doi:10.11887/j.cn.201703004 http://journal.nudt.edu.cn

高超声速再入轨迹跟踪控制的微分变换方法*

刘 莉[1,2],杨乐平[1],蔡伟伟[3]
(1. 国防科技大学 航天科学与工程学院,湖南 长沙 410073;2. 空间物理重点实验室,北京 100076;
3. 国防科技大学 指挥军官基础教育学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:针对多约束条件下高超声速飞行器再入制导问题,提出一种基于微分变换法求解最优反馈控制的全状态标准轨迹跟踪制导律。利用滚动时域控制方法设计易于在线执行的闭环跟踪制导策略,在每个制导周期内将标准轨迹跟踪问题转化为线性时变系统状态调节器问题,并通过最优控制理论进一步转化为两点边值问题,采用微分变换法进行求解获得最优反馈控制律。数值仿真表明微分变换法的引入有效解决了传统两点边值问题求解的数值不稳定性与耗时问题,所设计的闭环制导律对状态偏差与模型不确定性具有较强的鲁棒性,可为工程设计提供有益参考。

关键词:微分变换;滚动时域控制;标准轨迹;再入制导
中图分类号:V488.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2017)03-023-07

Differential transformation-based trajectory tracking guidance scheme for hypersonic reentry vehicle

LIU Li[1,2], *YANG Leping*[1], *CAI Weiwei*[3]
(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. Science and Technology on Space Physics Laboratory, Beijing 100076, China;
3. College of Basic Education, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Concentrating on the hypersonic reentry guidance under multiple constraints, a full-state nominal trajectory tracking guidance scheme was proposed by applying the differential transformation approach to the optimal feedback control. In the period of the online closed-loop guidance scheme based on the receding-horizon control, the nominal trajectory tracking problem was transformed into a state regulator problem of the associated linear time-varying system, and then into a two-point boundary value problem by utilizing the optimal control theory. The differential transformation approach was suggested for the optimal feedback control, avoiding the time-consuming and numerical instabilities of conventional methods. Numerical simulation results validate that the proposed guidance scheme is robust to state dispersions and model uncertainties, providing a reference for engineering design.

Key words: differential transformation; receding-horizon control; nominal trajectory; reentry guidance

飞行器以高超声速再入地球大气层飞行时,面临严峻的气动力热环境,给飞行器结构、材料等带来巨大挑战。对高超声速飞行器而言,飞行制导是其安全飞行、成功遂行任务的有效支撑和重要保证,然而系统面临的强非线性动力学特性、复杂路径约束与控制约束等显著增大了再入制导律设计的难度,有必要开展深入研究。

按再入制导策略不同,常见的高超声速飞行制导律大致可分为预测-校正制导[1-2]和标准轨迹制导[3-4]两类。预测-校正制导通常包括两个步骤:一是在飞行过程中不断由飞行器当前状态积分预测终端状态,二是依据相对于期望终端状态的偏差对制导指令进行调整。预测-校正制导按终端状态预测方法不同,可进一步分为解析预测-校正和数值预测-校正。前者预测速度快,但精度有限,且缺少对严格飞行约束的处理能力;后者精度较高,但数值积分计算量较大,导致预测速度较慢。

标准轨迹制导是在预先设计满足各类约束和任务要求的标准轨迹基础上,依据当前实际飞行轨迹相对于标准轨迹的偏差设计反馈控制律,确保飞行器沿标准轨迹飞行。为提高轨迹制导的鲁棒性和实时性,有关研究主要沿两方面展开:一是从轨迹规划方法着手,提高标准轨迹在线生成的

* **收稿日期**:2016-08-31
基金项目:航空科学基金资助项目(2016ZC88007);中国运载火箭技术研究院高校联合创新基金资助项目(CALT201603)
作者简介:刘莉(1973—),女,吉林松原人,高级工程师,博士研究生,E-mail:437359021@qq.com

快速性;二是从轨迹跟踪算法着手,研究能在线实时解算且具有鲁棒性的跟踪算法。早期标准轨迹再入制导主要基于阻力加速度剖面的跟踪,并成功应用于航天飞机再入任务。虽然这种方式能够较好地控制航程以及终端能量,但对其余状态变量的控制能力有所欠缺。为此人们提出了基于状态空间的标准轨迹制导方法,将轨迹跟踪问题处理为状态调节问题来进行研究。针对线性时变系统的状态调节问题,近年来一种基于滚动时域控制方法的闭环制导策略被深入研究,并应用于再入制导[3-4]、小推力轨道转移[5]等领域,取得了较好的效果。该方法利用极大值原理将有限时域内的最优反馈控制问题转换为两点边值问题求解,但 Riccati 矩阵微分方程的传统求解方法存在耗时长、数值不稳定等不足。文献[6]基于 Legendre 伪谱法将两点边值问题推导出的线性时变方程转换为一系列离散线性代数方程求解。然而,该方法需进行大量高维矩阵运算,限制了其求解效率。近年来,微分变换法因其显著的求解效率与近似精度广泛应用于数值求解微积分方程[7]。微分变换法实质是求微积分方程的泰勒级数解,但其在最优控制问题求解方面的应用并不多见。

1 问题描述

考虑地球为非旋转圆球,则半速度坐标系下的再入飞行器运动方程[8]为:

$$\begin{cases}\dot{r}=V\sin\gamma\\ \dot{\theta}=V\cos\gamma\sin\psi/(r\cos\varphi)\\ \dot{\varphi}=V\cos\gamma\cos\psi/r\\ \dot{V}=-D/m-g\sin\gamma\\ \dot{\gamma}=\dfrac{1}{V}\left[\dfrac{L\cos\sigma}{m}+\left(\dfrac{V^2}{r}-g\right)\cos\gamma\right]\\ \dot{\psi}=\dfrac{1}{V}\left[\dfrac{L\sin\sigma}{m\cos\gamma}+\dfrac{V^2}{r}\cos\gamma\sin\psi\tan\varphi\right]\end{cases}\tag{1}$$

式中:r, θ, φ 和 V 分别为地心距、经度、纬度和速度;航迹倾角 γ 是速度矢量与当地水平面的夹角,向上为正;速度方位角 ψ 为速度向量在当地水平面投影与正北方向的夹角,顺时针旋转为正;σ 为倾侧角;L, D 分别表示升力和阻力,其表达式为

$$\begin{cases}L=\rho V^2S_{\text{ref}}C_{\text{L}}/2\\ D=\rho V^2S_{\text{ref}}C_{\text{D}}/2\end{cases}\tag{2}$$

式中: S_{ref}为飞行器气动参考面积;ρ 为大气密度,

$$\rho=\rho_0\mathrm{e}^{-(r-R_0)/H_s}\tag{3}$$

其中 $H_s=7110$ m,$R_0=6378$ km,$\rho_0=1.225$ kg/m^3 为海平面处大气密度。

再入飞行过程中,马赫数属于高超声速范围,气动系数近似满足阻力极线关系[9]:

$$C_{\text{D}}=C_{\text{D0}}+KC_{\text{L}}^2\tag{4}$$

式中零升阻力系数 C_{D0}和诱导阻力因子 K 在高超声速下趋于常数。

定义飞行器泛化升力系数:

$$\lambda=C_{\text{L}}/C_{\text{L}}^*\tag{5}$$

式中,$C_{\text{L}}^*=\sqrt{C_{\text{D0}}/K}$为最大升阻比 E^* 对应的升力系数[9],则飞行器的气动系数可表示为:

$$\begin{cases}C_{\text{L}}=\lambda C_{\text{L}}^*\\ C_{\text{D}}=\dfrac{C_{\text{L}}^*}{2E^*}(1+\lambda^2)\end{cases}\tag{6}$$

对于指定飞行器,其气动特性参数 E^* 与 C_{L}^* 的取值均已知,故可将泛化升力系数 λ 作为弹道设计参数。

考虑飞行器的热防护、结构和控制性能,飞行过程中要求满足驻点热流密度 Q、过载 n、动压约束 q:

$$\begin{cases}Q=K_{\dot{Q}}\rho^{0.5}V^{3.15}\leqslant Q_{\max}\\ n=\sqrt{L^2+D^2}/mg\leqslant n_{\max}\\ q=0.5\rho V^2\leqslant q_{\max}\end{cases}\tag{7}$$

式中:$K_{\dot{Q}}$ 为常数,其取值与飞行器密切相关;$Q_{\max}$,$n_{\max}$,$q_{\max}$分别为飞行器允许的最大驻点热流密度、最大过载和最大动压值。

2 闭环跟踪制导律设计

2.1 滚动时域控制策略

滚动时域控制策略如图 1 所示,其中 t_{EH}为制导指令更新周期,$t_k(k=1,2,\cdots,n)$为制导指令切换时刻,t_{PH}为滚动时域长度,t_{P} 为制导算法在线计算时间,u 为制导指令。滚动时域控制的基本思想是在有限时域$[t_k,t_k+t_{\text{PH}}](k=1,2,\cdots,n)$内,将动力学方程沿标准轨迹线性化,并以当前状态偏差为初始状态,构建该有限时域内的最优控制问题,求解获得反馈控制 $\boldsymbol{u}_{\text{opt}}(\tau)(t_k\leqslant\tau\leqslant t_k+t_{\text{PH}})$。值得注意的是,滚动时域控制仅选用 t_k 时刻的反馈控制 $\boldsymbol{u}_{\text{opt}}(t_k)$作为当前制导周期内的校正指令,所获得的其余反馈控制 $\boldsymbol{u}_{\text{opt}}(\tau)(t_k<\tau\leqslant t_k+t_{\text{PH}})$则全部舍弃。若反馈控制指令未能在规定时间内生成,则继续使用上一周期生成的指令;重复上述过程直至任务结束。滚动时域控制策略的可操作性强,且其闭环稳定性在控制理论上已经得到证明[3]。

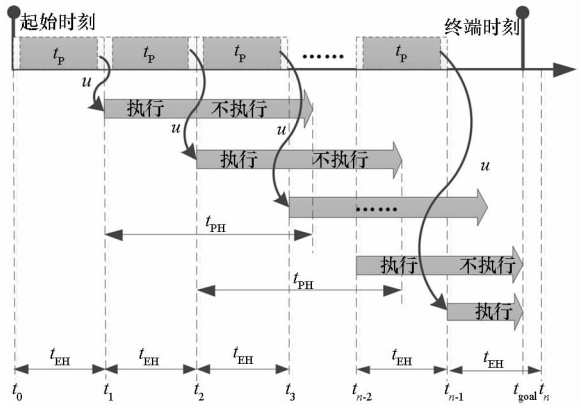


图 1　滚动时域控制策略示意图

Fig. 1　Illustration of the receding-horizon control strategy

2.2　标准轨迹跟踪问题转化

运用滚动时域控制策略开展再入飞行制导律设计,需要在每个有限时域内构建最优控制问题,并求解获得最优反馈控制,从而实现标准轨迹跟踪。

将再入运动方程式(1)在标准轨迹附近线性化,得到线性时变偏差动力学方程:

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\Delta\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\Delta\boldsymbol{u}(t) \tag{8}$$

式中,$\Delta\boldsymbol{x}(t)=[\Delta r,\Delta\theta,\Delta\varphi,\Delta V,\Delta\gamma,\Delta\psi]^{\mathrm{T}}$ 为状态偏差,$\Delta\boldsymbol{u}(t)=[\Delta\lambda,\Delta\sigma]^{\mathrm{T}}$ 为反馈控制输入,系数矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{6\times6}$ 和 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{6\times2}$ 的非零元素分别为:

$A_{14}=\gamma$, $A_{15}=V$, $A_{21}=-\dfrac{V\sin\psi}{r^2\cos\varphi}$, $A_{23}=\dfrac{V\sin\psi\tan\varphi}{r\cos\varphi}$, $A_{24}=\dfrac{\sin\psi}{r\cos\varphi}$, $A_{25}=\dfrac{-V\gamma\sin\psi}{r\cos\varphi}$, $A_{26}=\dfrac{V\cos\psi}{r\cos\varphi}$, $A_{31}=\dfrac{-V\cos\psi}{r^2}$, $A_{34}=\dfrac{\cos\psi}{r}$, $A_{35}=\dfrac{-V\gamma\cos\psi}{r}$, $A_{36}=-\dfrac{V\sin\psi}{r}$, $A_{41}=\dfrac{kC_{\mathrm{D}}V^2}{H_s}$, $A_{44}=-2kC_{\mathrm{D}}V$, $A_{45}=-g$, $A_{51}=-V\left(\dfrac{kC_{\mathrm{L}}\cos\sigma}{H_s}+\dfrac{1}{r^2}\right)$, $A_{54}=kC_{\mathrm{L}}\cos\sigma+\dfrac{g}{V^2}+\dfrac{1}{r}$, $A_{55}=\gamma\left(\dfrac{g}{V}-\dfrac{V}{r}\right)$, $A_{61}=-V\left(\dfrac{kC_{\mathrm{L}}\sin\sigma}{H_s}+\dfrac{\sin\psi\tan\theta}{r^2}\right)$, $A_{63}=\dfrac{V\sin\psi}{r}(1+\tan^2\theta)$, $A_{64}=kC_{\mathrm{L}}\sin\sigma+\dfrac{\sin\psi\tan\theta}{r}$, $A_{65}=V\gamma\left(kC_{\mathrm{L}}\sin\sigma-\dfrac{\sin\psi\tan\theta}{r}\right)$, $A_{66}=\dfrac{V\tan\theta\cos\psi}{r}$, $B_{41}=-kC_{\mathrm{D}\lambda}V^2$, $B_{51}=kC_{\mathrm{L}\lambda}V\cos\sigma$, $B_{52}=-kC_{\mathrm{L}}V\sin\sigma$, $B_{61}=kC_{\mathrm{L}\lambda}V\sin\sigma$, $B_{62}=kC_{\mathrm{L}}V\cos\sigma$。其中 $k=\rho S_{\mathrm{ref}}/(2m)$,$C_{\mathrm{L}\lambda}$ 和 $C_{\mathrm{D}\lambda}$ 分别为升力/阻力系数对泛化升力系数的导数。矩阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 的取值由当前制导周期起始时刻的标准状态与输入确定。

采用滚动时域控制策略实现标准轨迹跟踪,则 t_{now} 时刻的反馈控制可通过求解下列最优控制问题获得:确定 $\Delta\boldsymbol{x}(t)$,$\Delta\boldsymbol{u}(t)$,使得式(9)所示性能指标最小,同时满足式(8)所示偏差动力学,初始条件 $\Delta\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{now}})$ 以及终端条件 $\Delta\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{end}})$ 等于 $\boldsymbol{0}$。

$$J=\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_{\mathrm{end}})\boldsymbol{P}\Delta\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{end}})+\frac{1}{2}\int_{t_{\mathrm{now}}}^{t_{\mathrm{end}}}[\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x}(t)+\Delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t \tag{9}$$

式中:$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{6\times6}$ 为半正定对称矩阵;$\boldsymbol{R}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ 为正定对称矩阵。求解上述最优控制问题,得到区间 $[t_{\mathrm{now}},t_{\mathrm{end}}]$ 上的最优控制 $\Delta\boldsymbol{u}_{\mathrm{opt}}(\cdot)$ 后,选用当前时刻的控制输入 $\Delta\boldsymbol{u}_{\mathrm{opt}}(t_{\mathrm{now}})$ 作为当前制导周期内的恒定输入,重复上述过程直至飞行结束。

利用庞特里亚金极大值原理,上述最优控制问题可转换为如下两点边值问题求解,其中正则方程为:

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \Delta\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\\ -\boldsymbol{Q} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}(t)\\ \Delta\boldsymbol{\lambda}(t)\end{bmatrix} \tag{10}$$

初始条件为:

$$\Delta\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{now}})=\Delta\boldsymbol{x}_0 \tag{11}$$

横截条件为:

$$\Delta\boldsymbol{\lambda}(t_{\mathrm{end}})=\boldsymbol{P}\Delta\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{end}}) \tag{12}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{\lambda}(\cdot)$ 为协态矢量,相应的最优控制为:

$$\Delta\boldsymbol{u}_{\mathrm{opt}}(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{13}$$

3　最优反馈控制律求解

本节将利用微分变换的基本性质,将两点边值问题转换为一系列代数方程组,进一步求解得到最优反馈控制律。

3.1　微分变换法

微分变换与常见的傅里叶、拉普拉斯等积分变换的区别在于其是利用微分算子确定原函数的像函数。对于微分动力学系统,微分变换将微分方程转换为递推代数方程,求解得到原问题的近似解甚至解析解,能够显著减少分析处理微分约束所需的计算量。

光滑函数 $x(t)$, $t\in(a,b)$ 的 i ($i=0,1,2,\cdots$)阶导数在展开点 $t_e\in(a,b)$ 处的微分变换定义为:

$$X_{t_e}(i)=\frac{H^i}{i!}\left(\frac{\partial^i x(t)}{\partial t^i}\right)\Bigg|_{t_e} \tag{14}$$

式中,$H>0$ 为比例常数。

若以 $\{t^i\}_{i=0}^{\infty}$ 为基函数,则 $\{X_{t_e}(i)\}_{i=0}^{\infty}$ 的逆微分变换定义为:

$$\Xi_x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} X_{t_e}(i)\left(\frac{t-t_e}{H}\right)^i \tag{15}$$

将式(14)代入式(15)中,并取前 $N+1$ 项截断:

$$\Xi_x(t) = \sum_{i=0}^{N}\left(\frac{\partial^i x}{\partial t^i}\right)_{t_e}\frac{(t-t_e)^i}{i!} + \left(\frac{\partial^{N+1}x}{\partial t^{N+1}}\right)_{t=\xi}\frac{(t-t_e)^{N+1}}{(N+1)!}$$
$$\triangleq \sum_{i=0}^{N}\left(\frac{\partial^i x}{\partial t^i}\right)_{t_e}\frac{(t-t_e)^i}{i!} + R_N \tag{16}$$

式中:ξ 为区间$[t,\ t_e]$上的任意数;R_N 为泰勒展开定理的截断项,对充分大的 N 可忽略该项。对于光滑函数 $x(t)$,逆微分变换 $\Xi_x(t)$ 在任意点 $t\in(a,\ b)$处均能够收敛到原函数。

微分变换法求解一般微分方程 $\dot{x}(t)=f(x(t))$ 的过程一般包括三步:

1)在展开点 $t_e\in(a,\ b)$处利用微分变换将微分方程转换为一系列关于 $X_{t_e}(i)$ 的递推代数方程;

2)根据微分方程的边值确定 $X_{t_e}(0)$,并由递推方程计算出 $x(t)$的第 i 阶导数相应的微分变换值 $X_{t_e}(i)$ $(i=1,\cdots,N)$;

3)将微分变换值 $X_{t_e}(i)$ $(i=0,1,\cdots,N)$代入式中,并忽略截断项,从而得到 N 阶泰勒展开形式的函数 $x(t)$近似解。

值得注意的是,微分方程与递推代数方程组间的转换依赖于微分变换的一些固有基本性质。表 1 给出了求解两点边值问题所需利用的性质,其中 $c\in\mathbb{R}$ 为常数。

表 1　微分变换的运算法则

Tab. 1　Basic operations for differential transformation

原函数	变换函数$(i=0,1,\cdots,N)$
$x(t)\pm y(t)$	$X_{t_e}(i)\pm Y_{t_e}(i)$
$c\cdot x(t)$	$c\cdot X_{t_e}(i)$
$\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$	$(i+1)X_{t_e}(i+1)/H$

3.2　求解两点边值问题

对于第 2.2 节给出的两点边值问题,由于其属于线性时变系统,因此在任意时刻 $t\in[t_{\text{now}},\ t_{\text{end}}]$处其解可写为:

$$\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}(t)\\ \Delta\boldsymbol{\lambda}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{F}(t,t_{\text{end}}) & \boldsymbol{G}(t,t_{\text{end}})\\ \boldsymbol{L}(t,t_{\text{end}}) & \boldsymbol{M}(t,t_{\text{end}})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}(t_{\text{end}})\\ \Delta\boldsymbol{\lambda}(t_{\text{end}})\end{bmatrix} \tag{17}$$

式中状态转移分块矩阵 $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ 均为 6×6 维,且满足:

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}(t_{\text{end}},t_{\text{end}}) = \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{G}(t_{\text{end}},t_{\text{end}}) = \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{L}(t_{\text{end}},t_{\text{end}}) = \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{M}(t_{\text{end}},t_{\text{end}}) = \boldsymbol{I}\end{cases} \tag{18}$$

将横截条件式(12)代入式(17)得:

$$\begin{cases}\Delta\boldsymbol{x}(t) = [\boldsymbol{F}(t,t_{\text{end}}) + \boldsymbol{G}(t,t_{\text{end}})\boldsymbol{P}]\Delta\boldsymbol{x}(t_{\text{end}})\\ \Delta\boldsymbol{\lambda}(t) = [\boldsymbol{L}(t,t_{\text{end}}) + \boldsymbol{M}(t,t_{\text{end}})\boldsymbol{P}]\Delta\boldsymbol{x}(t_{\text{end}})\end{cases} \tag{19}$$

定义矩阵 $\boldsymbol{V}(t)$和 $\boldsymbol{W}(t)$分别为:

$$\begin{cases}\boldsymbol{V}(t) = \boldsymbol{F}(t,t_{\text{end}}) + \boldsymbol{G}(t,t_{\text{end}})\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{W}(t) = \boldsymbol{L}(t,t_{\text{end}}) + \boldsymbol{M}(t,t_{\text{end}})\boldsymbol{P}\end{cases} \tag{20}$$

则协态矢量 $\Delta\boldsymbol{\lambda}(\cdot)$可表示为:

$$\Delta\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{W}(t)\boldsymbol{V}^{-1}(t)\Delta\boldsymbol{x}(t) \tag{21}$$

将式(19)~(21)代入式(10)中得:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{V}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(t)\\ \dot{\boldsymbol{W}}(t) = -\boldsymbol{Q}\boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(t)\end{cases} \tag{22}$$

相应边界条件为:

$$\begin{cases}\boldsymbol{V}(t_{\text{end}}) = \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{W}(t_{\text{end}}) = \boldsymbol{P}\end{cases} \tag{23}$$

运用微分变换方法,式(22)在终端时刻 t_{end} 处可变换为下列递归代数方程组:

$$\begin{cases}(k+1)\hat{\boldsymbol{V}}_{t_{\text{end}}}(k+1) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{V}}_{t_{\text{end}}}(k) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{W}}_{t_{\text{end}}}(k)\\ (k+1)\hat{\boldsymbol{W}}_{t_{\text{end}}}(k+1) = -\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{V}}_{t_{\text{end}}}(k) - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{W}}_{t_{\text{end}}}(k)\end{cases} \tag{24}$$

式中,$\hat{\boldsymbol{V}}_{t_{\text{end}}}(i)$,$\hat{\boldsymbol{W}}_{t_{\text{end}}}(i)$表示矩阵在 t_{end}处的 i 阶微分变换,其中 0 阶微分变换为:

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{V}}_{t_{\text{end}}}(0) = \boldsymbol{I}\\ \hat{\boldsymbol{W}}_{t_{\text{end}}}(0) = \boldsymbol{P}\end{cases} \tag{25}$$

由微分逆变换定义知,矩阵 $\boldsymbol{V}(t)$和 $\boldsymbol{W}(t)$的近似可写成 N 阶泰勒多项式展开形式:

$$\begin{cases}\boldsymbol{V}(t) = \sum_{k=0}^{N}\hat{\boldsymbol{V}}_{t_{\text{end}}}(k)(t-t_{\text{end}})^k\\ \boldsymbol{W}(t) = \sum_{k=0}^{N}\hat{\boldsymbol{W}}_{t_{\text{end}}}(k)(t-t_{\text{end}})^k\end{cases} \tag{26}$$

将式(21)、式(26)代入式(13)中得最优反馈控制输入:

$$\Delta\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(t)\boldsymbol{V}^{-1}(t)\Delta\boldsymbol{x}(t) \tag{27}$$

则制导周期$[t_{\text{now}},t_{\text{end}}]$内,系统的实际控制输入为 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}_d(t)+\Delta\boldsymbol{u}(t_{\text{now}})$,其中 $\boldsymbol{u}_d(t)$为标准轨迹对应的控制输入剖面。

综上,微分变换法求解最优反馈控制律的基本流程如图 2 所示。

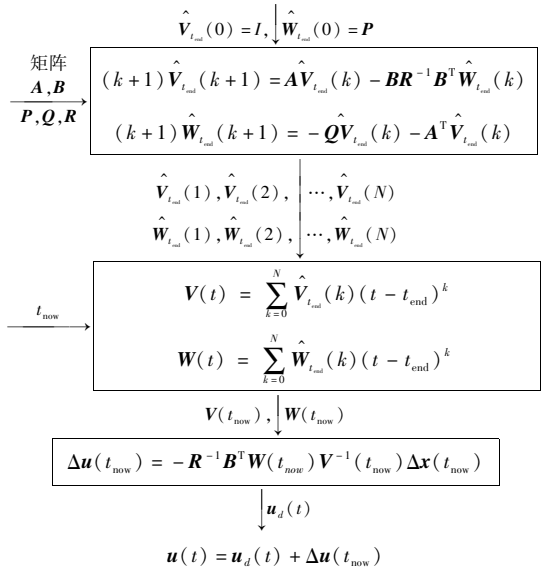


图 2　微分变换法求解流程

Fig. 2　Solution flow of the differential transformation

4　仿真分析

以美国 CAV-H 飞行器为例开展仿真分析,其模型参数如表 2 所示[10],再入飞行任务描述如表 3所示。

表 2　CAV-H 模型参数

Tab. 2　Model parameters of CAV-H

m/kg	S_{ref}/m^2	E^*	C_L^*
907	0.483 9	3.24	0.45

表 3　再入飞行任务描述

Tab. 3　Description of the reentry mission

约束条件	约束取值
边界约束	起始点:$h_0=70$ km, $\theta_0=0°$, $\varphi_0=0°$, $V_0=6500$ m/s, $\gamma_0=-1°$, $\psi_0=90°$ 终端点:$h_f\geqslant 25$ km, $\theta_f=80°$, $\varphi_f=30°$
过程约束	控制量:$\lambda\in[0,2]$, $\sigma\in[-85°,85°]$, $n_{max}=4g$, $q_{max}=100$ kPa, $Q_{max}\leqslant 1700$ kW/m^2

由于运动方程非线性强、控制输入灵敏、路径约束严格等因素很大程度上增加了高超声速再入飞行标准轨迹设计的难度,本文选取到达目标点时间最短为性能指标,采用 Radau 伪谱法对再入飞行标准轨迹进行优化设计。Radau 伪谱法的基本原理是在 Legendre-Gauss-Radau 点处同时离散状态和控制变量,利用全局正交插值多项式近似状态和控制变量,并以微分矩阵计算状态变量在离散点处的导数,消除微分方程约束,最终转换为非线性规划问题。不少文献介绍了伪谱法的具体步骤[11-12],此处不再赘述。

为降低转换所得非线性规划问题的求解难度,对运动模型作无量纲化处理以增加解的收敛半径:地心距、速度以及时间的无量纲基准分别为 R_e、$\sqrt{R_e g}$和 $\sqrt{R_e/g}$(R_e 为地球半径)。此外,采用串行优化策略,以较少的节点计算满足任务要求的可行轨迹,以此作为设计变量初始猜测值,提高收敛效率。

基于 Radau 伪谱法的标准轨迹优化设计在 MATLAB 环境下基于开源伪谱工具包 GPOPS 进行[13],配点个数最终取为 70,调用 SNOPT 软件求解离散所得非线性规划问题[14]。优化所得最短飞行时间为 2095.95 s,相应控制输入、状态变量以及路径约束的变化曲线如图 3 ~ 5 中带圈的实线所示。仿真曲线表明飞行器在大气中跳跃式再入,终端经纬度及高度满足终端状态约束;速度大小与方位角变化趋势平缓,航迹倾角呈波浪式变化,导致飞行高度跳跃式降低。再入飞行的大部时间内,飞行器维持最大升阻比状态飞行,意味着射程相同时,最大升阻比飞行对应的飞行时间较短。倾侧角与路径约束均在指定范围内调整,且再入初始阶段热流密度约束起主要影响,后期动压与过载约束起主要作用。

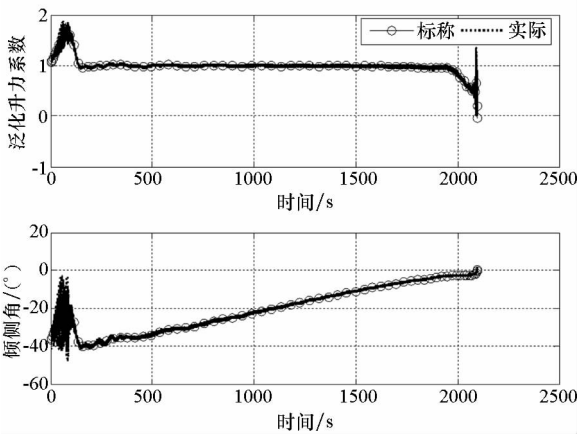


图 3　控制输入曲线

Fig. 3　Time histories of control inputs

为验证所研究最优制导策略的有效性,引入如表 4 所示的初始状态偏差、气动参数偏差以及大气模型偏差开展蒙特卡洛(Monte Carlo)仿真分析。滚动时域控制性能指标式(9)中的权重系数矩阵依据 Bryson 准则选取:

$$\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}([0.03\quad 3.28\times10^7\quad 6.56\times10^7\cdots$$
$$0.11\quad 1.31\times10^6\quad 1.31\times10^6])$$
$$\boldsymbol{R}=\mathrm{diag}([25\quad 10.13])$$
$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{0}$$

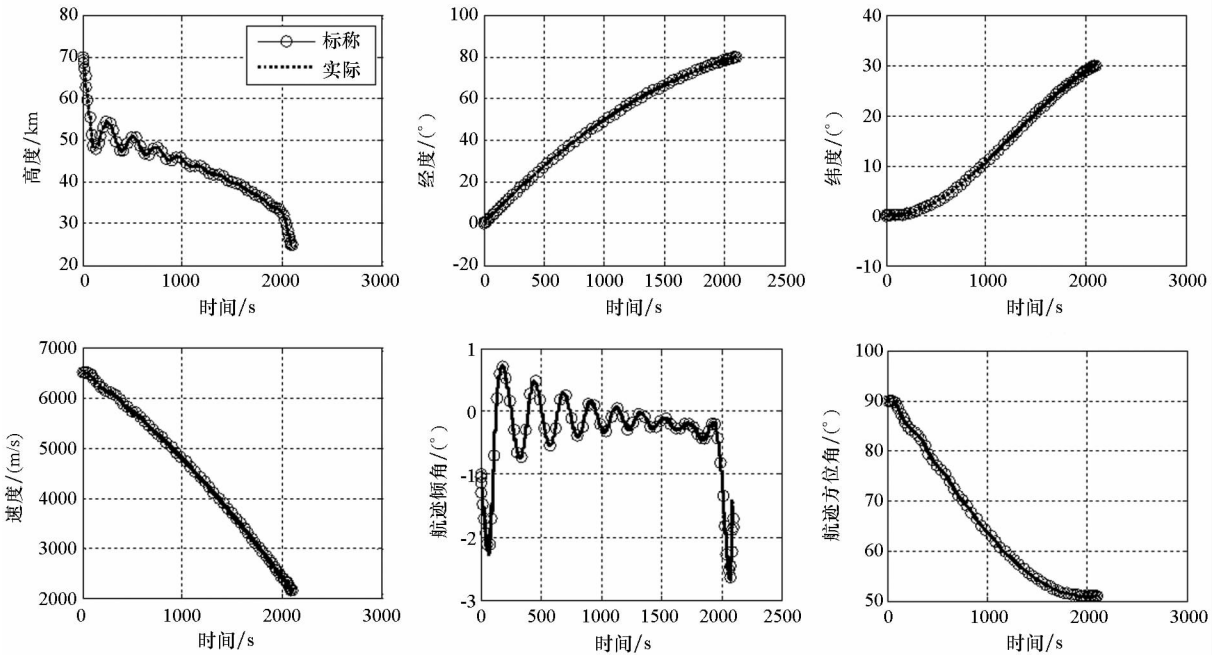


图 4　状态变量曲线

Fig. 4　Time histories of states

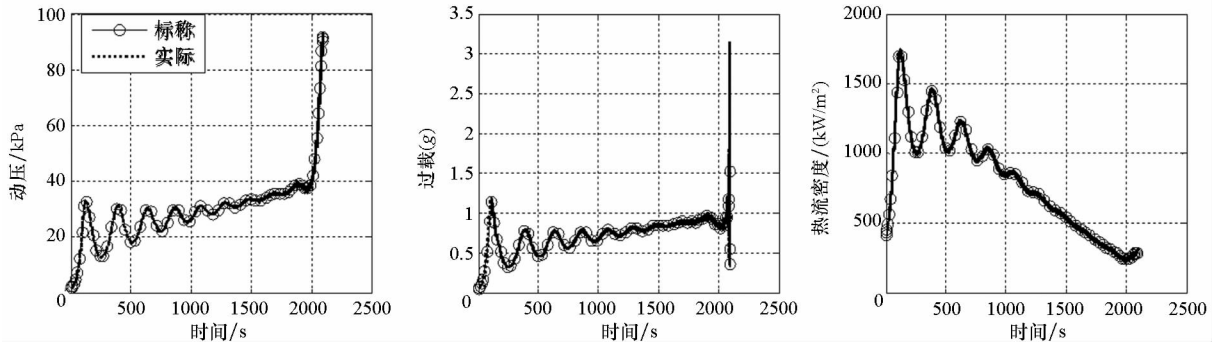


图 5　路径约束曲线

Fig. 5　Time histories of path constraints

Monte Carlo 仿真得到的控制输入、状态与路径约束曲线分别如图 3 ~ 5 中虚线所示。实际再入轨迹在标准轨迹附近小范围内波动，满足模型线性化处理的条件，表明所设计的制导律对于初始状态偏差、气动系数与大气模型不确定性具有较好的鲁棒性。控制变量均在容许范围内调整，且再入初期调整幅度较大，这主要由初始状态偏差造成。

表 4　偏差因素 3σ 标准分布

Tab. 4　3σ standard dispersions of deviations

偏差	3σ 取值	偏差	3σ 取值
Δr_0/m	±200	$\Delta\gamma_0$/(°)	±0.2
$\Delta\theta_0$/(°)	±0.2	$\Delta\psi_0$/(°)	±0.2
$\Delta\varphi_0$/(°)	±0.2	C_L, C_D/%	±10
ΔV_0/(m/s)	±50	ρ/%	±10

值得注意的是，微分变换法求解两点边值问题得到的实质是最优解的有限阶近似。为对比本文方法性能，在同样仿真配置下，采用文献[4]提出的基于间接伪谱法的最优制导律开展 Monte Carlo 仿真分析，仿真次数取为 100。表 5 给出了两类制导律作用下仿真结果的统计分析，其中 DTM 表示本文方法，而 IPSM 表示基于间接伪谱法的制导律。结果表明，两类制导律均能有效降低外界扰动与模型不确定性造成的影响，且本文方法对终端位置控制精度略优。此外，本文方法计算效率远高于 IPSM；在 2.8 GHz 主频，2 GB 内存的计算机上，采用本文方法进行上述 Monte Carlo 仿真平均耗时 14.103 0 s，而 IPSM 需耗时 37.925 3 s。这主要是由于 IPSM 需进行大量高维矩阵运算。

表 5　终端状态偏差统计分析

Tab. 5　Statistics of terminal dispersion

状态	期望		标准差	
	DTM	IPSM	DTM	IPSM
r/m	0.011 5	−1.555 3	9.919 9	26.745 9
θ/(°)	−0.024 5	0.024 3	0.220 1	0.275 8
φ/(°)	−0.026 7	−0.054 7	0.162 3	0.188 1
V/(m/s)	−2.071 3	−0.862 1	13.924 6	13.349 8
γ/(°)	−0.100 1	0.112 4	0.014 6	0.123 4
ψ/(°)	−0.002 3	−0.008 3	0.000 9	0.099 5

5　结论

本文研究了基于滚动时域控制的高超声速再入制导问题,提出利用微分变换求解相应两点边值问题以生成最优制导指令的方法。所研究的方法对初始状态偏差、飞行器参数及大气模型等不确定性具有较好的鲁棒性;相对其他最优制导律,本文方法所需计算量小,易于实现。所提出的最优制导律是基于线性化偏差动力学模型推导得出的,未来将研究非线性鲁棒再入制导律;如何直接利用微分变换设计标准轨迹也是下一步的工作。

参考文献(References)

[1] Joshi A, Sivan K, Amma S S. Predictor-corrector reentry guidance algorithm with path constraints for atmospheric entry vehicles [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(5): 1307 – 1318.

[2] 徐明亮, 陈克俊, 刘鲁华, 等. 高超声速飞行器准平衡滑翔自适应制导方法[J]. 中国科学: 技术科学, 2012, 42(4): 378 – 387.
XU Mingliang, CHEN Kejun, LIU Luhua, et al. Quasi-equilibrium glide adaptive guidance for hypersonic vehicles[J]. Science China: Technological Sciences, 2012, 42(4): 378 – 387. (in Chinese)

[3] Lu P. Regulation about time-varying trajectories: precision entry guidance illustrated [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1999, 22(6): 784 – 790.

[4] Tian B, Zong Q. Optimal guidance for reentry vehicles based on indirect Legendre pseudospectral method [J]. Acta Astronautica, 2011, 68(7/8): 1176 – 1184.

[5] Peng H J, Gao Q, Wu Z, et al. Optimal guidance based on receding horizon control for low-thrust transfer to libration point orbits [J]. Advances in Space Research, 2013, 51(11): 2093 – 2111.

[6] Yan H, Ross I M, Alfriend K T, et al. Pseudospectral feedback control for three-axis magnetic attitude stabilization in elliptic orbits [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(4): 1107 – 1115.

[7] Hwang I, Li J H, Du D. Differential transformation and its application to nonlinear optimal control [J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2009, 131(5): 051010 – 20.

[8] 赵汉元. 飞行器再入动力学与制导[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1997.
ZHAO Hanyuan. Vehicle reentry dynamics and guidance[M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 1997. (in Chinese)

[9] 阮春荣. 大气中飞行的最优轨迹[M]. 茅振东, 译. 北京: 宇航出版社, 1987.
RUAN Chunrong. Optimal trajectories in atmospheric flight[M]. Translated by MAO Zhendong. Beijing: Astronautics Press, 1987. (in Chinese)

[10] Phillips T H. A common aero vehicle (CAV) model, description, and employment guide[R]. Schafer Corporation for AFRL and AFSPC, 2003.

[11] Ross I M, Karpenko M. A review of pseudospectral optimal control: from theory to flight [J]. Annual Reviews in Control, 2012, 36(2): 182 – 197.

[12] 杨希祥, 张为华. 基于 Gauss 伪谱法的固体运载火箭上升段轨迹快速优化研究[J]. 宇航学报, 2011, 32(1): 15 – 21.
YANG Xixiang, ZHANG Weihua. Rapid optimization of ascent trajectory for solid launch vehicles based on Gauss pseudospectral method [J]. Journal of Astronautics, 2011, 32(1): 15 – 21. (in Chinese)

[13] Rao A V, Benson D A, Darby C, et al. GPOPS: a MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems [J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 2010, 37(2): 1 – 39.

[14] Gill P E, Murray W, Saunders M A. SNOPT: an SQP algorithm for large-scale constrained optimization [J]. SIAM Review, 2005, 47(1): 99 – 131.