doi:10.11887/j.cn.201406012 http://journal.nudt.edu.cn

探月飞船初次再入段纵程的解析预测方法*

杜 昕,李海阳,黄悦琛
(国防科技大学 航天科学与工程学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:探月飞船升阻比较低,为实现长纵程飞行,必须采用跳跃式再入方式。在跳跃式再入轨迹在线规划或预测制导中,如何快速准确地预测初次再入段纵程是一个非常关键的问题。针对这一问题,研究提出一种解析预测方法:利用匹配渐进展开方法得到再入纵向运动方程的闭型近似解;将初次再入段轨迹分为三段,第一段采用高度作为积分自变量,并利用复合梯形公式得到纵程,第二段和第三段分别采用二次多项式来拟合阻力加速度-能量剖面,根据近似解结果反解出多项式系数,并将得到的阻力加速度倒数-能量函数进行积分,得到第二段和第三段的纵程;对解析预测方法的精度和计算效率进行分析,结果表明该方法计算精度较高,速度快,可用于跳跃式再入轨迹的在线规划和制导。

关键词:跳跃式再入;解析预测;闭型近似解;阻力加速度-能量剖面
中图分类号:V412.4 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2014)06-065-05

Analytical downrange prediction of the first entry phase in skip entry for lunar module

DU Xin, *LI Haiyang*, *HUANG Yuechen*
(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: For lunar module with low lift-to-drag ratio, skip entry trajectory must be flown to extend downrange. According to the key element of skip entry trajectory online planning or predictive guidance is how to predict the downrange of the first entry phase rapidly and precisely, an analytical method was proposed. Firstly, closed-form approximate solution of the longitudinal equation of motion was obtained from using matched asymptotic expansion method. Secondly, the first entry trajectory was divided into three phases. In the first phase, altitude served as the independent variable of integration, downrange was obtained from using a composite trapezoidal-rule. In the second and third phases, quadratic polynomial was used for drag-energy profile fitting, and the polynomial coefficients were solved according to the result of the approximate solution, and downrange was obtained by integrating the reciprocal of drag versus energy function. Finally, the accuracy and computational efficiency of the proposed method were analyzed. Simulation results indicate that the characteristic of the proposed method with high accuracy and computational efficiency is very suitable for online planning and guidance.

Key words: skip entry; analytical prediction; closed-form solution; drag-energy profile

探月飞船返回地球时,将以第二宇宙速度再入地球大气层。由于其升阻比较低,为覆盖长的纵程,唯一可行的方法是采用跳跃式再入飞行[1]。因此,近年来出现了大量关于跳跃式再入的研究,主要集中在轨迹的快速规划与制导律设计[1,2-8]。

再入轨迹规划与制导律设计时,一般将纵横向解耦,横向运动控制通过滚转角符号反转来实现,而轨迹规划算法或制导律用来控制纵向运动。在跳跃式再入制导中,一般将整个再入轨迹分为初始滚转段、下降控制段、上升控制段、开普勒段以及二次再入段(又称末次再入段),如图1所示。其中,初始滚转段、下降控制段和上升控制段共同称作初次再入段。只要知道跳出点(即上升控制段终点)信息,开普勒段和二次再入段的纵程都可以通过解析公式计算得到[9],因此在轨迹规划或者预测制导中,关键就在于对初次再入段纵程的预测。

阿波罗再入制导中采用解析公式来预测纵程,但做了很多近似和假设,当再入总纵程大于4600km时,精度较差[10];Brunner在整个再入过程中采用线性加常值的滚转角策略进行轨迹规

* **收稿日期**:2014-05-16
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11372345);国家重点基础研究发展计划(973计划)资助项目(2013CB733100)
作者简介:杜昕(1985—),男,四川安县人,博士研究生,E-mail:232783682@qq.com;
李海阳(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:lihaiyang@nudt.edu.cn

划,并利用数值积分的方法得到初次再入段纵程[2];Bairstow 采用常值纵向升阻比策略进行轨迹规划,也通过数值积分的方法得到初次再入段纵程[6];Kluever 通过解析方式得到跳出点信息,并根据纵程与速度的积分关系,采用简单的梯形积分得到初次再入段纵程[9]。事实上,Kluever 所采用的方法实质就是通过阻力加速度 - 速度(D - V)剖面来得到纵程,这个方法由阿波罗制导[10]奠定基础,并在航天飞机制导[11]以及后续的再入制导律设计[12-13]中得到广泛应用。

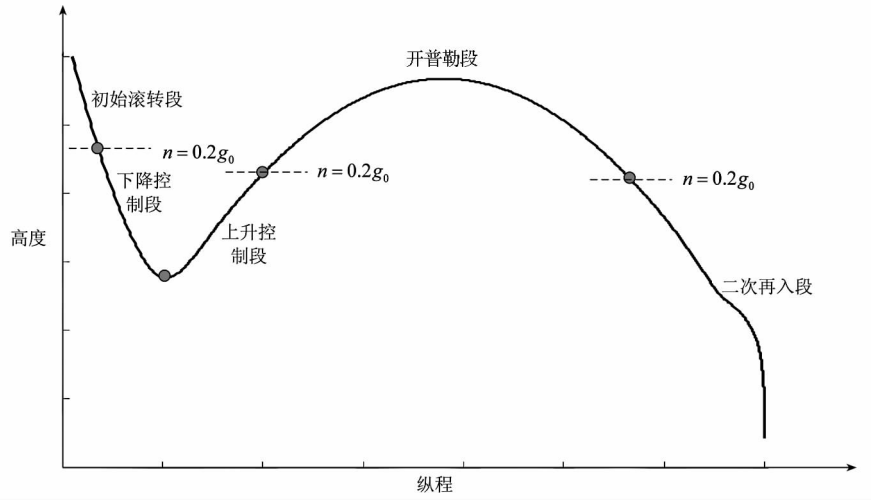


图 1 跳跃式再入轨迹分段示意图

Fig. 1 Phases of skip entry trajectory

数值预测方法计算量大,不适用于在线任务;而 Kluever 提出的方法精度较差,积分项在整个初次再入段变化非常剧烈。因此,本文提出一种精度较高的解析预测方法。基于匹配渐进展开方法得到跳跃式再入运动方程的闭型近似解[14-16]。然后,将初次再入段轨迹分为三段,第一段中纵程对高度的导数随高度的变化规律近似为线性变化,因此可采用简单的 Simpson 积分或 Gauss 积分得到纵程。在第二段和第三段中,阻力加速度 - 能量曲线近似为二次曲线,因此,可利用匹配渐进展开近似解求出多项式系数,进一步得到纵程的解析表达式。仿真结果表明,该方法计算量小,精度较高,可用于在线轨迹规划与制导。

1 再入动力学模型

考虑地球为均质旋转圆球的三自由度再入运动方程

$$\dot{r} = V\sin\gamma \tag{1}$$

$$\dot{\theta} = \frac{V\cos\gamma\sin\psi}{r\cos\phi} \tag{2}$$

$$\dot{\phi} = \frac{V\cos\gamma\cos\psi}{r} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\dot{V} = &-D - g\sin\gamma + \omega^2 r\cos\phi\sin\gamma\cos\phi \\ &-\omega^2 r\cos\phi\cos\gamma\sin\phi\cos\psi\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}V\dot{\gamma} = &L\cos\sigma + \left(\frac{V^2}{r} - g\right)\cos\gamma + 2\omega V\cos\phi\sin\psi \\ &+\omega^2 r\cos\phi\cos\gamma\cos\phi + \omega^2 r\cos\phi\sin\gamma\sin\phi\cos\psi\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}V\dot{\psi} = &\frac{L\sin\sigma}{\cos\gamma} + \frac{V^2}{r}\cos\gamma\sin\psi\tan\phi \\ &-2\omega V(\cos\phi\tan\gamma\cos\psi - \sin\phi) \\ &+\frac{\omega^2 r}{\cos\gamma}\sin\phi\cos\phi\sin\psi\end{aligned} \tag{6}$$

其中,r 为地心距,θ 为经度,ϕ 为纬度,V 为飞行器速度,γ 为飞行路径角,ψ 为速度方位角(正北方向为零,顺时针旋转为正),σ 为滚转角(控制变量),ω 为地球自转角速度,g 为重力加速度,L 和 D 分别为升力加速度和阻力加速度,定义为

$$L = \rho V^2 SC_L/(2m) \tag{7}$$

$$D = \rho V^2 SC_D/(2m) \tag{8}$$

其中,C_L 为升力系数,C_D 为阻力系数,m 为飞行器质量,S 为飞行器参考迎风面积,ρ 为大气密度:

$$\rho = \rho_{ref}\exp\left(-\frac{H}{H_s}\right) \tag{9}$$

其中,$H = r - r_{ref}$ 为飞行高度,r_{ref} 为参考地心距,ρ_{ref} 为参考地心距处大气密度,H_s 为密度标高。

2 基于匹配渐进展开的近似解

忽略地球自转,并做下列无量纲化处理:

$$h = \frac{r - r_{ref}}{r_{ref}}, v = \frac{V}{\sqrt{\mu/r_{ref}}} \tag{10}$$

并令

$$b = \frac{H_s C_D \rho_{ref}}{m/S}, \varepsilon = \frac{H_s}{r_{ref}}, \lambda = \frac{C_L}{C_D}\cos\sigma \tag{11}$$

利用匹配渐进展开方法,将纵向运动方程在

大气外层区域与内层区域分别展开,得到统一形式的初次再入段纵向运动闭型近似解为[16]

$$v^2 = -\frac{2h}{1+h} + v_*^2 \exp\left[\frac{-2(\tilde{\gamma}-\tilde{\gamma}_*)}{\lambda}\right] \tag{12}$$

$$\cos\gamma = c_1 v_* \cos\gamma_* + \frac{\lambda b}{2}\exp\left(-\frac{h}{\varepsilon}\right) \tag{13}$$

其中

$$c_1 = [v_*^2(1+h)^2 - 2h(1+h)]^{-0.5} \tag{14}$$

计算常数 v_*,$\cos\gamma_*$,由再入初始条件得到:

$$v_*^2 = v_{ei}^2 + \frac{2h_{ei}}{1+h_{ei}} \tag{15}$$

$$\cos\gamma_* = \frac{(1+h_{ei})v_{ei}\cos\gamma_{ei}}{v_*} \tag{16}$$

其中,v_{ei},h_{ei},γ_{ei}为飞船再入初始时刻的无量纲速度、高度以及飞行路径角。

辅助的飞行路径角变量 $\tilde{\gamma}$,$\tilde{\gamma}_*$通过下式求得:

$$\cos\tilde{\gamma} = \cos\tilde{\gamma}_* + \frac{\lambda b}{2}\exp\left(-\frac{h}{\varepsilon}\right) \tag{17}$$

$$\cos\tilde{\gamma}_* = 1 - \frac{\lambda b}{2}\exp\left(-\frac{h_{\min}}{\varepsilon}\right) \tag{18}$$

在初次再入段的最低点,有 $h = h_{\min}$,$\gamma = 0$,因此有

$$1 = c_2 v_* \cos\gamma_* + \frac{\lambda b}{2}\exp\left(-\frac{h_{\min}}{\varepsilon}\right) \tag{19}$$

其中

$$c_2 = [v_*^2(1+h_{\min})^2 - 2h_{\min}(2+h_{\min})]^{-0.5} \tag{20}$$

采用牛顿迭代法求解上式得到 $h_{\min}$,两到三步就可以收敛,其中式(19)对 h 的导数可以解析得到。

经过最低点之后,轨迹开始上升,有

$$\tilde{\gamma}'_* = -\tilde{\gamma}_* \tag{21}$$

最低点两边的解在最低点处必须匹配,得到

$$(v'_*)^2 = v_*^2 \exp(4\tilde{\gamma}_*/\lambda) \tag{22}$$

$$\cos\gamma'_* = \left[1 - \frac{\lambda b}{2}\exp\left(-\frac{h_{\min}}{\varepsilon}\right)\right] \times \left[(1+h_{\min})^2 - \frac{2h_{\min}(1+h_{\min})}{(v'_*)^2}\right]^{0.5} \tag{23}$$

轨迹进入上升段后,一旦阻力加速度小于 $0.2g_0$,即认为飞船跳出了大气层进入开普勒段[10]。在跳出点,有

$$\frac{1}{2}\rho\left(v_{exit}\sqrt{\mu/r_{ref}}\right)^2 \frac{C_D S}{m} = 0.2g_0 \tag{24}$$

联立式(12)、式(13)、式(24)可求得跳出点状态 h_{exit},v_{exit}及 γ_{exit}。

3　初次再入段航程预测方法

纵程 R 由式(25)定义

$$\dot{R} = \frac{V\cos\gamma}{r}R_E \tag{25}$$

其中,R_E 为地球平均半径。

经典的再入制导律通常跟踪阻力加速度 - 速度剖面来跟踪纵程,纵程由式(26)计算得到

$$R = \int_{V_i}^{V_f} -\frac{V}{D(V)}\mathrm{d}V \tag{26}$$

式(26)基于两个假设:$\cos\gamma \approx 1$ 以及 $D \gg |g\sin\gamma|$。在初次再入段,飞行路径角从负变化到正,其绝对值始终保持在一个很小的范围内,因此第一个假设成立。但是在再入刚开始的一段时间内,重力仍占主导地位,第二个假设不成立,采用式(26)计算航程将带来较大的误差。而采用阻力加速度 - 能量剖面来计算纵程可以避免这一缺陷。

定义单位质量机械能为

$$E = gH + \frac{V^2}{2} \tag{27}$$

g 在初次再入段变化很小,假设其为常值,有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}H} = g + V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}H} \tag{28}$$

忽略地球自转,有:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}H} = \frac{\dot{V}}{\dot{H}} = \frac{-D - g\sin\gamma}{V\sin\gamma} \tag{29}$$

代入式(28),得到

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}H} = \frac{-D}{\sin\gamma} \tag{30}$$

由几何关系得到

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}R} = \tan\gamma \tag{31}$$

综合式(30)和式(31)可以得到初次再入段航程的解析表达式

$$R = -\int_{E_i}^{E_f}\frac{\cos\gamma}{D}\mathrm{d}E \approx -\int_{E_i}^{E_f}\frac{1}{D}\mathrm{d}E \tag{32}$$

因此,得到了阻力加速度 - 能量曲线,就能求出纵程。

然而,再入刚开始时,D 较小,$1/D$ 较大,近似解较小的偏差会带来 $1/D$ 较大的偏差。因此,这一段的纵程不能采用阻力加速度 - 能量剖面来求解,应采用新的方法。

根据以上分析,将初次再入段纵程分为三段分别求解:第一段从再入点到匹配渐进展开解的大气内层区域边界($h = \varepsilon$),第二段从 $h = \varepsilon$ 处到阻力加速度峰值点处,第三段从阻力加速度峰值点处到跳出点处。后两段采用阻力加速度 - 能量剖面来预测纵程。

将纵程对高度求导,有

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}H}=\frac{\dot{R}}{\dot{H}}=\frac{R_E}{r}\cot\gamma=C_H \tag{33}$$

在第一段中，C_H 随 H 的变化规律接近于线性变化，如图 2 所示。因此，可以采用 Simpson 积分或复合梯形公式或 Gauss 积分求得第一段的纵程。选择高度作为自变量还有一个好处：当 h 已知时，可以通过式(13)快速求出对应的 γ 值，进一步求得 C_H，无须迭代计算。

当高度继续下降，接近初次再入段的最低点时，飞行路径角会逐渐接近于 0°，从而导致 C_H 值急剧增大，C_H-H 曲线会出现振荡，因此，剩余的纵程需采用阻力加速度－能量剖面来计算。

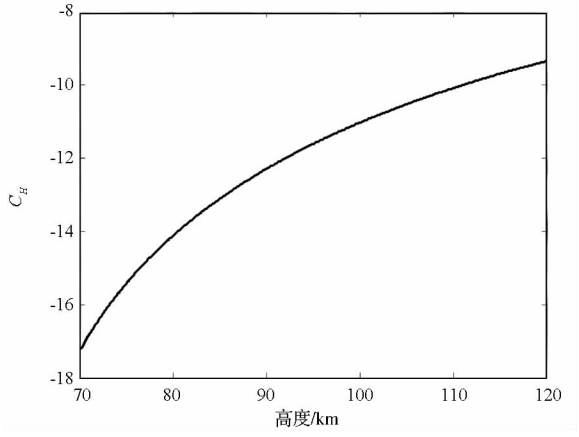


图 2 C_H 随高度的变化规律(第 1 段)

Fig. 2 C_H versus altitude profile (Phase 1)

在第二段和第三段中，阻力加速度随能量的变化规律近似为二次曲线[3,10-11]，因此，在后两段中，设 $D=a_0+a_1E+a_2E^2$，则有

$$\int\frac{1}{D}\mathrm{d}E=\frac{\arctan\left(\dfrac{2a_2E+a_1}{\sqrt{4a_0a_2-a_1^2}}\right)}{\sqrt{4a_0a_2-a_1^2}} \tag{34}$$

后两段的纵程 R 可以通过式(32)和式(34)解析求得。

第二段和第三段的分界点是初次再入段阻力加速度峰值点，精确的峰值点状态需通过联立式(35)～(37)迭代求解。

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}h}-\frac{r_{ref}}{H}v^2=0 \tag{35}$$

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}h}=-\frac{2}{(1+h)^2}-\frac{2}{\lambda}v_*^2\exp\left[\frac{-2(\tilde{\gamma}-\tilde{\gamma}_*)}{\lambda}\right]\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}h} \tag{36}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}h}=\frac{\lambda b\exp(-h/\varepsilon)}{2\varepsilon\sin\tilde{\gamma}} \tag{37}$$

为避免数值迭代，这里选择 $h=h_{\min}+\delta h$ 处的状态来近似峰值点状态，带来的误差较小。其中 $\delta h>0$ 为小量。

同样地，为避免迭代运算，采用高度来定义跳出点。对于跳跃式再入，定义高度等于 85km 处为跳出点[9]。

4 仿真算例

飞行器参数取 CEV 参数，质量 9500kg，大底截面直径 5.5m，升力系数 0.44，阻力系数 1.25。再入点高度 120km，再入速度 11km/s，再入角 −6°，滚转角 60°。

第一段采用复合梯形公式求积得到纵程，如图 3 所示。

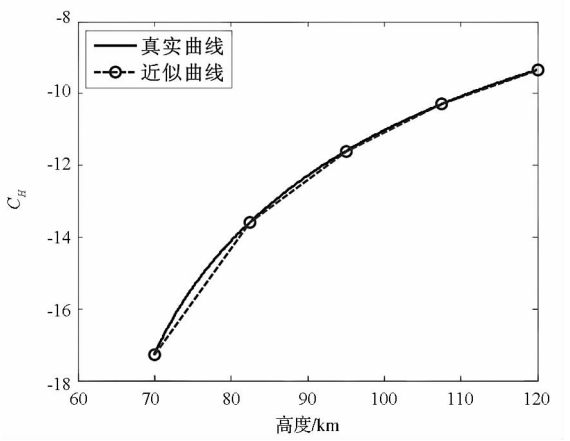


图 3 复合梯形公式求积(第 1 段)

Fig. 3 Composite trapezoidal-rule integration(Phase 1)

匹配渐进展开近似解具有这样的特性：离初始点越近，解的精度越高。从图 3 中可以看到，等分点处 C_H 的近似值和真实值几乎重合，只需较小的等分个数即可达到较高的精度。若想进一步提高精度，可以采用变步长的 Simpson 积分公式或者 Gauss 积分公式。其中真实曲线通过数值积分得到，近似曲线通过近似解解出的若干点拟合得到。

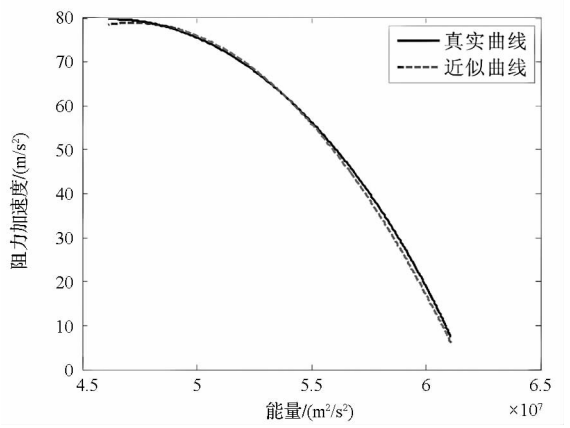


图 4 阻力加速度－能量曲线拟合(第 2 段)

Fig. 4 Drag-energy profile fitting(Phase 2)

从图 4 和图 5 可以看到，阻力加速度－能量曲线的拟合精度较高，曲线在峰值处的偏差较大。这

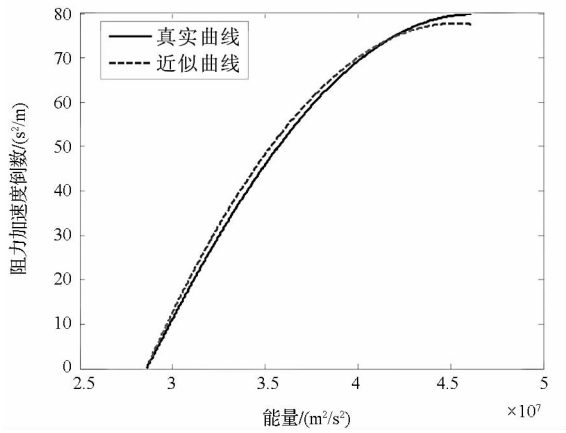


图 5　阻力加速度 - 能量曲线拟合(第 3 段)

Fig. 5　Drag-energy profile fitting (Phase 3)

是因为峰值处离初始点较远,近似解的相对误差较大,再加上这一点的阻力加速度值本身较大,因此阻力加速度的绝对误差较大。考虑到纵程的求解是阻力加速度的倒数对能量的积分,因此,峰值处阻力加速度的偏差不会带来太大的纵程计算偏差。

纵程的解析预测结果如下:第一段纵程为 609.85km,第二段纵程为 359.71km,第三段纵程为 952.86km,整个初次再入段纵程为 1922.42km。而采用 0.1s 步长的龙格库塔数值积分得到的精确值为:第一段纵程为 605.04km,第二段纵程为 348.45km,第三段纵程为 938.49km,整个初次再入段纵程为 1891.98km。第一段纵程解析预测的绝对误差为 4.81km,相对误差为 0.79%;第二段纵程解析预测的绝对误差为 11.26km,相对误差为 3.23%;第三段纵程解析预测的绝对误差为 14.37km,相对误差为 1.53%;整个初次再入段纵程解析预测的绝对误差为 30.44km,相对误差为 1.61%。可以看到,解析预测的精度较高。

在 MATLAB 环境下,解析预测耗时约为 0.000 5s,而采用 5s 步长的四阶龙格库塔积分耗时约 0.025s,纵程计算的相对误差为 1.51%。可以看到,5s 步长的四阶龙格库塔积分计算精度和解析预测的精度相当,但其计算时间却是解析预测方法的 50 倍左右。因此,解析预测方法具有较高的计算效率,适合在线任务。

5　结论

本文采用匹配渐进展开方法得到跳跃式再入纵向运动方程的近似解,在此基础上将初次再入段轨迹分为三段分别得到纵程的解析预测方法。在轨迹的第一段选择高度作为自变量,并利用复合梯形公式进行积分得到纵程;在轨迹的第二段和第三段将阻力加速度 - 能量函数近似为二次多项式,并利用近似解的结果解析求得多项式系数,再采用能量作为自变量对阻力加速度倒数进行积分得到纵程。仿真结果表明该方法具有较高的计算精度和计算效率,可以用于跳跃式再入轨迹的在线快速规划或预测制导。

参考文献(References)

[1] Tigges M A, Crull T, Rea J, et al. Numerical skip-entry guidance[C]//Proceedings of the 20th Annual AAS Guidance and Control Conference, California, 2006: 1 - 21.

[2] Brunner C W. Skip entry trajectory planning and guidance[D]. Ames: Iowa State University, 2008.

[3] Garcia-Llama E. Analytic development of a reference trajectory for skip entry[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2011, 34(1): 311 - 317.

[4] Brunner C W, Lu P. Skip entry trajectory planning and guidance[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2008, 31(5): 1210 - 1219.

[5] 沈红新, 李海阳, 彭祺擘. 月球返回舱再入制导律设计[J]. 国防科技大学学报, 2010, 32(4): 7 - 12. (in Chinese)
SHEN Hongxin, LI Haiyang, PENG Qibo. Entry guidance law design for lunar return crew module[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2010, 32(4): 7 - 12.

[6] Bairstow S H. Reentry guidance with extended range capability for low L/D spacecraft[D]. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 2006.

[7] Rea J R, Putnam Z R. A comparison of two orion skip entry guidance algorithms[C]//Proceedings of AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, South Carolina, 2007: 1 - 19.

[8] Putnam Z R, Bairstow S H, Braun R D, et al. Improving lunar return entry range capability using enhanced skip trajectory guidance[J]. Journal of Spacecraft and Rocket, 2008, 45(2): 309 - 315.

[9] Kluever C A. Entry guidance using analytical atmospheric skip trajectories[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2008, 31(5): 1531 - 1534.

[10] Morth R. Reentry guidance for Apollo[R]. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 1966.

[11] Harpold J C, Graves C A. Shuttle entry guidance[J]. Journal of the Astronautical Sciences, 1979, 27(3): 239 - 268.

[12] Saraf A, Leavitt J A, Chen D T, et al. Design and evaluation of an acceleration guidance algorithm for entry[J]. Journal of Spacecraft and Rocket, 2004, 41(6): 986 - 996.

[13] Leavitt J A, Mease K D. Feasible trajectory generation for atmospheric entry guidance[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2007, 30(2): 473 - 481.

[14] Shi Y Y, Pottsepp L, Eckstein M C. A matched asymptotic solution for skipping entry into planetary atmosphere[J]. AIAA Journal, 1971, 9(4): 736 - 738.

[15] Calise A J, Melamed N. Optimal guidance of aeroassisted transfer vehicles based on matched asymptotic expansions[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1995, 18(4): 709 - 717.

[16] Mease K D, McCreary F A. Atmospheric guidance law for planar skip trajectories[C]// Proceedings of the 12th Atmospheric Flight Mechanics Conference, California, 1985: 408 - 415.