doi:10.11887/j.cn.201403002 http://journal.nudt.edu.cn

用于有限体积法的中心 WENO 混合格式*

范进之,李 桦
(国防科技大学 航天科学与工程学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:通过理论推导得到6阶中心格式与5阶WENO格式相结合的混合格式(CWENO6格式),为了提高有限体积法中高精度格式的计算效率,引入3阶MUSCL反卷积方法以取代传统有限体积法中的反卷积方法。通过不同的算例比较了CWENO6格式与WENO5格式的数值表现。结果表明,相比于传统的WENO5格式,在网格量相同的前提下,由于数值耗散较小,CWENO6格式对流动细节的描述更为准确,为有限体积法模拟三维多尺度复杂提供了一种更为有效的方法。

关键词:高精度格式;有限体积法;WENO格式;混合格式
中图分类号:O354 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2014)03-0006-08

Central WENO hybrid schemes used in the finite-volume method

FAN Jinzhi, *LI Hua*
(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The Central-WENO hybrid schemes (CWENO6 schemes) are developed based on the theory analysis. While the CWENO6 schemes were used in the finite volume method, the 3 order MUSCL deconvolution method was used instead of the origin 5 order WENO deconvolution method to reduce the deconvolution computation cost. According to the numerical test, it is found that the CWENO6 schemes have more powerful ability to represent the details of the flow filed because of its low numerical dissipation comparing to the WENO5 schemes under the same computation mesh. Finally, it is concluded that the CWENO6 schemes are an efficient method for the simulation of multi-dimension complex flow using finite volume method.

Key words: high-order schemes; finite volume method; WENO; hybrid schemes

湍流直接数值模拟(Direct Numerical Simulation, DNS)及大涡模拟(Large Eddy Simulation, LES)等非定常多物理尺度复杂流动的数值模拟需要使用高精度计算格式以得到不同尺度下的流动结构;对于可压缩流体,由于可能存在激波,因此计算格式又需要有适当的数值粘性,以消除激波附近的非物理震荡。加权基本无振荡(Weighted Essentially Non-Oscillatory, WENO)格式[1]通过多个模板函数的非线性加权组合,在获得较高计算精度的同时,有效解决了激波附近的数值震荡问题,成为可压缩流体DNS及LES模拟中使用最为广泛的格式之一[2-3]。但是传统的WENO格式在流场完全光滑时仍然包含数值粘性,这会"抹平"光滑区域的数值结果,通过对离散格式进行傅立叶分析不难发现,WENO格式在流场完全光滑时仍然存在着耗散误差,在模拟小尺度脉动时,数值耗散必然会对数值结果造成不利影响。S. K. Lele[4]证明了中心紧致格式具有同谱方法相当的分辨率,但由于没有数值粘性不能直接用于可压缩流体的DNS。很多学者通过将WENO格式和低耗散格式结合起来构造出具有较高分辨率以及较强鲁棒性的混合格式。

目前常用的高精度格式大部分是基于有限差分法。有限差分法求解微分形式的N-S方程,通过坐标变化,将物理域转换到计算域中,由于每个维度解耦,因此通过一维模型推导得到的高精度算法可以很容易通过每个维度单独求解的方式应用于多维问题的求解。目前对于可压缩流体的DNS和LES的大部分高精度计算格式都是建立在有限差分法之上[5-6]。

有限体积法求解的是积分形式的N-S方程,理论上它无须坐标变换。相比于有限差分法,有限体积法得出的离散方程,要求因变量的积分守恒对任意一组控制体积都得到满足,对整个计

* **收稿日期**:2013-09-14
基金项目:中国航天科技集团公司航天科技创新基金资助项目(CALT-16)
作者简介:范进之(1984—),男,安徽芜湖人,博士研究生,E-mail: fff969@126.com;
李桦(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail: lihuakd08@tom.com

算区域,自然也得到满足,在处理激波问题时,守恒性容易得到保证[7]。但是由于需要对整个控制体界面上的通量进行积分,各个维度相互耦合,当计算精度超过 2 阶时,基于一维问题推导得到的高精度算法无法直接用于有限体积法,因此难以获得适用于有限体积法的高精度格式。

为发展适用于有限体积法的高精度格式不少学者做出了重要贡献:Kobayashi 提出了一种用于不可压流动计算 4 阶中心紧致格式;Pereira 使用 4 阶精度有限体积法模拟了不压缩流体的流动过程;Lacor 等人提出了一种适用于任意结构网格的 4 阶中心紧致格式,这种方法无须使用积分点,但需要进行较为繁琐的几何量计算;Fosso 等人在 Lacor 的基础上发展了一套适用于任意网格的 6 阶中心紧致格式。虽然上述方法提高了有限体积法的计算精度,解决了高精度格式在有限体积法中使用所存在的计算效率问题,但这些方法从本质上讲仍然是中心型格式,不能直接用于存在激波的可压缩流体的 DNS 及 LES 模拟。本文首先通过理论推导在 5 阶 WENO 格式的基础上得到了 6 阶中心 WENO 混合格式(CWENO6 格式)的表达式,通过分析积分精度提出了 3 阶逆风单调守恒格式(Monotone Upstream centered Scheme for Conservation Laws, MUSCL)的反卷积方法,将 CWENO6 格式应用到有限体积法中,然后通过数值方法比较了 CWENO6 格式与 WENO5 格式在不同问题中的数值表现。

1　控制方程

假设存在控制体 Ω ,其体积 V。

对于积分型双曲守恒律方程组而言,其控制方程如下所示:

$$\int_{\Omega}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\mathrm{d}V+\oint_{S}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=0 \tag{1}$$

其中 Ω 为给定控制体,S 为控制体的边界面,V 为控制体体积,$\boldsymbol{U}$ 为守恒变量,$\boldsymbol{F}$ 为数值通量,$\boldsymbol{n}$ 为边界面的外法线方向向量,A 为边界面面积。

有限体积法离散形式如下:

$$V\frac{\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{U}}}{\mathrm{d}t}+\sum_{r=1}^{L}\sum_{g=1}^{G}(\omega_g\boldsymbol{F}_g)\cdot\boldsymbol{n}_r\cdot A_r=0 \tag{2}$$

其中 $\overline{\boldsymbol{U}}$ 为变量 $\boldsymbol{U}$ 在控制体内的平均值,即

$$\overline{\boldsymbol{U}}=\frac{1}{V}\int_{\Omega}\boldsymbol{U}\cdot\mathrm{d}V \tag{3}$$

$\boldsymbol{G}$ 为高斯点个数,$\boldsymbol{\omega_g}$ 为积分权值,$\boldsymbol{F}_g$ 为积分点处的数值通量。对于 Godunov 类方法,$\boldsymbol{F}_g$ 又有如下求解方法:

$$\boldsymbol{F}_g=H(\boldsymbol{U}_g^-,\boldsymbol{U}_g^+) \tag{4}$$

$\boldsymbol{U}_g^-$ 和 $\boldsymbol{U}_g^+$ 分别为高斯积分点处插值得到的左值和右值,H 为黎曼求解器。

2　用于有限体积法的 CWENO6 格式

2.1　Jiang-Shu 的 WENO5 格式

记 u 为向量 $\boldsymbol{U}$ 的任意分量,$\bar{u}$ 为向量 $\overline{\boldsymbol{U}}$ 的任意分量。$u^-_{i+\frac{1}{2}}$ 和 $u^+_{i+\frac{1}{2}}$ 表示变量 u 在边界面 $\left(i+\frac{1}{2},j\right)$ 处的面积平均值。则 Jiang 和 Shu 的 WENO 方法[1]可以由以下公式表示:

$$\tilde{u}_{i\pm\frac{1}{2},j}=\sum_{r=0}^{k-1}\omega_r P_r(\bar{u}_{i-r,j},\cdots,\bar{u}_{i-r+k-1,j}) \tag{5}$$

其中 ω_r 为每个插值模板对应的非线性权值,P_r 为每个插值模板唯一对应的插值函数。

非线性权值 ω_r 可以通过以下方式求得:

$$\omega_r=\frac{\alpha_r}{\sum_{s=0}^{k-1}\alpha_s} \tag{6}$$

其中:

$$\alpha_r=\frac{C_r}{(\varepsilon+\beta_r)} \tag{7}$$

C_r 为给定模板点的理想权值,ε 为防止分母为 0 的小量,β_r 为给定模板的光滑指示因子。

Henrick 等人研究发现自由参数 ε 对最终得到的插值模板影响较大[8]。为了消除 ε 的影响,Henrick 建议对计算得到的理想权值进行如下修正:

$$\omega_{r,M}=\frac{\alpha_{r,M}}{\sum_{s=0}^{k-1}\alpha_{s,M}} \tag{8}$$

其中:

$$\alpha_{r,M}=\frac{\omega_r(C_r+C_r^2-3C_r\omega_r+\omega_r^2)}{\omega_r(1-2C_r)+C_r^2} \tag{9}$$

本文所使用的权值计算方法如无特殊说明,均为修正后的权值计算方法。

2.2　CWENO6 格式的构造

5 阶 WENO 格式公式如下:

$$u^-_{i+\frac{1}{2},j}=\omega_0P_0+\omega_1P_1+\omega_2P_2 \tag{10}$$

其中 P_0,P_1,P_2 分别为

$$P_0=\frac{1}{3}\bar{u}_{i,j}+\frac{5}{6}\bar{u}_{i+1,j}-\frac{1}{6}\bar{u}_{i+2,j} \tag{11}$$

$$P_1=-\frac{1}{6}\bar{u}_{i-1,j}+\frac{5}{6}\bar{u}_{i,j}+\frac{1}{3}\bar{u}_{i+1,j} \tag{12}$$

$$P_2=\frac{1}{3}\bar{u}_{i-2,j}-\frac{7}{6}\bar{u}_{i-1,j}+\frac{11}{6}\bar{U}_{i,j} \tag{13}$$

考虑到

$$\omega_0+\omega_1+\omega_2=1 \tag{14}$$

可得：

$$u^{-}_{i+\frac{1}{2},j}=\omega_0 P_0+(1-\omega_0-\omega_1)P_1+\omega_2 P_2 \tag{15}$$

化简可得：

$$u^{-}_{i+\frac{1}{2},j}=u^{CE6}_{i+\frac{1}{2},j}+u^{d}_{i+\frac{1}{2},j} \tag{16}$$

其中：

$$\begin{aligned}u^{CE6}_{i+\frac{1}{2},j}=&\frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j}+\bar{u}_{i+1,j})\\&+\frac{1}{60}(\bar{u}_{i-2,j}-8\bar{u}_{i-1,j}+7\bar{u}_{i,j}\\&+7\bar{u}_{i+1,j}-8\bar{u}_{i+2,j}+\bar{u}_{i+3,j})\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}u^{d}_{i+\frac{1}{2},j}=&(\frac{\omega_2}{3}-\frac{1}{60})u'''_{i-\frac{1}{2},j}+(\frac{\omega_0}{6}-\frac{5}{60})u'''_{i+\frac{1}{2},j}\\&+\frac{1}{60}u'''_{i+\frac{3}{2},j}\end{aligned} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{u}'''_{i+\frac{1}{2},j}=\bar{u}_{i-1,j}-3\bar{u}_{i,j}+3\bar{u}_{i+1,j}-\bar{u}_{i+2,j} \tag{19}$$

不难发现 $\boldsymbol{u}^{CE6}_{i+\frac{1}{2},j}$ 为6阶中心重构公式，$\boldsymbol{u}'''_i+\frac{1}{2}$，$j$为3阶导数公式。由于中心格式没有任何数值粘性，因此WENO5格式的全部数值粘性完全由3阶导数项的非线性组合提供。在完全光滑的区域，如果能够消除3阶导数项的影响，那么WENO5格式便可以转化成6阶中心格式。这里3阶导数项的线性组合实际上担当着“人工粘性”的作用。

基于上述讨论，引入一个开关函数 σ，通过 σ 的取值来控制WENO5格式的数值粘性，从而得到一种可以根据流场光滑程度，自发调整数值耗散大小的混合格式，因其最高精度可以达到6阶，故称该中心WENO混合格式为CWENO6。CWENO6格式的公式如下：

$$u^{-}_{i+\frac{1}{2},j}=u^{CE6}_{i+\frac{1}{2},j}+\sigma_{i+\frac{1}{2},j}u^{d}_{i+\frac{1}{2},j} \tag{20}$$

2.3　开关函数

开关函数 σ 要求能够反映流场的光滑程度，在完全光滑的区域 $\sigma=0$，在存在间断的区域 $\sigma>0$，在流场间断程度最剧烈的区域 $\sigma=1$。

Johnsen等人认为，混合格式性能表现与开关函数的选取有着密切的关系[9]。

考虑到WENO5格式可以显示的表示成中心格式与数值粘性项之和的形式。本文采用Jameson和Turkel等人提出的压力感受因子[10]作为混合格式的开关函数，其表达式如下：

$$\begin{aligned}&\sigma_{i+\frac{1}{2}}=\max(\psi_i,\psi_{i+1}),\\&\psi_i=\frac{|p_{i+1}-2p_i+p_{i-1}|}{|p_{i+1}+2p_i+p_{i-1}|+\varepsilon_3}.\end{aligned} \tag{21}$$

p_i 为网格 i 处的压力。ε_3 为防止分母为0的小量，本文取 $\varepsilon_3=1e-6$。

2.4　反卷积方法

反卷积是指由面心处平均值得到边界面上积分点处值的过程，是求解积分型方程不可或缺的一部分。

图1为CWENO6格式反卷积过程的网格示意图。对于2维问题每个界面至少需要2个积分点，对于3维问题每个界面上至少需要4个积分点。为了描述方便这里只讨论2维问题，3维问题的实现方法与之类似。

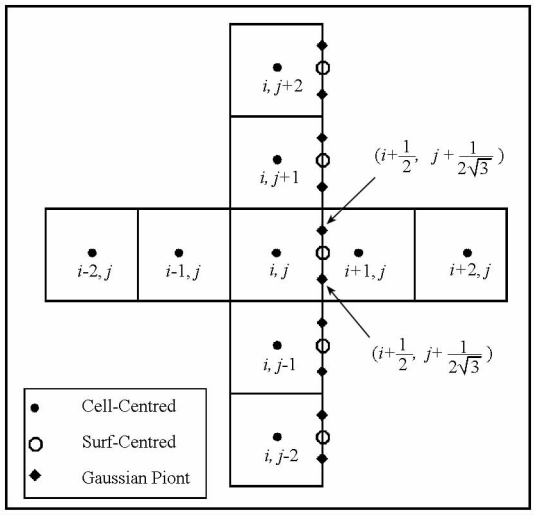


图1　CWENO6反卷积过程网格示意图

Fig. 1　Grid sketch of deconvolution procedure in CWENO6 schemes

常用的反卷积方法可以使用与面平均值重构相同的方法得到，具体的过程可以参考V. A. Titarev的文章[11]。此类方法从原理上保证的反卷积的精度与面平均值重构的精度一致，但这类方法求每个界面通量时需要多次计算光滑因子以及与之对应的非线性权值，求解多维问题特别是3维问题时，整个重构过程的计算量将十分巨大。为了有效提高高精度格式在有限体积法的计算效率，使之得到更广泛的应用，需要尽可能减少反卷积过程的计算量。本文考虑到图1所示网格中高斯积分的精度至多达到3阶，因此使用了3阶MUSCL方法代替传统的5阶WENO方法进行反卷积计算。其表达式如下：

$$u^{-}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2\sqrt{3}}}=\tilde{u}^{-}_{i+\frac{1}{2},j}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\phi^{+} \tag{22}$$

$$u^{-}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2\sqrt{3}}}=\tilde{u}^{-}_{i+\frac{1}{2},j}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\phi^{-} \tag{23}$$

其中：

$$\phi^{+}=\frac{1}{3}S(r)\Delta u_j+\frac{1}{3}S(\frac{1}{r})\Delta u_{j+1} \tag{24}$$

$$\phi^{-}=\frac{1}{3}S(\frac{1}{r})\Delta u_{j+1}+\frac{1}{3}S(r)\Delta u_j \tag{25}$$

$$\Delta u_j = u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1} \tag{26}$$

$$r = \frac{\Delta u_{j+1}}{\Delta u_j} \tag{27}$$

其中 $S(r)$ 为梯度限制器。本文选取 Van Leer 梯度限制器,即:

$$S(r) = \frac{r + |r|}{1 + r} \tag{28}$$

由于不需要重复计算光滑模板以及非线性权值,并且减少了反卷积计算时的模板点,因此采用此种反卷积方法计算多维问题时的计算开销较传统方法有了显著的下降。下文的数值实验证明,此类反卷积方法与传统方法所得到的数值结果差别不大。

3　CWENO6 格式精度的分析与验证

3.1　CWENO6 格式精度的分析

这里我们采用文献[12]中的方法来分析格式的精度,计算网格如图 1 所示,我们假定控制体内函数满足以下分布:

$$f(x,y) = e^{I(x+y)} \tag{29}$$

其中 $I^2 = -1$,设控制体为四边形,其边长分别为 Δx 和 Δy。设控制体(i, j)网格中心位置为(a,b),则控制体(i, j)的单元平均值为

$$\bar{u}_{i+1,j} = \frac{1}{\Delta x \Delta y}\int_{a-\Delta x/2}^{a+\Delta x/2}\int_{b-\Delta y/2}^{b+\Delta y/2} f(x,y)\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y \tag{30}$$

通过公式(30)可以方便地计算出每个点的格心平均值,如:

$$\bar{u}_{i+1,j} = \frac{1}{\Delta x \Delta y}\int_{a+\Delta x/2}^{a+3\Delta x/2}\int_{b-\Delta y/2}^{b+\Delta y/2} f(x,y)\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y \tag{31}$$

对于边界面 $i+1/2$ 的积分的精确值,可由以下公式确定:

$$\int u_{i+\frac{1}{2},j} = \int_{b-\Delta y/2}^{b+\Delta y/2} f\left(a+\frac{\Delta x}{2}, y\right)\cdot \mathrm{d}y \tag{32}$$

根据公式(30)和公式(17)可以得到由单元平均值获得的界面 $i+1/2$ 处的界面平均值:

$$\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{60}\cdot f_1(x,y) + \frac{3}{20}\cdot f_2(x,y) + \frac{3}{4}\cdot f_3(x,y) \tag{33}$$

其中$f_1(x,y)$,$f_2(x,y)$,$f_3(x,y)$为指数函数组成的多项式。处于篇幅限制,这里不再详细展开。

根据公式(22)和公式(23)可以得到 $i+1/2$ 界面上积分点$\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$以及积分点$\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$的函数值 $u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{\sqrt{3}}{6}}$,$u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{\sqrt{3}}{6}}$。

再由两点高斯积分公式,可以得到界面 $i+1/2$ 上的积分的数值解:

$$\int \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j} = \left(\frac{1}{60}\cdot f_1(x,y) + \frac{3}{20}\cdot f_2(x,y) + \frac{3}{4}\cdot f_3(x,y)\right)\cdot \Delta y \tag{34}$$

将公式(34)与公式(32)相除,并进行化简运算,最后按照 Δx 进行泰勒展开,最终可得 CWENO6 格式的误差传递函数

$$1 + O(\Delta x^6, \Delta y) \tag{35}$$

值得注意的是,如果使用同样的分析方法,可以得到 WENO5 格式的误差传递函数为

$$1 + O(\Delta x^5, \Delta y) \tag{36}$$

由此可见,CWENO6 格式的精度要高于传统的 WENO5 格式。

3.2　CWENO6 格式精度验证

为了验证本文混合格式的精度,在 2 维情况下对程序进行了收敛精度的测试。测试算例为标量输运问题。其方程如下:

$$\begin{cases}\phi(x,y,t) = \dfrac{1}{4}\exp(\alpha(x-ut)^2 + \beta(y-ut)^2)\\ u = 2, \alpha = 154, \beta = 154\end{cases} \tag{37}$$

图 2 为计算示意图。为了节省计算网格,计算采用了周期边界条件,整个计算域的范围$[-1,1]\times[-1,1]$,计算时间 $t = 5.0$ 。

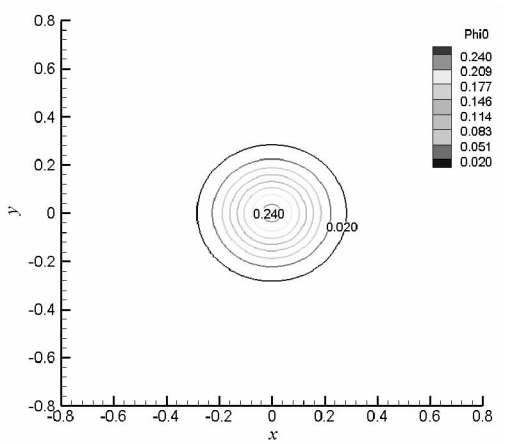


图 2　标量输运问题计算示意图

Fig. 2　Sketch of the scalar-convection problem

为了表述方便,将使用 5 阶 WENO 反卷积计算的 WENO5 格式记为 W5 - W5;将使用 3 阶 MUSCL 反卷积计算的 WENO5 格式记为 W5 - M3;将使用 3 阶 MUSCL 反卷积计算的 CWENO6 格式记为 CW6 - M3。

表 1 – 表 3 分别为不同格式在不同网格数目下测得的误差 L_1 的值,以及通过 L_1 误差测得的计算精度。由表 1、表 2 可以看出随着网格量的增加,两种格式的计算精度都逐渐提高,并且相同网格下两种方法的计算精度都比较接近。由此可见,采用本文所提出的 3 阶 MUSCL 反卷积方法对计算精度并未带来较为显著的影响。本文所采用的 3 阶 MUSCL 反卷积方法在保证计算精度的前提下,可以有效降低高精度有限体积法的计算开销。

从表 3 可以看出,CW6 – M3 格式 L_1 误差的大小均小于同样网格数目下其他两种格式的 L_1 误差,其计算精度也要高于其他两种格式,这反映了相同波数下 CWENO6 格式的数值耗散小于 WENO5 格式。值得注意的是,当网格较密时(本文中 $N>400$),CWENO6 格式的计算精度超过 WENO5 格式所能达到的最高精度。

表 1 W5 – W5 格式 L_1 误差表

Tab. 1 W5 – W5 Schemes L_1 errors

N	L_1 error	L_1 order
50	8.207e – 4	
100	2.230e – 4	1.880
200	3.729e – 5	2.580
300	7.121e – 6	4.083
400	1.851e – 6	4.682

表 2 W5 – M3 格式 L_1 误差表

Tab. 2 W5 – M3 Schemes L_1 errors

N	L_1 error	L_1 order
50	8.207e – 4	
100	2.289e – 4	1.881
200	3.728e – 5	2.580
300	7.120e – 6	4.083
400	1.911e – 6	4.571

表 3 CW6 – M3 格式 L_1 误差表

Tab. 3 CW6 – M3 Schemes L_1 errors

N	L_1 error	L_1 order
50	7.486e – 4	
100	1.860e – 4	2.010
200	2.476e – 5	2.909
300	4.527e – 6	4.193
400	9.823e – 7	5.535

4 数值结果

4.1 一维 Sod 激波管问题

Sod 模型问题是一维激波管问题,该问题常被用于考察数值方法对激波的捕获能力。计算区间为[– 1,1],其初场如下所示:

$$(\rho,u,p)=\begin{cases}(1,0,1) & (x<0)\\ (0.125,0,0.1) & (x\geqslant 0)\end{cases} \tag{38}$$

计算时间 $t=0.4$,通量计算使用 HLLC 方法,计算点数 N。为了分析两种格式在不同网格尺度下的性能表现,本文选取了 $N=50$,$N=200$ 两套网格进行计算,其计算结果如图 3 和图 4 所示。

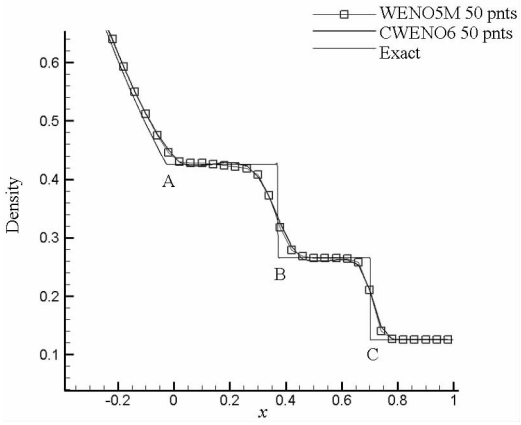


图 3 Sod 激波管问题计算结果,$N=50$

Fig. 3 Numerical result of Sod problem, $N=50$

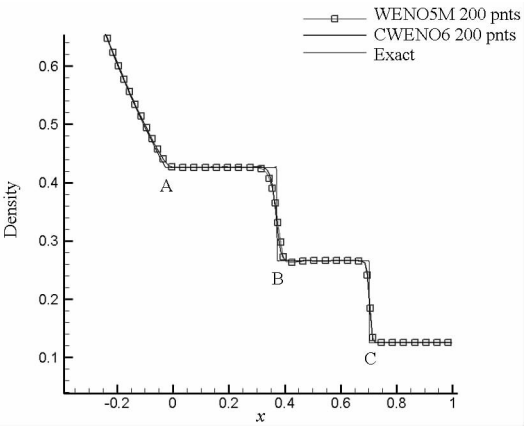


图 4 Sod 激波管问题计算结果, $N=200$

Fig. 4 Numerical result of Sod problem, $N=200$

从图 3 和图 4 可以看出,随着网格量的增加,两种格式均越发接近理论解。无论何种网格下,两种格式在膨胀波处(位置 A)、接触间断处(位置 B)以及激波处(位置 C)的计算结果均没有太大的差异。相同网格量下,两种格式均体现了较好的激波分辨率和间断分辨率,这说明当流动较为简单时,两种格式的得到的计算结果相差不大。

值得注意的是 $N=50$ 时,在完全光滑的区域,CWENO6 格式出现了少许的数值波动,而 WENO5 格式并未出现这种现象,笔者认为这是由于网格量较少时,中心格式的模板较长,开关函数反应流场间断能力的不足,从而引入了非物理的数值震荡。在 $N=200$,CWENO6 格式没有出现

非物理震荡,这是由于网格量增加,中心格式的数值色散效应减弱造成的。同时,这一现象也说明在波数较高的情形下,CWENO6 格式的鲁棒性要弱于 WENO5 格式。

4.2　一维激波密度波干扰问题

与 Sod 激波管问题不同,一维激波密度波干扰问题不仅包含了数值间断还包含了复杂的小尺度波动,一般用于考察计算格式对于一维问题的间断分别率以及小尺度结构分辨率。其初场如下:

$$(\rho,u,p)=\begin{cases}\left(\dfrac{27}{7},\dfrac{4\sqrt{35}}{9},\dfrac{31}{3}\right) & (x<-4)\\ \left(1+\dfrac{1}{5}\sin 5x,0,1\right) & (x\geqslant -4)\end{cases} \tag{39}$$

整个计算域为[-5,5],计算时间 $t=1.8$,通量计算使用 HLLC 方法,计算点数为 N。

图 5 为 WENO5 格式以及 CWENO6 格式在 $N=201$ 时的密度结果。图 6 为上述结果在位置 B 处的局部放大图。图 7 为上述两种格式在 $N=401$ 时位置 B 处的局部放大图。由于该问题不存在解析解,取 $N=1801$ 时,WENO5 格式的结果作为精确解。

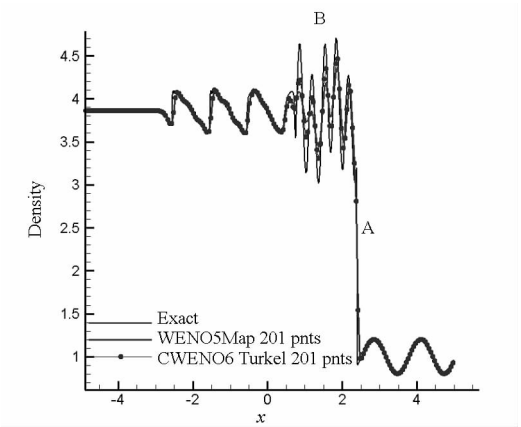


图 5　激波密度波干扰问题计算结果,$N=201$

Fig. 5　Numerical result of shock entropy wave interaction, $N=201$

从图 5 中可以看出,在存在正激波的 A 点处,CWENO6 和 WENO5 的结果相差不大,这说明在此问题中 CWENO6 和 WENO5 格式的激波分辨率大体相当,这一点与 Sod 问题得到的结论一致。两种格式的主要差别体现在包含复杂密度波动的 B 处。区域 B 是一个存在小尺度接触间断的区域。从图 6 可以看出,由于数值耗散小,CWENO6 格式对波峰和波谷的分辨更为清晰。由于该处速度分量仍然较为光滑,因此可以推断:在网格量较少的情况下对于小尺度接触间断的分辨能力,CWENO6 要高于 WENO5 格式。

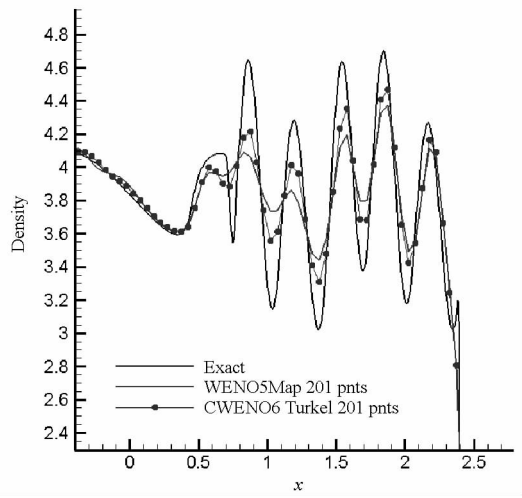


图 6　激波密度波干扰问题 B 处计算结果,$N=201$

Fig. 6　Numerical result of shock entropy wave interaction in zone B, $N=201$

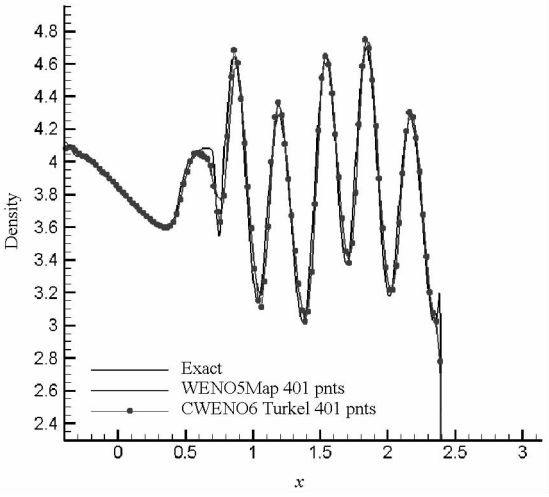


图 7　激波密度波干扰问题 B 处计算结果,$N=401$

Fig. 7　Numerical result of shock entropy wave interaction in zone B, $N=401$

从图 7 可以看出,在 N = 401 时两种格式的结果相当一致,并且均与精确解十分接近。但在第一个波谷处,WENO5 格式的结果仍然与精确解存在一定差异。这说明,随着网格数目的增加,两种格式的差别逐渐减少,CWENO6 格式仍然体现出更强接触间断分辨率。

4.3　前台阶问题

前台阶问题是用于考察多维情况下空间格式激波捕获能力以及空间格式稳定性的经典问题。经过一段时间的发展,整个流场包含弓形激波、正激波、反射斜激波等多种流动结构。本文采用的计算域为[0,3] × [0,1]的矩形空间,在 $x=0.6$ 处,存在一个高 0.2 的台阶。来流马赫数 $Ma=$

3.0,计算时间 $t=4.0$,通量计算方式为 HLLC 方法。网格密度 $h=0.01$。

图 8 和图 9 分别为 W5 – W5 格式以及 CW6 – M3 格式计算结果的密度等值线图。

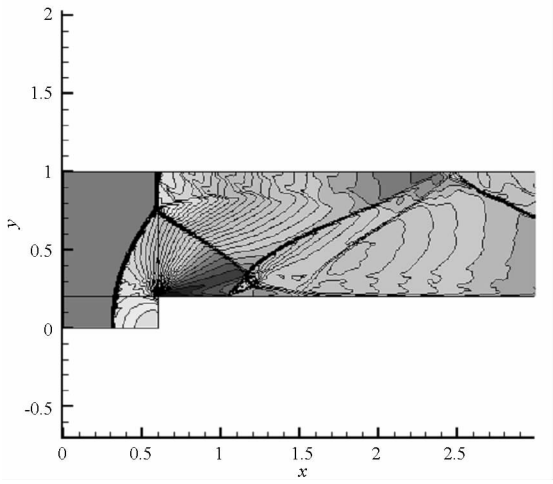


图 8 前台阶问题 W5 – W5 格式密度等值线图

Fig. 8 Forward facing steps, W5 – W5 schemes density contour

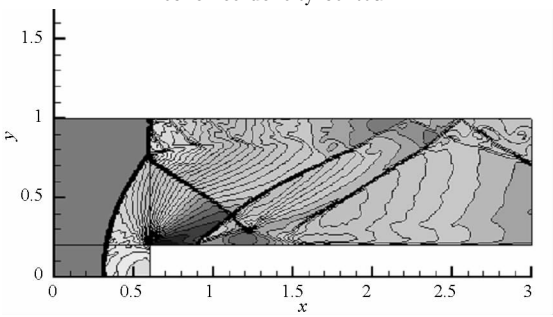


图 9 前台阶问题 CW6 – M3 格式密度等值线图

Fig. 9 Forward facing steps, CW6 – M3 schemes density contour

不难发现,对于正激波以及弓形激波,两种格式所得到的差别不大,每种格式都体现了较高的激波分辨率。两种格式的主要差别体现在上壁反射激波入射到下壁面形成的流场结构上。WENO5 格式得到的滑移线与 CWENO6 格式得到的滑移线存在较为明显的差异,这一差异直接造成下壁面反射激波的形态也存在明显差异。CWENO6 格式存在两道较为明显的反射激波,而 WENO5 格式第二道反射激波并不十分明显。通过以上分析我们不难发现,两种格式在激波分辨能力上差别并不十分显著,但是对于滑移线的分辨能力,CWENO6 格式要优于 WENO5 格式。

4.4 双马赫反射问题

本文所采用的双马赫反射算例由 Woodward[13] 等人提出,其计算域为[0,4]×[0,1]的矩形计算空间,$t=0$ 时刻在 $x=0.166$ 的位置存在一道与 x 轴呈 60°夹角的右行正激波,波前马赫数 $Ma=10$。计算时间 $t=0.2$,通量计算方式为 HLLC 方法,网格量为 1920×480。

双马赫反射问题一个最显著的特点是在发展一段时间后,整个流场中不仅包含各种流动结构还包含了不同尺度的流动结构,是考察格式收敛性以及对多尺度复杂流动模拟能力的一个重要考核算例。

图 10 和图 11 为 W5 – M3 格式,和 CW6 – M3 格式计算结果在区域[2,3]×[0,1]的密度等值线图。

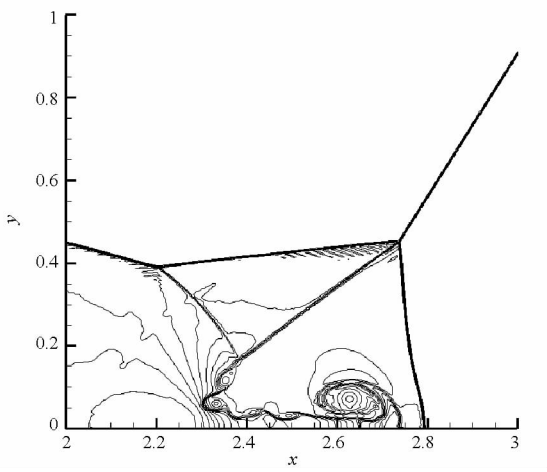


图 10 双马赫反射,W5 – M3 格式密度等值线图

Fig. 10 Dual Mach reflection, W5 – M3 schemes density contour

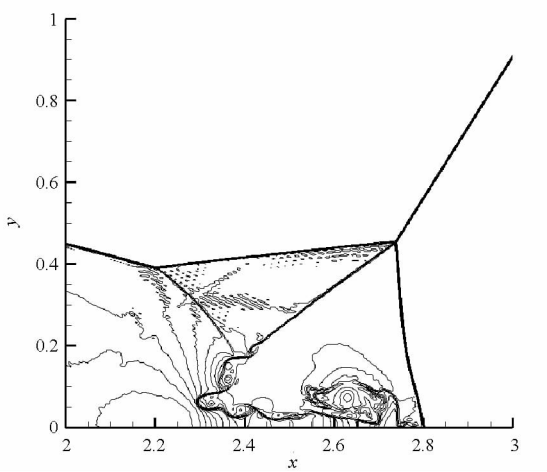


图 11 双马赫反射,CW6 – M3 格式密度等值线图

Fig. 11 Dual Mach reflection, CW6 – M3 schemes density contour

分析结果,可以发现两种格式均较好的捕捉到间断和滑移线所在的位置。整个流场激波以及滑移线的位置与文献中所列结果相一致[11,14],这说明两种格式对大尺度流动结构的分辨率相差不大。

对于滑移线具体的形态,两种格式的差别较

为明显。W5 – M3 格式,滑移线较为光滑。CW6 – M3 格式计算得到的滑移线波动更为明显。

这一现象再次说明,CWENO6 格式的激波分辨率和 WENO5 格式相差不大,两种格式均能较好的捕捉尺度相对较大的流动结构(如滑移线的大致位置)。在小尺度流动结构的捕获能力上(如滑移线的具体形态),数值耗散较小的 CWENO6 格式在网格量相同时表现更佳。

5　结论

本文通过理论推导,得到了一种 6 阶中心格式与 5 阶 WENO 格式相结合的混合格式,通过引入类 MUSCL 的反卷积方法,将高精度格式应用到有限体积法中,提高了高精度有限体积法的计算效率。通过验证算例,得到以下主要结论:

1)对于较为简单的流动现象,CWENO6 格式与 WENO5 格式无论在激波分辨率还是接触间断分辨率上差别均不大。CWENO6 格式和 WENO 5 格式对于大尺度流动结构分辨能力基本一致。对于简单流动以及只关心大尺度结构流场的数值模拟,使用 WENO5 方法可以得到较好的结果,其格式的自身的数值粘性对流场的抹平作用影响并不十分明显。

2)对于较为复杂的流动现象,特别是多尺度流动。WENO5 格式的数值粘性会对流场中小尺度结构带来较为严重的抹平作用。CWENO6 格式通过开关函数控制了格式在光滑区域的数值粘性,格式数值粘性对流场的抹平作用没有 WENO5 严重。在相同网格量的条件下 CWENO6 格式对小尺度流动结构的分辨能力更高,特别是对滑移线的分辨能力 CWENO6 格式要明显优于 WENO5 格式。对于湍流直接模拟这样多尺度复杂流动的模拟,流场中的小尺度脉动不可忽略,采用数值粘性较小的 CWENO6 格式比 WENO5 格式更能准确反映流场的流动特征。

3)CWENO6 格式的鲁棒性要弱于 WENO5 格式。由于开关函数不能完全精确控制数值粘性的大小,在间断附近的光滑区域 CWENO6 格式可能会出现一定的非物理震荡。对于 CWENO6 格式,开关函数的选择十分关键,本文选取的开关函数,还需要更进一步发展。

参考文献(References)

[1] Shu C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws[R]. Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations,1998,325 – 432.

[2] Martin M P. Direct numerical simulation of hypersonic turbulent boundary layers. Part 1. Initialization and comparison with experiments [J]. Journal of Fluid Mechanics,2007,570: 347 – 364.

[3] 梁贤, 李新亮, 傅德薰, 等. Mach 8 的平板可压缩湍流边界层直接数值模拟及分析[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2012, 42(3): 282 – 293 .
LIANG Xian, LI Xinliang, FU Dexun, et al. DNS and analysis of a spatially evolving hypersonic turbulent boundary layer over a flat plate at Mach 8[J]. Scientia Sinica Physica, Mechanica & Astronomica,2012, 42(3): 282 – 293. (in Chinese)

[4] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution[J]. Journal of Computational Physics, 1992, 103(1):16 – 42.

[5] Ren Y X, Liu M E, Zhang H X. A characteristic-wise hybrid compact-WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics,2003, 192(2): 365 – 386.

[6] Deng X G, Zhang H X. Developing high-order weighted compact nonlinear schemes [J], Journal of Computational Physics,2002, 165(1): 22 – 44.

[7] Mattiussi C. An analysis of finite volume, finite element, and finite difference methods using some concepts of algebraic topology [J]. Journal of Computational Physics, 1997, 133(2): 289 – 309.

[8] Henrick A K, Aslam T D, Powers J M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points [J]. Journal of Computational Physics, 2005, 207(2):542 – 567.

[9] Johnsen E, Larrson J, Bhagatwala A V, et al. Assessment of high-resolution methods for numerical simulations of compressible turbulence with shock waves [J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(4):1213 – 1237.

[10] Jameson A, Schmidt W, Turkel E. Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods with Runge-Kutta time stepping scheme [R]. AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamic Conference,1981:1981 – 1259.

[11] Titarev V A, Toro E F. Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 2004, 201(1): 238 – 260.

[12] 刘君, 白晓征, 郭正. 非结构动网格计算方法 – 及其在包含运动界面的流场模拟中的应用[M]. 长沙:国防科技大学出版社, 2003:46 – 54.
LIU Jun, BAI Xiaozheng, GUO zheng. The methodology and applications of moving boundary problem simulations for the unstructured moving grids[M]. Changsha: Press of National University of Defense Technology, 2003: 46 – 54. (in Chinese)

[13] Woodward P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks[J]. Journal of Computational Physics,1984, 54(1):115 – 173.

[14] Gerolymos G A, Sénéchal D, Vallet I. Very-high-order WENO schemes [J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(23):8481 – 8524.