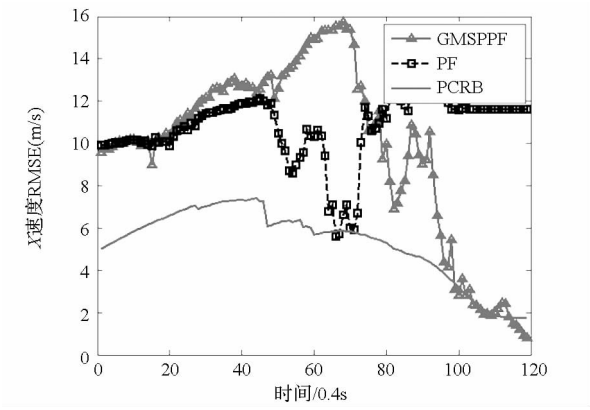


图7 X 轴速度的均方根误差和 PCRB-GMSPPF 计算出的 PCRB 对比

Fig. 7 Comparison of x-speed's RMSE among GMSPPF, PF and PCRB-GMSPPF

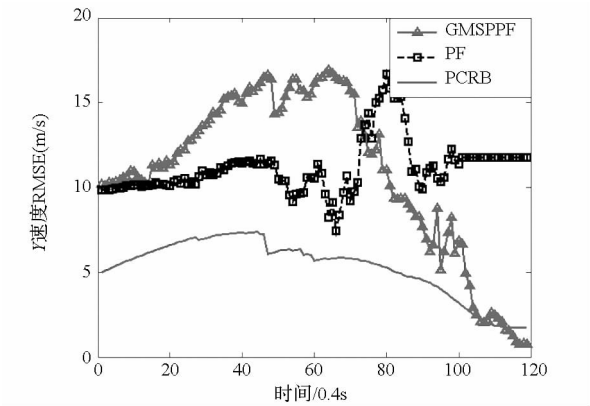


图8 Y 轴速度的均方根误差和 PCRB – GMSPPF 计算出的 PCRB 对比

Fig. 8 Comparison of y-speed's RMSE among GMSPPF, PF and PCRB-GMSPPF

本文提出了使用 GMSPPF 估计后验概率来计算 PCRB(PCRB-GMSPPF)算法,并将该算法应用于基于两个磁传感器的单个磁性目标跟踪问题,通过仿真实验验证 PCRB 的有效性;将 PCRB 的计算结果和 GMSPPF、PF 算法得到的 MSE 进行对比,仿真结果表明:PCRB-GMSPPF 算法估计出了该问题的后验概率并计算出精确的 PCRB;该算法可应用于更一般的非线性、非高斯状态估计问题的误差下界估计。

参考文献(References)

[1] Birsan M. Non-linear Kalman filters for tracking a magnetic dipole[R]. Technical Menorandum, Defense R&D Canada-Atlantic, 2005.

[2] Birsan M. Unscented particle filter for tracking a magnetic dipole target[J]. OCEANS, Proceedings of MTS/IEEE, 2005, 2:1656 - 1659.

[3] 占荣辉. 基于空频域信息的单站被动目标跟踪算法研究[D]. 长沙:国防科技大学,2007.
ZHAN Ronghui. Research on algorithms for single observer passive tracking with the information of spatial-frequency domain [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2007. (in Chinese)

[4] Van Trees H L. Estimation and modulation theory[M]. New York: John Wiley, 1968.

[5] Tichavsky P, Muravchik C H, Nehorai A. Posterior Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(5): 1386 - 1396.

[6] Zhang X, Willett P K. Cramer-Rao bounds for discrete-Time linear filtering with measurement origin uncertainties[J]. Proceedings Workshop on Estimation, Tracking and Fusion: A Tribute to Yaakov Bar-Shalom, 2001.

[7] Hue C, Le Cadre J P, Perez P. Performance analysis of two sequential Monte Carlo methods and posterior Cramer-Rao bounds for multi-target tracking[C]//Proceedings of 5th International Conference on Information Fusion, 2002, 1:464 - 473.

[8] Lehmann E A, Williamson R C. Posterior Cramer-Rao bound for acoustic source tracking in reverberant environments[R]. Australia, National ICT, 2006.

[9] Taylor R M, Flanagan B P, Uber J A. Computing the recursive posterior Cramer-Rao bound for a radar tracking system[J]. Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2003, 6:673 - 676.

[10] Zuo L. Conditional posterior Cramer-Rao lower bound and distributed target tracking in sensor networks[D]. Syracuse: Syracuse University, 2011.

[11] Van der Merwe R, Doucet A, de Freitas N, et al. The unscented particle filter[R]. Technical Report CUED/F2INPENG, Cambridge University Engineering Department, 2000.

[12] Van der Merwe R, Wan E. Gaussian mixture sigma-point particle filters for sequential probabilistic inference in dynamic state-space models[C]//Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2003, 6:701 - 704.

[13] 林春生, 龚沈光. 舰船物理场[M]. 2 版. 北京: 兵器工业出版社, 2007.
LIN Chunsheng, GONG Shenguang. Warship's physical field[M]. 2nd ed. Beijing: The Publishing House of Ordnance Industry, 2007. (in Chinese)