doi:10.11887/j.cn.201704001　　http://journal.nudt.edu.cn

垂线偏差对弹道落点精度的影响分析*

常晓华,蒋鲁佳,杨　锐,张　婕,丰　海
(北京宇航系统工程研究所, 北京　100076)

摘　要:针对垂线偏差对弹道落点精度的影响,结合弹道飞行器质点动力学模型,系统分析了垂线偏差对发射坐标系、初始参数、飞行过程中受力、程序角控制基准、地心坐标系弹道参数等的影响机理,并建立了相应的数学模型。进一步,基于给定的弹道落点偏差计算方法,以某飞行弹道为例,定量给出了不同发射点大地纬度、不同发射方位角下垂线偏差引起的落点偏差。本文研究工作对提高弹道飞行器落点精度具有重要参考意义。

关键词:垂线偏差;飞行弹道;落点精度
中图分类号:V448.133　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1001-2486(2017)04-001-05

Analysis on effects of vertical deflection for trajectory impact accuracy

CHANG Xiaohua, *JIANG Lujia*, *YANG Rui*, *ZHANG Jie*, *FENG Hai*
(Beijing Institute of Astronautical System Engineering, Beijing 100076, China)

Abstract: In view of the effects of the vertical deflection on trajectory impact accuracy, the influence mechanisms of the vertical deflection on the launching coordinate system, the initial parameter, the force during the flight, the control criteria of the program angle, and the trajectory parameter under the geocentric coordinate system were analyzed respectively by combining with the particle dynamics model of the ballistic vehicle. Then, the mathematical models of the effects of the vertical deflection were established. Furthermore, based on the given computing method of trajectory impact deflection and taking a flight trajectory as example, the impact errors under different geodetic latitude of launch point and different launch azimuth angle were presented quantitatively. The research is of great reference value in the aspect of the improvement of the impact accuracy for the ballistic vehicle.

Key words: vertical deflection; trajectory; impact accuracy

在弹道设计时,通常假设地球为参考椭球体,并以椭球表面法线为基准建立大地坐标系[1](包括发射坐标系及发射惯性坐标系);在实际发射时,惯性测量系统在当地水平面内调平和对准,因此常以发射点的重力垂线为基准建立天文坐标系[2]。由于地球表面形状及内部结构极为复杂,过发射点的重力垂线与参考椭球体法线并不重合,在大地测量学中将地面或空间一点重力垂线方向与该点参考椭球面法线方向的夹角称为垂线偏差,其反映了地球内部物质分布与标准模型的差异[3]。

针对垂线偏差对弹道导弹命中精度的影响,贾沛然[4]将垂线偏差考虑为一小干扰量,在不旋转圆球下进行积分计算得到发射坐标系内关机点弹道参数偏差,进而利用偏导数法计算垂线偏差引起的落点偏差;王明海等[5]给出了法线坐标系与垂线坐标系之间的转换关系,分析了重力、气动力和瞄准方位角在两个坐标系内的不同;杨辉耀[6]用小偏差法导出了落点偏差与发射点垂线偏差之间的解析关系式,并针对某固定发射点典型弹道进行了数值分析;马清华等[7]利用球面三角导出了垂线与地心矢径的夹角,在诸元计算软件中建立发射点垂线坐标系并进行标准弹道迭代,从而实现垂线偏差的修正。通过分析可知,以上研究大多基于小偏差假设条件进行近似处理,侧重于垂线偏差对落点精度的定性分析,未系统性地给出垂线偏差的影响机理及定量分析结果。

1　垂线偏差

垂线偏差反映了大地坐标系与天文坐标系的差异。大地坐标系建立在地球椭球上,天文坐标

* **收稿日期**:2016-07-27
基金项目:国家部委基金资助项目(613222)
作者简介:常晓华(1982—),男,河北定州人,高级工程师,博士,E-mail:changxh1982@126.com

系是基于大地水准面、通过直接观测得到的，大地纬度 B、经度 L、方位角 A 和天文纬度 φ、经度 λ、方位角 α 的定义可参见文献[2]。

垂线偏差为发射点重力垂线方向与参考椭球面法线方向的夹角，在子午圈上的分量用 ξ 表示，在卯酉圈上的分量用 η 表示，规定实际引力方向偏向正常引力方向的西南方向时，ξ 和 η 为正值。

大地坐标、天文坐标、垂线偏差之间的转换公式为：

$$\begin{cases}\xi=\varphi-B\\ \eta=(\lambda-L)\cos\varphi\\ A=\alpha-\eta\tan\varphi\end{cases}\tag{1}$$

2　垂线偏差的影响机理

为分析垂线偏差的影响，分别在以法线为基准的发射坐标系和以重力垂线为基准的发射坐标系内建立质点动力学模型，可参见文献[1]。本节将深入分析垂线偏差对发射坐标系、初始参数、飞行过程中受力、程序角控制基准、地心坐标系弹道参数等的影响机理，建立相应的数学模型，并以落点地心经纬度计算落点精度。

2.1　垂线偏差对发射坐标系的影响

在弹道设计时，以参考椭球面法线为基准建立发射坐标系 $o-x_{\mathrm{G}}y_{\mathrm{G}}z_{\mathrm{G}}$ 和发射惯性坐标系 $o-x_{\mathrm{A}}y_{\mathrm{A}}z_{\mathrm{A}}$；在实际发射时，以发射点重力垂线为基准建立发射坐标系 $o-x_{\mathrm{g}}y_{\mathrm{g}}z_{\mathrm{g}}$ 和发射惯性坐标系 $o-x_{\mathrm{a}}y_{\mathrm{a}}z_{\mathrm{a}}$，如图1所示（图中，$o$ 为发射点，$\boldsymbol{R}_0$ 为发射点地心矢径）。

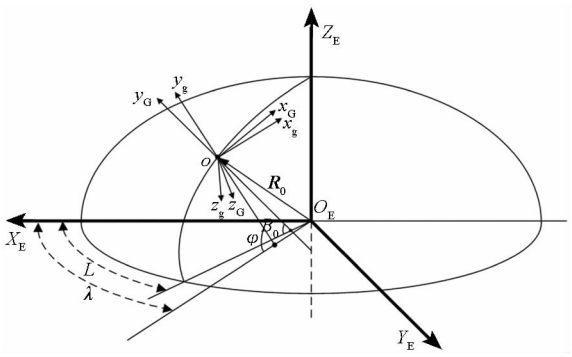


图1　发射坐标系示意图

Fig. 1　Sketch map of the launching coordinate system

考虑到发射点的垂线偏差，发射坐标系 $o-x_{\mathrm{G}}y_{\mathrm{G}}z_{\mathrm{G}}$ 至 $o-x_{\mathrm{g}}y_{\mathrm{g}}z_{\mathrm{g}}$ 的转换矩阵 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{g}}$ 为：

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{g}}=\boldsymbol{M}_2[-A]\boldsymbol{M}_3[-\xi]\boldsymbol{M}_1[\eta]\boldsymbol{M}_2[\alpha]\tag{2}$$

在弹道计算中，需要用到发射惯性坐标系至发射坐标系的转换，相应的转换矩阵 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{g}}$ 为：

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{g}}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\tag{3}$$

式中，

$$A_{11}=(\cos B_0\cos\xi-\sin B_0\cos\eta\sin\xi)\cos A-\sin B_0\sin\eta\sin A$$
$$A_{12}=\cos B_0\sin\xi+\sin B_0\cos\eta\cos\xi$$
$$A_{13}=-(\cos B_0\cos\xi-\sin B_0\cos\eta\sin\xi)\sin A-\sin B_0\sin\eta\cos A$$
$$A_{21}=(-\sin B_0\cos\xi-\cos B_0\cos\eta\sin\xi)\cos A-\cos B_0\sin\eta\sin A$$
$$A_{22}=-\sin B_0\sin\xi+\cos B_0\cos\eta\cos\xi$$
$$A_{23}=(\sin B_0\cos\xi+\cos B_0\cos\eta\sin\xi)\sin A-\cos B_0\sin\eta\cos A$$
$$A_{31}=-\sin\eta\sin\xi\cos A+\cos\eta\sin A$$
$$A_{32}=\sin\eta\cos\xi$$
$$A_{33}=\sin\eta\sin\xi\sin A+\cos\eta\cos A$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与飞行时间有关，其表达式为：

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\omega_{\mathrm{e}}t&\sin\omega_{\mathrm{e}}t\\0&-\sin\omega_{\mathrm{e}}t&\cos\omega_{\mathrm{e}}t\end{bmatrix}$$

2.2　垂线偏差对初始参数的影响

发射点地心矢径 $\boldsymbol{R}_0$ 和地球自转矢量 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}$ 在发射坐标系 $o-x_{\mathrm{G}}y_{\mathrm{G}}z_{\mathrm{G}}$ 内的分量为：

$$\boldsymbol{R}_0^{\mathrm{G}}=\begin{bmatrix}R_{0x}\\R_{0y}\\R_{0z}\end{bmatrix}_{\mathrm{G}}=\begin{bmatrix}-R_0\sin\mu_0\cos A\\R_0\cos\mu_0\\R_0\sin\mu_0\sin A\end{bmatrix}\tag{4}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{G}}=\begin{bmatrix}\omega_{ex}\\\omega_{ey}\\\omega_{ez}\end{bmatrix}_{\mathrm{G}}=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\begin{bmatrix}\cos B_0\cos A\\\sin B_0\\-\cos B_0\sin A\end{bmatrix}\tag{5}$$

其中，μ_0 为发射点大地纬度与地心纬度之差。

考虑到转换矩阵 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{g}}$，发射点地心矢径 $\boldsymbol{R}_0$ 和地球自转矢量 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}$ 在发射坐标系 $o-x_{\mathrm{g}}y_{\mathrm{g}}z_{\mathrm{g}}$ 内的分量为：

$$\boldsymbol{R}_0^{\mathrm{g}}=\begin{bmatrix}R_{0x}\\R_{0y}\\R_{0z}\end{bmatrix}_{\mathrm{g}}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{g}}\boldsymbol{R}_0^{\mathrm{G}}\tag{6}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}=\begin{bmatrix}\omega_{ex}\\\omega_{ey}\\\omega_{ez}\end{bmatrix}_{\mathrm{g}}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{g}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{G}}\tag{7}$$

当在惯性坐标系下进行弹道计算时，需要给出初始速度，该矢量在发射惯性坐标系 $o-x_{\mathrm{A}}y_{\mathrm{A}}z_{\mathrm{A}}$ 和 $o-x_{\mathrm{a}}y_{\mathrm{a}}z_{\mathrm{a}}$ 内分别为：

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}0}=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{G}}\times\boldsymbol{R}_0^{\mathrm{G}}\tag{8}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}0}=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}\times\boldsymbol{R}_0^{\mathrm{g}}\tag{9}$$

2.3　垂线偏差对飞行过程中受力的影响

在“瞬时平衡”假设下，弹道飞行器在发射坐标系内的受力主要有推力、气动力、引力、离心惯性力和哥氏惯性力。

引力加速度计算模型为：

$$\begin{bmatrix}g_x\\g_y\\g_z\end{bmatrix}=\frac{g_r'}{r}\begin{bmatrix}x+R_{0x}\\y+R_{0y}\\z+R_{0z}\end{bmatrix}+\frac{g_{\omega_{\mathrm{e}}}}{\omega_{\mathrm{e}}}\begin{bmatrix}\omega_{ex}\\\omega_{ey}\\\omega_{ez}\end{bmatrix}\tag{10}$$

式中,r 为地心距。

牵连加速度 $\boldsymbol{a}_e$ 计算模型为:

$$\begin{bmatrix} a_{ex} \\ a_{ey} \\ a_{ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{ex}^2 - \omega_e^2 & \omega_{ex}\omega_{ey} & \omega_{ex}\omega_{ez} \\ \omega_{ex}\omega_{ey} & \omega_{ey}^2 - \omega_e^2 & \omega_{ez}\omega_{ey} \\ \omega_{ex}\omega_{ez} & \omega_{ez}\omega_{ey} & \omega_{ez}^2 - \omega_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + R_{0x} \\ y + R_{0y} \\ z + R_{0z} \end{bmatrix} \tag{11}$$

哥氏加速度 $\boldsymbol{a}_k$ 计算模型为:

$$\begin{bmatrix} a_{kx} \\ a_{ky} \\ a_{kz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2\omega_{ez} & 2\omega_{ey} \\ 2\omega_{ez} & 0 & -2\omega_{ex} \\ -2\omega_{ey} & 2\omega_{ex} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \tag{12}$$

由式(10)~(12)可以看出,地心矢量和地球自转矢量在以法线为基准的发射坐标系和以垂线为基准的发射坐标系内的不同直接引起引力加速度、牵连加速度和哥氏加速度的变化,从而影响飞行过程中的位置和速度;飞行高度和速度引起推力和气动力变化,并影响飞行过程中的位置和速度,进一步引起引力加速度、牵连加速度和哥氏加速度的变化。

可见,垂线偏差引起位置速度和飞行过程中各种受力之间的耦合影响,最终产生落点偏差。

2.4　垂线偏差对程序角控制基准的影响

在垂线偏差的影响下,发射惯性坐标系由 $o-x_Ay_Az_A$ 变为 $o-x_ay_az_a$,俯仰角控制的基准面由 $o-x_Az_A$ 平面变为 $o-x_az_a$ 平面,偏航角控制的基准面由 $o-x_Ay_A$ 平面变为 $o-x_ay_a$ 平面[8]。由于两对基准面各不重合,因此在两个坐标系内跟踪程序角时,将引起飞行弹道形状和方位的不同,从而引起落点偏差。

2.5　垂线偏差对地心坐标系弹道参数的影响

在计算引力加速度和落点参数时,需要计算地心坐标系内的弹道参数(地心纬度、经度和高度),以法线为基准的发射坐标系 $o-x_Gy_Gz_G$ 向地心坐标系转换的转换矩阵 $\boldsymbol{E}_G$ 为:

$$\boldsymbol{E}_G = [\boldsymbol{G}_E]^T \tag{13}$$

式中,$\boldsymbol{G}_E = \boldsymbol{M}_2[-(90^\circ + A)]\boldsymbol{M}_1[B_0]\boldsymbol{M}_3[-(90^\circ - L_0)]$。

以重力垂线为基准的发射坐标系 $o-x_gy_gz_g$ 向地心坐标系转换的转换矩阵 $\boldsymbol{E}_g$ 为:

$$\boldsymbol{E}_g = [\boldsymbol{g}_E]^T = [\boldsymbol{C}_G^g \boldsymbol{G}_E]^T \tag{14}$$

从式(13)、式(14)可以看出,在两个发射坐标系内,由于飞行过程中的弹道参数不同,经转换后的地心坐标系下弹道参数也不相同,从而可以用落点地心纬度和经度计算落点偏差。

通过对垂线偏差影响机理的深入分析,可以将垂线偏差对发射坐标系、程序角控制基准和地心坐标系弹道参数的影响称为几何项影响,对初始参数的影响称为初值项影响,对飞行过程中受力的影响称为动力学影响。

3　落点偏差计算

为描述弹道落点精度,这里给出落点偏差的计算方法[1]。

发射点至落点的射程角 β 和方位角 α 为:

$$\begin{cases} \beta = \arccos[\sin\phi_0\sin\phi_c + \cos\phi_0\cos\phi_c\cos(L_c - L_0)] \\ \alpha = \arcsin\dfrac{\cos\phi_c\sin(L_c - L_0)}{\sin\beta} \end{cases} \tag{15}$$

式中:L_0,ϕ_0 分别为发射点经度和地心纬度;L_c,ϕ_c 分别为落点经度和地心纬度。

则落点相对于目标点的纵横向偏差为:

$$\begin{cases} \Delta L = R^*(\beta - \beta^\sim) \\ \Delta H = R^*\sin\beta^\sim(\alpha - \alpha^\sim) \end{cases} \tag{16}$$

式中,R^* 为地球平均半径,$\beta^\sim$ 和 $\alpha^\sim$ 分别为发射点至目标点的射程角和方位角。

4　仿真分析

通过上述分析可知,垂线偏差对弹道落点精度的影响不仅与垂线偏差的大小有关,还与发射点大地纬度、发射方位角等因素有关。

垂线偏差一般为 2″~5″,最大可达 50″[9],仿真中取 $\xi = 15''$ 和 $\eta = 15''$(需要注意的是,实际应用中垂线偏差大小是与发射点地形直接相关的)。

对于射程约为 12 000 km 的飞行弹道(未考虑再入大气的作用),固定发射点经度(0°),不同发射点大地纬度(0°~80°)、不同发射方位角(-180°~180°)下垂线偏差引起的弹道落点偏差如图 2 和图 3 所示。

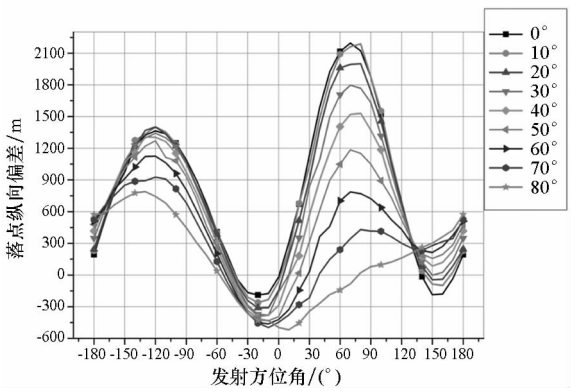


图 2　落点纵向偏差

Fig. 2　Lengthways error of impact point

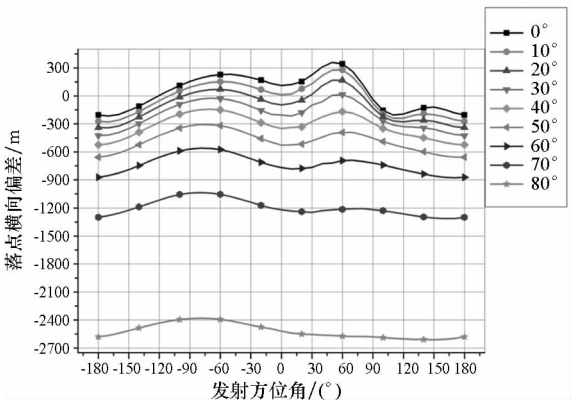


图3　落点横向偏差

Fig. 3　Transverse error of impact point

从图2中可以看出,垂线偏差对弹道落点纵向偏差影响随发射方位角变化明显,在东偏北方向和西偏北方向引起的落点纵向偏差较大;随着发射点大地纬度变高,垂线偏差引起的落点纵向偏差有逐渐变小的趋势。

从图3中可以看出,垂线偏差对弹道落点横向偏差的影响随发射方位角变化不明显,但受发射点大地纬度影响显著,且纬度越高落点横向偏差越大。

进一步分析可知,垂线偏差对弹道落点横向偏差的影响主要是由大地方位角与天文方位角之差引起的,两者之差由式(1)中的第三子式计算得到,利用该偏差对发射方位角 A 进行修正后代入式(2),从而可对垂线偏差引起的落点横向偏差进行修正。图4和图5分别给出了对发射方位角进行修正后垂线偏差引起的弹道落点偏差。

固定发射方位角(0°),不同发射点大地纬度下的大地方位角与天文方位角之差以及发射方位角修正前后弹道落点偏差见表1。

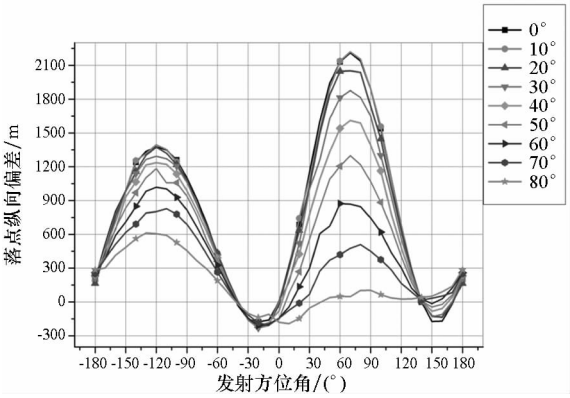


图4　修正后落点纵向偏差

Fig. 4　Modified lengthways error of impact point

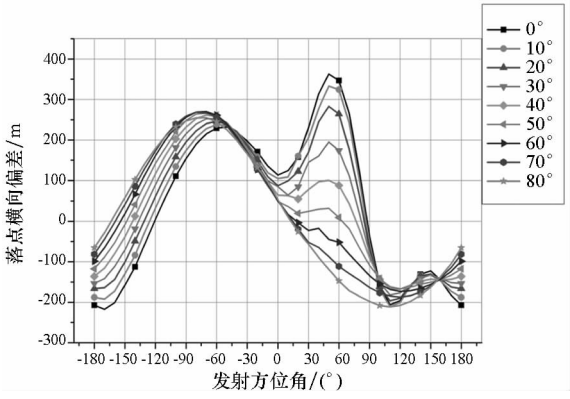


图5　修正后落点横向偏差

Fig. 5　Modified transverse error of impact point

表1　发射方位角修正前后弹道落点偏差

Tab. 1　Impact error between the modify of the launch azimuth angle

发射点大地纬度/(°)	大地方位角与天文方位角之差/(″)	方位角修正前落点偏差/m		方位角修正后落点偏差/m	
		纵向	横向	纵向	横向
0	0.0	-17.6	111.0	-3.1	113.6
10	2.6	-55.7	13.6	10.7	104.7
20	5.5	-144.5	-97.4	-27.5	87.6
30	8.7	-163.5	-204.5	1.2	85.1
40	12.6	-288.0	-349.5	-79.5	64.3
50	17.9	-395.2	-526.7	-152.2	48.7
60	26.0	-421.6	-768.8	-143.2	50.1
70	41.2	-447.3	-1218.6	-144.3	52.3
80	85.1	-497.2	-2519.8	-180.2	52.9

从图4、图5和表1中可以看出,对发射方位角进行修正后,可有效减小垂线偏差对弹道落点纵向、横向偏差的影响。其中,对落点横向偏差修正效果尤其显著,横向偏差最大值从2 km以上减

小到400 m 以内。对发射方位角进行修正同时也降低了发射点大地纬度对垂线偏差引起的落点横向偏差的影响。

综合以上分析可知,垂线偏差对弹道落点精度的影响较大,必须进行修正。当具备独立天文测量条件时,天文经度、纬度的测定精度可达到0.3″,天文方位角的测定精度可达到0.5″[10],基本满足垂线偏差修正精度要求。当不具备独立天文测量条件时,可基于数值模型计算垂线偏差,目前全国垂线偏差计算精度西部地区子午分量为±2.57″、卯酉分量为±2.48″,东部地区子午分量为±1.78″、卯酉分量为±1.96″[11],可根据落点精度要求,决定是否需要在飞行过程中利用其他测量信息进一步修正该偏差引起的落点偏差。

5　结论

针对垂线偏差对弹道落点精度的影响,本文系统深入分析了垂线偏差对发射坐标系、初始参数、飞行过程中受力、程序角控制基准、地心坐标系弹道参数等的影响机理,建立相应的数学模型,并将其分类为几何项影响、初值项影响和动力学影响。最后,针对射程约为12 000 km 的飞行弹道,计算给出了不同发射点大地纬度、不同发射方位角下垂线偏差引起的弹道落点偏差的定量结果。本文研究工作对提高弹道飞行器落点精度具有重要参考意义。

参考文献(References)

[1] 贾沛然, 陈克俊, 何力. 远程火箭弹道学[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1997.
JIA Peiran, CHEN Kejun, HE Li. Long-range rocket ballistics[M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 1997. (in Chinese)

[2] 郑伟, 汤国建. 扰动引力场中弹道导弹飞行力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009.
ZHENG Wei, TANG Guojian. Ballistic missile flight mechanics in disturbance gravity field[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2009. (in Chinese)

[3] Jekeli C. An analysis of vertical deflections derived from high-degree spherical harmonic models[J]. Journal of Geodesy, 1999, 73(1): 10-22.

[4] 贾沛然. 垂线偏差对弹道导弹命中精度的影响[J]. 国防科技大学学报, 1983(1): 39-54.
JIA Peiran. The effect of deflection of the vertical on ballistic missile impact accuracy[J]. Journal of National University of Defense Technology, 1983(1): 39-54. (in Chinese)

[5] 王明海, 杨辉耀, 何浩东. 垂线偏差对导弹命中精度影响研究[J]. 飞行力学, 1995, 13(2): 90-95.
WANG Minghai, YANG Huiyao, HE Haodong. Research on the effect of the plumb-line deflexion for missile impact accuracy[J]. Flight Dynamics, 1995, 13(2): 90-95. (in Chinese)

[6] 杨辉耀. 大地测量误差对导弹精度的影响与修正[J]. 飞行力学, 1998, 16(1): 43-49.
YANG Huiyao. Analysis and correction to effect of geodetic survey errors on missile accuracy[J]. Flight Dynamics, 1998, 16(1): 43-49. (in Chinese)

[7] 马清华, 赵久奋, 王明海. 发射点垂线偏差修正研究[J]. 弹箭与制导学报, 2004, 24(4): 396-398.
MA Qinghua, ZHAO Jiufen, WANG Minghai. Research on launch point deviation of the vertical correction[J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 2004, 24(4): 396-398. (in Chinese)

[8] 郑伟, 张士峰, 杨华波. 定位定向误差对导弹落点偏差的影响分析[C]//全国第十一届空间及运动体控制技术学术会议, 2004.
ZHENG Wei, ZHANG Shifeng, YANG Huabo. Analysis of the influence of position and orientation error on the missile deviation [C]//The Eleventh Academic Conference on National Space and Motion Object Control Technology, 2004. (in Chinese)

[9] 龙乐豪. 总体设计(中)[M]. 北京: 宇航出版社, 1989.
LONG Lehao. General design: volume II [M]. Beijing: Astronautic Publishing House, 1989. (in Chinese)

[10] 龙乐豪. 总体设计(上)[M]. 北京: 宇航出版社, 1989.
LONG Lehao. General design: volume I [M]. Beijing: Astronautic Publishing House, 1989. (in Chinese)

[11] 宁津生, 郭春喜, 王斌, 等. 我国陆地垂线偏差精化计算[J]. 武汉大学学报: 信息科学版, 2006, 31(12): 1035-1038.
NING Jinsheng, GUO Chunxi, WANG Bin, et al. Refined determination of vertical deflection in China mainland area[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2006, 31(12): 1035-1038. (in Chinese)