doi:10.11887/j.cn.201406032 http://journal.nudt.edu.cn

关节对中误差对机械臂末端定位精度影响*

张志雄[1],江志新[1],杨拥民[2],唐 力[1],闫 超[1]
(1. 国防科技大学 机电工程与自动化学院,湖南 长沙 410073;
2. 国防科技大学 装备综合保障技术重点实验室,湖南 长沙 410073)

摘 要:针对机械臂关节对中误差对机械臂末端定位精度影响进行研究。以6自由度机械臂为研究对象,利用D-H法建立了机械臂运动学模型,并建立对中误差传递数学模型。利用蒙特卡洛方法以MATLAB为平台进行了误差分布仿真实验,得出了由于对中误差引起的机械臂末端定位误差分布特点,以及在不同对中误差等级下,机械臂末端定位误差概率分布情况。为对中误差修正提供了参考基础,同时为机械臂定位精度评价提供了定量化依据。

关键词:关节对中误差;定位精度;蒙特卡洛仿真
中图分类号:TH113.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2014)06-185-06

Joint clearance effects on robot manipulators positional error

ZHANG Zhixiong[1], *JIANG Zhixin*[1], *YANG Yongmin*[2], *TANG Li*[1], *YAN Chao*[2]
(1. College of Mechatronics Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. Laboratory of Science and Technology on Integrated Logistics Support, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The effects of joint clearance on robot manipulators positional error were investigated. The kinematic model was built by using the D-H method to research the six degrees of freedom mechanical arm. The central error propagation model was established. The simulations of error distribution were conducted in MATLAB with Monee Carlo method. The distribution characteristic and probability distribution of positional error of mechanical arm's end, which is caused by the joint clearance, were obtained from the simulations at different levels of joint clearance. This research provides basis for error compensation and positional error evaluation.

Key words: joint clearance; positional error; Monte-Carlo simulation

随着机械臂在航空航天、机械制造、产品装配等领域应用越来越广,对机械臂定位精度等方面的要求也越来越高。然而,由于机械加工精度有限且转动副在装配过程中难以避免地存在一定的间隙,导致转动关节存在对中误差。由于对中误差的存在且各关节之间相互影响,导致机械臂末端执行器产生定位误差,影响定位精度。

关节间隙对于运动学的影响主要集中在间隙对位姿误差的影响上[1]。崔道碧[2]考虑了关节间隙对机器人末端执行器位姿误差的影响,通过D-H建模法建立位姿变换模型,在某一情况下,计算出机器人末端执行器位姿误差。但其只针对特定情况进行研究,不能综合分析出误差分布情况。郭鹏飞、赵永涛、徐卫良等[3-5]结合误差分布随机性的特点,利用蒙特卡洛方法对误差分布进行抽样仿真,从而分析误差造成的影响,但其仍没有对误差分布特性进行研究。利用数学工具将误差分布准确化、定量化地分析出来已经成为一种研究趋势[6-11]。

1 机械模型与假设

1.1 机械模型

最典型的工业机械臂具有6个关节,存在6个自由度,其中前3个自由度引导末端执行器装置至所需位置,而后3个自由度用来决定末端执行装置的方向[12]。本文所研究的6自由度机械臂结构示意图如图1所示,不同灰色的杆件代表机械臂的各个臂杆,杆件连接处的虚线圆柱代表关节,关节的转动方向为圆柱的轴向。依据机械臂的结构建立机械臂关节坐标系示意图如图2所示。其中包含了机械臂的基本参数。d_i 为第 $i-1$ 关节与第 i 关节间两法线连杆距离,a_i 为第 $i-1$ 关节与第 i 关节间连杆长度,α_i 为第 $i-1$ 连杆与

* **收稿日期**:2014-07-29
作者简介:张志雄(1960—),男,湖南攸县人,教授,硕士,E-mail:zzxnudt2010@sina.com

第 i 连杆间扭角，θ_i 为第 $i-1$ 连杆与第 i 连杆间夹角。机械臂 1 ~ 6 关节对应 1 ~ 6 坐标系，每个关节以其坐标系 z 轴为轴向进行转动，第 7 坐标系为机械臂末端点坐标系。

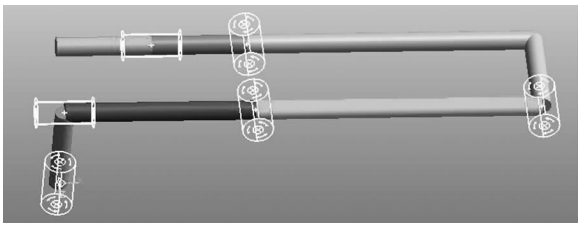


图 1 机械臂结构示意图

Fig. 1 Mechanical arm structure sketch map

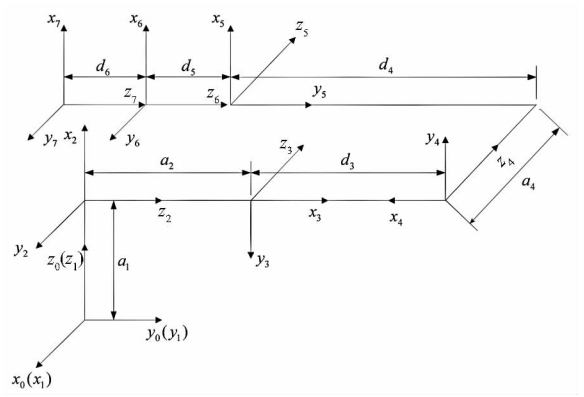


图 2 机械臂关节坐标系示意图

Fig. 2 Mechanical arm reference frame sketch map

1.2 基本假设

本文研究的前提假设如下：

1）刚体假设，即机械臂的所有臂杆都为刚体，不发生弹性形变；

2）仅考虑对中误差对于机械臂末端执行器定位精度的影响。

2 对中误差对机械臂末端误差影响模型

机械臂各关节在安装以及加工过程中，由于关节轴与轴套存在装配间隙，所以关节轴与安装基座基准轴存在下面 4 种相对位置情况：1）两轴对中；2）两轴平行但不对中；3）两轴端同心但倾斜；4）两轴倾斜。在 2 ~ 4 情况下关节都将产生对中误差。

关节对中误差模型如图 3 所示，其中关节基准坐标系为 $X-Y-Z$，旋转轴线为 Z 轴。由于对中误差影响所形成的某一状态下实际转轴为 P_1P_2，其与关节上下底面交点分别为 $P_1(R_1,\varphi_1)$，$P_2(R_2,\varphi_2)$。

图 3 中，外圆柱体半径为 R_0，其表示关节径向最大间隙。R_1 为第 i 关节 1 端面轴线偏离中心点距离，R_2 为第 i 关节 2 端面轴线偏离中心点距

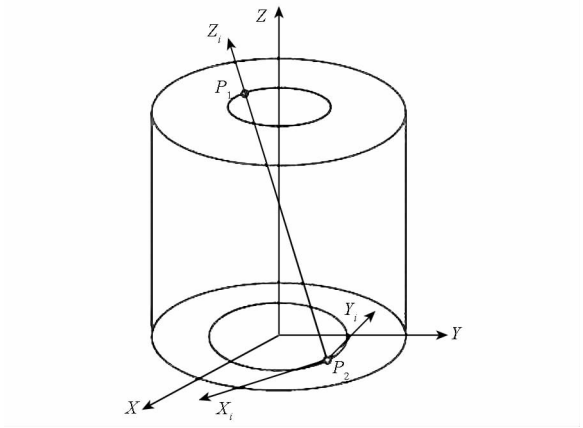


图 3 关节对中误差模型

Fig. 3 The joint clearance principium model

离，φ_1 为第 i 关节 1 端面中圆柱坐标表示法的转角，φ_2 为第 i 关节 2 端面中圆柱坐标表示法的转角。与 2 平面交点 P_1，P_2 分别在面 Σ_1，Σ_2 内满足等概率分布，其概率密度函数为：

$$f(R)=2\pi R/(\pi R_0{}^2),R\in[0,R_0] \quad (1)$$

$$f(\varphi)=1/(2\pi),\varphi\in[0,2\pi] \quad (2)$$

$$f(R_1,R_2,\varphi_1,\varphi_2)=R_1R_2/(\pi R_0^2)^2 \quad (3)$$

由关节对中误差引起的机械臂关节坐标系变换过程图如图 4 所示，其坐标变换过程为 1 次坐标系平动与 1 次绕 X 轴转动和 1 次绕 Y 轴转动。

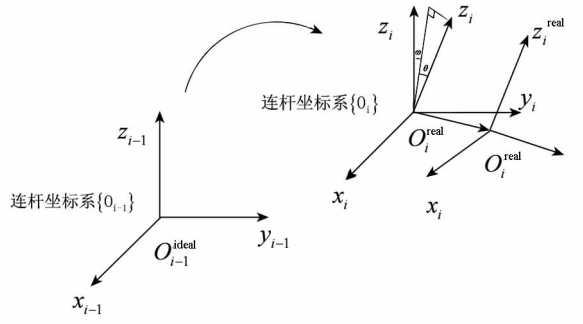


图 4 关节坐标系变换过程示意图

Fig. 4 The joint reference frame transform model

在对中误差影响下的实际坐标系相对于原始标准坐标系所产生的整体变换可表示为：

$$\boldsymbol{E}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_i & \boldsymbol{P}_i\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}\end{bmatrix} \quad (4)$$

式中，$\boldsymbol{C}_i$ 为实际坐标系相对于原始坐标系的姿态变换，$\boldsymbol{P}_i$ 为实际坐标系相对于原始坐标系的位置变换。变换中产生平动：

$$\overrightarrow{\boldsymbol{O}_i^{\text{ideal}}\boldsymbol{O}_i^{\text{real}}}=\begin{bmatrix}x_{P_2}\\ y_{P_2}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\varphi_2)R_2\\ \sin(\varphi_2)R_2\\ 0\end{bmatrix} \quad (5)$$

坐标系偏移位置变换矩阵为 $Trans(x_{P_2},y_{P_2},0)$，其表达式为：

$$Trans(x_{P_2},y_{P_2},0)=\begin{bmatrix}1&0&0&x_{P_2}\\0&1&0&y_{P_2}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{6}$$

由图 3 所示关节轴实际坐标系的矢量方向为 $\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1}$,其表达式为:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1}=\begin{bmatrix}\cos(\varphi_1)R_1-\cos(\varphi_2)R_2\\\sin(\varphi_1)R_1-\sin(\varphi_2)R_2\\h\end{bmatrix} \tag{7}$$

在 $Y-O-Z$ 面投影向量:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_{1yoz}}=\begin{bmatrix}0\\\sin(\varphi_1)R_1-\sin(\varphi_2)R_2\\h\end{bmatrix} \tag{8}$$

绕原始坐标系 O_i^{real} 的轴 x_{i-1} 转动角度为 ω:

$$\tan\omega=\frac{\sin(\varphi_1)R_1-\sin(\varphi_2)R_2}{h} \tag{9}$$

对应位姿变化矩阵 $Rot(x,\omega)$:

$$Rot(x,\omega)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\cos(\omega)&-\sin(\omega)&0\\0&\sin(\omega)&\cos(\omega)&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{10}$$

绕变换坐标系的轴 y_{i-1} 转动角度 θ:

$$\tan\theta=\frac{\cos(\varphi_1)R_1-\cos(\varphi_2)R_2}{|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_{1yoz}}|} \tag{11}$$

对应位姿变化矩阵 $Rot(y,\theta)$:

$$Rot(y,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta&0\\0&1&0&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{12}$$

可以得到实际坐标系位姿的变化矩阵 $\boldsymbol{E}_i$:

$$\boldsymbol{E}_i=Trans(x_{P_2},y_{P_2},0)Rot(x,\omega)Rot(y,\theta) \tag{13}$$

由于末端执行器的位姿误差是由各个关节的对中误差综合作用产生,利用 D-H 法建立机械臂位姿变换模型,将各个关节的对中误差影响转换表达到其对于机械臂末端定位精度的影响。机械臂关节 D-H 参数如表 1 所示。

利用 D-H 表示法建立各个连杆位姿变换矩阵如下,其中 ${}_n^m\boldsymbol{T}$ 表示连杆坐标系 $\{n\}$ 相对于连杆坐标系 $\{m\}$ 的描述:

表 1　机械臂关节 D-H 参数

Tab. 1　The mechanical arm joints D-H parameters

连杆 i	变量 θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	θ_1	0	0	0
2	θ_2	$-90°$	a_2	0
3	θ_3	$90°$	a_3	0
4	θ_4	0	0	d_4
5	θ_5	0	a_5	d_5
6	θ_6	0	0	d_6

$${}_1^0\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\cos\theta_1&-\sin\theta_1&0&0\\\sin\theta_1&\cos\theta_1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{14}$$

$${}_2^1\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\sin\theta_2&\cos\theta_2&0&0\\0&0&1&0\\\cos\theta_2&-\sin\theta_2&0&a_1\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{15}$$

$${}_3^2\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}-\sin\theta_2&-\cos\theta_2&0&0\\0&0&-1&0\\\cos\theta_2&-\sin\theta_2&0&a_3\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{16}$$

$${}_4^3\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}-\cos\theta_4&\sin\theta_4&0&d_3\\-\sin\theta_4&-\cos\theta_4&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{17}$$

$${}_5^4\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}-\sin\theta_5&-\cos\theta_5&0&d_4\\\cos\theta_5&-\sin\theta_5&0&0\\0&0&1&a_4\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{18}$$

$${}_6^5\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\cos\theta_6&-\sin\theta_6&0&0\\0&1&0&-d_5\\-\sin\theta_6&-\cos\theta_6&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{19}$$

$${}_7^6\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-d_6\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{20}$$

考虑到关节对中误差,经过各关节坐标系位姿变换后末端执行器的位姿矩阵可表示为:

$$\boldsymbol{T}_{\text{real}}={}_1^0\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{E}_1\cdot{}_2^1\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{E}_2\cdot{}_3^2\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{E}_3\cdot{}_4^3\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{E}_4\cdot{}_5^4\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{E}_5\cdot{}_6^5\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{E}_6\cdot{}_7^6\boldsymbol{T} \tag{21}$$

不考虑关节对中误差理想位姿矩阵为:

$$\boldsymbol{T}_{\text{ideal}}={}_1^0\boldsymbol{T}\cdot{}_2^1\boldsymbol{T}\cdot{}_3^2\boldsymbol{T}\cdot{}_4^3\boldsymbol{T}\cdot{}_5^4\boldsymbol{T}\cdot{}_6^5\boldsymbol{T}\cdot{}_7^6\boldsymbol{T} \tag{22}$$

由于位姿矩阵参数较复杂,将其简要表达为:

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

式中，$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$为姿态矩阵，$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$为位置向量。求解出 $\boldsymbol{T}_{\text{real}}$ 中姿态矩阵相对于 $\boldsymbol{T}_{\text{ideal}}$ 中姿态矩阵的偏差角即为姿态误差；求解出 $\boldsymbol{T}_{\text{real}}$ 中位置向量相对于 $\boldsymbol{T}_{\text{ideal}}$ 中位置向量的偏差即为位置误差。

3 利用蒙特卡洛方法的仿真实验

利用蒙特卡洛仿真产生的原始误差进行关节对中误差对于机械臂末端定位精度影响仿真实验。仿真实验步骤如下：

1）依据机械臂末端位置进行反解，得到各关节角度参数。计算出理想姿态矩阵 $\boldsymbol{T}_0$，理想末端位置向量 $\boldsymbol{P}_0$；

2）在对中误差范围内对各个误差关节变量产生服从误差分布式（1）~（3）的随机数，得到各个关节样本数据

$X_i^{(m)}=\{R_{1i},R_{2i},\varphi_{1i},\varphi_{2i}\}$，$i=1,2,3,4,5,6$；

i 为关节编号，m 代表进行的实验次数；

3）根据误差变换矩阵求解，得到第 i 关节第 m 次实验的误差变换矩阵 $\boldsymbol{E}_{im}$；

4）将误差变换矩阵 $\boldsymbol{E}_{im}$ 代入到正解模型，得到末端执行器第 m 次实验的实际位姿矩阵 $\boldsymbol{T}_m$、第 m 次实验的末端位置向量 $\boldsymbol{P}_m$ 与姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_m$；

5）将位置向量 $\boldsymbol{P}_m$ 与理想位置向量 $\boldsymbol{P}_0$ 取差，得到以理想点为原点的机械臂末端误差向量 $\Delta\boldsymbol{P}_m$；

6）求出姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_m$ 与理想姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_0$ 的各个轴向夹角，即姿态误差角；

7）执行步骤2至步骤6即为完成1次试验，重复步骤2至步骤6 m 次（本实验中 $m=20000$），得到机械臂末端误差向量集 $\{\Delta\boldsymbol{P}_m\}$ 与姿态误差角集；

8）绘制机械臂末端误差向量图及机械臂末端误差概率密度分布图，统计误差分布特征。

4 数值分析

以 MATLAB 为平台，编写相关程序，利用表2内所示的相关参数值进行仿真实验。其中设定各关节的径向最大间隙 R_0 为 0.05mm。

表2 机械臂关节 D－H 参数

Tab. 2 The mechanical arm joints D－H parameters

连杆 i	变量 θ_i /(°)	α_{i-1} /(°)	a_{i-1} /mm	d_i /mm	R_0 /mm
1	100	0	0	0	0.05
2	60	－90	200	0	0.05
3	－10	90	200	1000	0.05
4	－120	0	0	1000	0.05
5	90	0	200	100	0.05
6	0	0	0	100	0.05

经过仿真实验得到的机械臂末端误差空间分布图如图5所示，图中的原点为不考虑机械臂各关节对中误差的理想位置点，图中各个数据点代表机械臂末端误差在空间上的位置，其距原点的距离代表误差的大小。

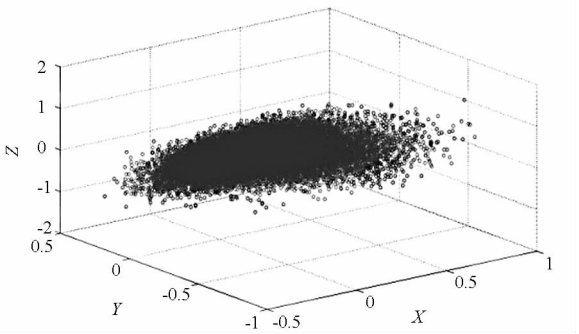
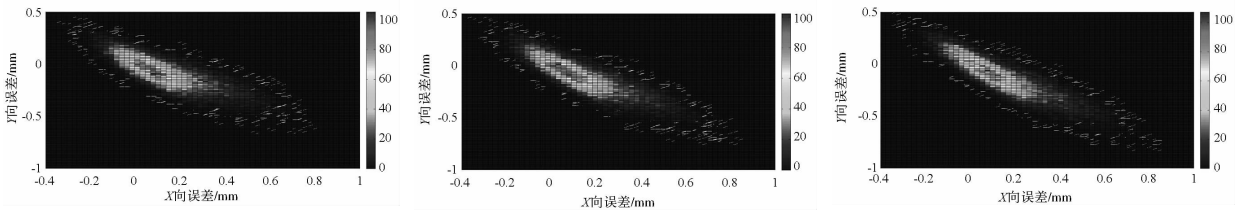


图5 误差空间分布图

Fig. 5 The distributing map of error

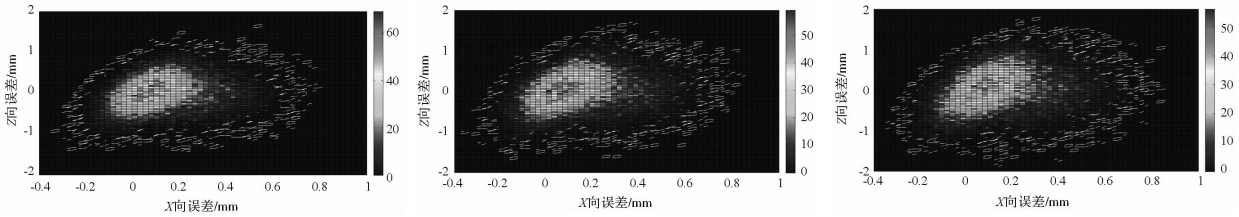
由实验结果可知，由于机械臂各个关节对中误差的影响，造成末端执行器产生较大的定位误差，最大误差值达到 3.972mm。分布空间呈不规则的椭圆空间区域。为研究不同机械参数下误差的分布特性是否相同，将机械结构参数中 d_3 取为800mm、1000mm、1200mm 分别进行实验，将得到的误差空间分布图向 $X-Y$，$X-Z$，$Y-Z$ 3个平面分别投影，得到如图6所示的误差分布密度图。其中 $a1$，$b1$，$c1$ 为 $d_3=800$mm 条件下的结果；$a2$，$b2$，$c2$ 为 $d_3=1000$mm 条件下的结果；$a3$，$b3$，$c3$ 为 $d_3=1200$mm 条件下的结果。图中高亮区域内灰度越深的位置代表误差的分布密度越大。

由不同臂杆长度下各个平面误差分布情况对比可知：臂杆长度的改变并没有改变误差分布的整体性质，误差分布依据某一点周围呈椭圆状分布，但当臂杆长度增大时误差的分布范围也相应有所增大，误差集中性降低，并且分布位置发生小幅度偏移。误差分布的密度中心并不在不考虑机械臂对中误差计算而得的位置，而是存在一定偏差。通过仿真与分析可统计出机械臂末端点误差密度中心位置，依据此位置对机械臂可进行修正，提高机械臂定位精度。



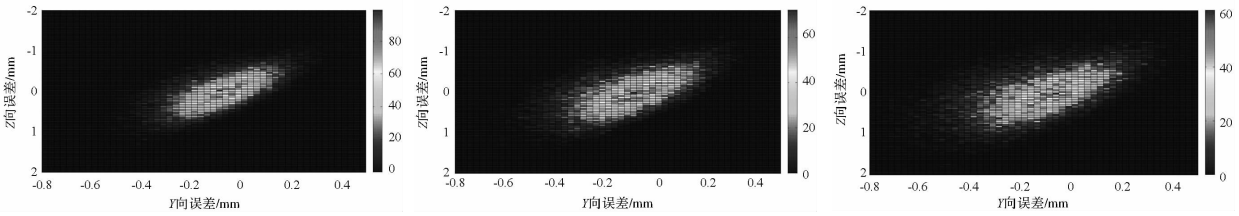
(a1)　(a2)　(a3)

(a) 末端误差 $X-Z$ 向分布密谋



(b1)　(b2)　(b3)

(b) 末端误差 $X-Z$ 向分布密谋



(c1)　(c2)　(c3)

(c) 末端误差 X－Z 向分布密谋

图 6　误差分布密度平面图

Fig. 6　The density distributing figure of error

在表 2 所示的参数条件下,针对不同的对中误差公差带情况开展仿真实验。分别取关节对中误差范围为:0 ~ 0.025mm、0 ~ 0.05mm、0 ~ 0.075mm 进行对比实验。统计在不同公差带范围下末端误差概率密度分布情况如图 7 所示,其累计概率密度函数曲线如图 8 所示。由图 7 可知公差带范围越小,机械臂末端误差分布越集中,且在同一公差带下误差概率密度在误差值小的范围内快速增长,至概率密度最大值后缓慢下降,其后段末端误差值大的位置概率密度小。对其累计概率密度(Cumulative Distribution Function,CDF)进行统计得到如表 3 所示的机械臂的分布数据统计数值。

表 3　误差值统计表

Tab. 1　The stat table of error value　(mm)

公差带	概率峰值点	CDF50%误差范围	CDF90%误差范围	CDF98%误差范围
0.025	0.159	0.22	0.42	0.56
0.05	0.314	0.44	0.84	1.12
0.075	0.484	0.66	1.26	1.70

由图 8 及表 3 可知,机械臂的定位最大误差随着公差带的增大而增大。在本文所利用的机械臂模型条件下,其误差值概率峰值点约为误差公差带范围的 6.4 倍,其累计概率密度为 0.9 时的误差范围约为误差公差带范围的 16.8 倍。对中误差对于机械臂末端定位精度造成了显著影响。在不同的机械臂平台下,可建立相应模型,应用此种对中误差对于机械臂末端定位精度影响分析的方法对末端定位精度进行定量分析。

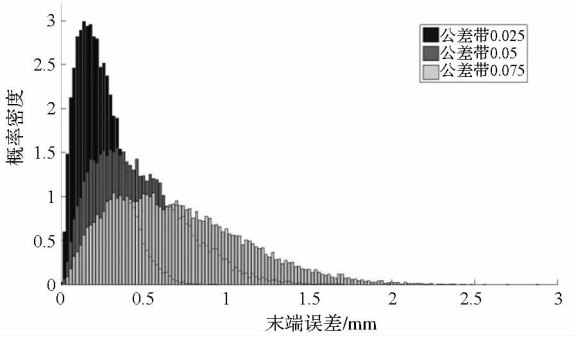


图 7　末端误差概率密度图

Fig. 7　The probability density map of error

依据统计的误差角数据绘制 X 轴误差角、Y 轴误差角与 Z 轴误差角的密度曲线,如图 9 所示。由图 9 可知在 X 轴与 Y 轴的姿态角误差密度峰值出现在 0.01°附近,Z 轴姿态角误差密度峰值出现在 0.02°附近。Z 轴为末端执行器旋转轴

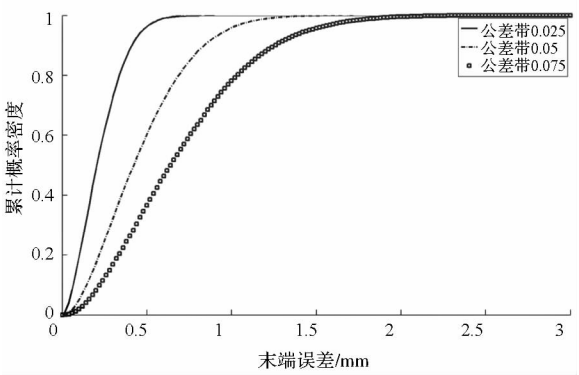


图 8 末端误差累计概率密度曲线图

Fig. 8 The accumulative probability density map of error

向,姿态角误差相对较大。从整体来看各个轴的姿态角误差分布在 0.07°以内,对于机械臂末端定位影响较小。

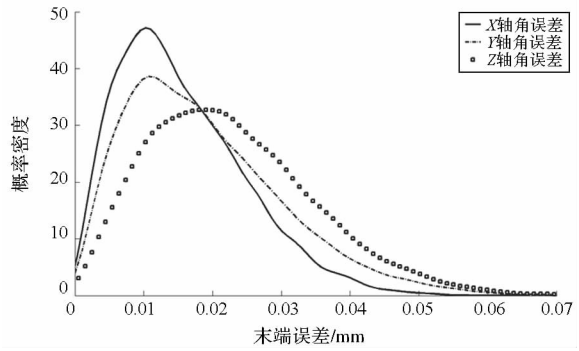


图 9 姿态误差密度曲线图

Fig. 9 The density curve of gesture error

5 结论

本文以 6 自由度机械臂为基础,根据机械臂关节存在的对中误差,建立关节对中误差对机械臂末端定位误差影响数学模型,对关节对中误差对于机械臂末端定位精度的影响进行分析,可为机械臂的定位精度改良及可靠性评价提供参考依据。根据实验,由对中误差引起的机械臂末端位姿误差分布有以下特点。

1)由对中误差引起的位姿误差中位置误差为主要误差,姿态误差相对较小。

2)位置误差分布在空间某一范围内并依据某一点集中,但其集中位置并不是理论上不考虑机械误差所计算而得的位置,而是有一定的偏移量。可针对不同机械平台进行分析实验,依据实验结果进行相应误差修正。

3)误差在三维空间的各个平面中有相似的分布特征,即围绕着误差集中中心向四周呈椭圆状分布,但形状上有所差异。

4)机械臂末端误差的范围随着机械臂对中误差的增大而增大。随着臂杆尺寸的增大误差分布范围相应增大,并发生偏移。

5)6 自由度机械臂计入关节对中误差后,机械臂末端定位精度受关节对中误差影响较大,因此在定位精度要求高的机械臂建模中考虑机械臂关节对中误差是必要的。

参考文献(References)

[1] 刘迎春,余跃庆. 考虑运动副间隙的连杆及机器人机构研究进展[J]. 机械科学与技术, 2004,23(4):454 - 460.
LIU Yingchun, YU Yueqing. A survey of mechanism and robot with clearances [J]. Mechanical Science and Technology, 2004,23(4):454 - 460. (in Chinese)

[2] 崔道碧. 关节间隙对机器人末端执行器位姿误差的影响[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 1999,26(2):32 - 36.
CUI Daobi. Effect of gap of key links on location-posture errors for tip executing apparatus of robot [J]. Journal of Hunan University(Natural Sciences), 1999,26(2):32 - 36. (in Chinese)

[3] 郭鹏飞, 阎绍泽. 含间隙四连杆机构运动误差的 Monte Carlo 模拟[J]. 清华大学学报(自然科学版),2007,47(11):1989 - 1993.
GUO Pengfei, YAN Shaoze. Monte Carlo simulation of motion errors for four-bar linkages with clearances [J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2007, 47(11):1989 - 1993. (in Chinese)

[4] 赵永涛, 王田苗, 孙磊. 基于蒙特卡洛方法的导航机器人的误差分析[J]. 航空制造技术,2004(3):52 - 54.
ZHAO Yongtao, WANG Tianmiao, SUN Lei. Error analysis of navigating robot based on Monte Carlo method [J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2004 (3): 52 - 54. (in Chinese)

[5] 徐卫良, 张启先. 空间机构运动误差的概率分析和蒙特卡罗模拟[J]. 南京工学院学报,1988,18(6):1 - 8.
XU Weiliang, Zhang Qixian. Probability analysis and monte carlo simulation of the kinematic errors in a spatial linkage[J]. Journal of Nanjing Institute of Technology, 1988,18(6):1 - 8. (in Chinese)

[6] Yan S, Guo P. Kinematic accuracy analysis of flexible mechanisms with uncertain link lengths and joint clearances[J]// Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2011(225):1973 - 1983.

[7] Jawale H P, Thorat H T. Positional error estimation in serial link manipulator under joint clearances and backlash [J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2013,5(2):02103 - 1 - 02103 - 7.

[8] Xu L X, Li Y G. Investigation of joint clearance effects on the dynamic performance of a planar 2 - DOF pick-and-place parallel manipulator [J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2014,30(1):62 - 73.

[9] 卢剑伟,陈昊,孙晓明,等. 考虑减速机构间隙的机械臂动力学建模分析[J]. 机械工程学报,2013, 49(15):15 - 21.
LU Jianwei, CHEN Hao, SUN Xiaoming, et al. Dynamic modeling and analysis of robot arm with consideration of clearance in gear reducer [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013,49(15):15 - 21. (in Chinese)

[10] Erkaya S. Investigation of joint clearance effects on welding robot manipulators [J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing,2012,28(4): 449 - 457.

[11] Chen G L, Wang H, Lin Z Q. A unified approach to the accuracy analysis of planar parallel manipulators both with input uncertainties and joint clearance [J]. Mechanism and Machine Theory,2013,64:1 - 17.

[12] 蔡自兴. 机器人学[M]. 北京:清华大学出版社, 2000.
CAI Zixing. Robotics [M]. Beijing: Tsinghua University Press,2000. (in Chinese)