doi:10.11887/j.cn.201704020 http://journal.nudt.edu.cn

随机快速光滑二阶滑模末制导律设计*

杨鹏飞[1],方洋旺[1],伍友利[1],雍霄驹[2],张丹旭[1]
(1. 空军工程大学 航空航天工程学院,陕西 西安 710038;2. 空军第一航空学院 兵器工程系,河南 信阳 464000)

摘 要:针对目标随机机动、惯性延迟、参数变化等因素降低导弹末制导精度的问题,提出新型随机快速光滑二阶滑模控制方法。将目标机动简化为零均值高斯白噪声过程,制导系统成为带加性噪声随机不确定非线性系统。考虑到该系统不存在平衡点,提出有限时间二阶均方实用收敛概念,并基于此证明了所设计控制律的收敛特性。根据直接命中条件设计滑模面,得到随机快速光滑二阶滑模制导律。在尾追和迎头两种态势下,将该新型制导律与扩展比例导引、一般滑模制导律及确定性光滑二阶滑模制导律进行仿真比较,验证了该方法的正确性和有效性。

关键词:随机快速光滑二阶滑模;有限时间收敛;均方二阶实用收敛;末制导律设计
中图分类号:TJ765 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2017)04-131-08

Terminal guidance law design of stochastic fast smooth second-order sliding modes

YANG Pengfei[1], *FANG Yangwang*[1], *WU Youli*[1], *YONG Xiaoju*[2], *ZHANG Danxu*[1]
(1. Aeronautics and Astronautics Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China;
2. Department of Weapon Engineering, Air Force First Aviation College, Xinyang 464000, China)

Abstract: A novel terminal guidance law based on stochastic fast smooth second-order sliding modes control theory was proposed to handle the track imprecision mainly caused by stochastic maneuvering of the target, inertial lag, and model uncertainties. It is assumed that the target acceleration term was a zero mean Gaussian white noise and the missile-interceptor guidance system became a stochastic uncertain nonlinear system driven by additive noise, which did not have any equilibrium. So a concept of finite-time second-order mean-square practical convergence was presented and the finite-time convergence property of proposed control was proved. Then the direct hit sliding mode manifold was chosen and the guidance law was designed. The applicability of the new guidance law was illustrated through simulations of a guided missile intercepting a stochastic maneuvering target in tail chase and head-on intercepts case, respectively. Results show the validity and effectiveness of the proposed method, while a comparison is made with the augmented proportional navigation guidance law, the traditional sliding mode guidance law and smooth second order sliding mode guidance law.

Key words: stochastic fast smooth second-order sliding modes; finite-time convergence; mean-square second-order practical convergence; terminal guidance law design

考虑导弹拦截目标过程中探测误差、外界干扰及目标随机机动等影响的制导系统是一个典型随机不确定系统[1-2]。高超声速等目标的不断发展以及更高精度的动能杀伤(hit-to-kill)攻击方式,即利用高速度高质量导弹的巨大动能摧毁目标,都使得末制导过程弹目相对运动关系很快。为了实现高精度拦截高速目标,迫切需要针对随机不确定制导系统设计快速收敛制导律,从有限时间收敛角度设计导引规律十分必要[3-5]。

利用滑模变结构控制方法处理参数摄动和外界干扰来设计制导律已出现许多研究成果[6-9]。但这些制导律状态收敛普遍较慢,于是考虑系统状态有限时间收敛的制导律陆续被提出[5,10-11]。周荻等[5,11]提出制导系统视线角速率有限时间稳定的充分条件并设计了有限时间变结构制导律。王洪强[10]基于非奇异 Terminal 滑模设计了有限时间稳定制导律,取得了很好的效果。然而以上研究主要基于一阶滑模方法,虽然实现了有限时间收敛,但容易引起系统剧烈抖振,且需要对高频切换的控制量进行光滑,丢失了变结构控制系统的良好鲁棒性[12]。因此,Shtessel[12-13]设计了有限时间稳定二阶滑模制导律,使控制量具有光滑

* **收稿日期**:2016-04-05
基金项目:中国博士后科学基金资助项目(2014M562630);陕西省自然科学基金资助项目(2014JQ8339)
作者简介:杨鹏飞(1988—),男,山西侯马人,博士研究生,E-mail:pfyang1988@126.com;
方洋旺(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:ywfang2008@sohu.com

特性。然而该方法对目标机动做了大量限制,将其视为可微有界干扰而忽略了其随机特性。

针对以上不足,基于文献[12]提出的光滑二阶滑模方法(smooth second-order sliding modes),设计随机快速光滑二阶滑模制导律。引入二阶均方实用可达性概念描述随机系统有限时间收敛特性,并基于该概念证明了所提控制律的有限时间收敛特性。所设计制导律可以在有限时间内实现对目标的直接碰撞。

1 随机不确定制导模型建立

以平面情况为例,导弹 - 目标相对运动关系如图 1 所示。

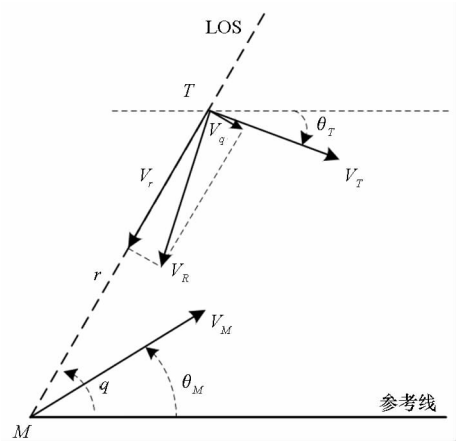


图 1 导弹 - 目标运动简化模型

Fig. 1 Typical planar engagement geometry

MT 表示目标瞄准线(Line Of Sight, LOS);V_M、V_T 分别为导弹与目标速率;q 为视线角;r 为弹目相对距离;θ_M、θ_T 分别为导弹和目标速度方向角;V_R 为弹目相对速率;V_r、V_q 分别为 V_R 在视线及视线法向上的分量。

记 u_q、w_q 分别为导弹和目标加速度在视线法向上的分量,根据文献[14]可得制导模型为:

$$\ddot{q} = -\frac{2\dot{r}}{r}\dot{q} - \frac{1}{r}u_q + \frac{1}{r}w_q \tag{1}$$

式中,u_q 为控制量。从式(1)可以看出,制导模型中参数 r、$\dot{r}$、$\dot{q}$、w_q 等对于求解制导律是必需的。假设导弹采用雷达导引头,可提供视线角、相对距离、相对距离变化率等信息。视线角速率需要根据视线角信息进行估计,目标的机动信息 w_q 无法直接提供。而且在现实空战中,传感器测量的不精确性会导致参数有界误差。考虑系统参数测量和估计有界干扰误差,将参数信息表示为:

$$\begin{cases} r = \bar{r} + \Delta r \\ \dot{r} = \bar{\dot{r}} + \Delta\dot{r} \\ \dot{q} = \bar{\dot{q}} + \Delta\dot{q} \end{cases} \tag{2}$$

式中,"-"表示参数真值,"Δ"表示有界干扰。将式(2)代入制导系统方程(1)可得:

$$\ddot{q} = -\frac{2(\bar{\dot{r}} + \Delta\dot{r})}{\bar{r} + \Delta r}(\bar{\dot{q}} + \Delta\dot{q}) - \frac{1}{\bar{r} + \Delta r}u_q + \frac{1}{\bar{r} + \Delta r}w_q \tag{3}$$

由于

$$\frac{1}{\bar{r} + \Delta r} = \frac{1}{\bar{r}} - \frac{\Delta r}{\bar{r}(\bar{r} + \Delta r)} = \frac{1}{\bar{r}} + \Delta R$$

式中,$\Delta R = -\Delta r/[\bar{r}(\bar{r} + \Delta r)]$,式(3)可以展开为:

$$\begin{aligned} \ddot{q} = &-\frac{2\bar{\dot{r}}}{\bar{r}}\bar{\dot{q}} - \left[2\bar{\dot{r}}\Delta R + \left(\frac{1}{\bar{r}} + \Delta R\right)\Delta\dot{r}\right]\bar{\dot{q}} - \\ &2(\bar{\dot{r}} + \Delta\dot{r})\left(\frac{1}{\bar{r}} + \Delta R\right)\Delta\dot{q} - \\ &\left(\frac{1}{\bar{r}} + \Delta R\right)u_q + \left(\frac{1}{\bar{r}} + \Delta R\right)w_q \end{aligned} \tag{4}$$

取状态变量 $x = \bar{\dot{q}}$,令:

$$\begin{cases} A = -\dfrac{2\bar{\dot{r}}}{\bar{r}} \\ \Delta A = -\left[2\bar{\dot{r}}\Delta R + \left(\dfrac{1}{\bar{r}} + \Delta R\right)\Delta\dot{r}\right] \\ B = -\dfrac{1}{\bar{r}} \\ \Delta B = -\Delta R \\ f = -2(\bar{\dot{r}} + \Delta\dot{r})\left(\dfrac{1}{\bar{r}} + \Delta R\right)\Delta\dot{q} \\ \xi = w_q \end{cases} \tag{5}$$

制导系统模型可以表达为:

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u_q + f + \left(\frac{1}{\bar{r}} + \Delta R\right)\xi \tag{6}$$

式中:ΔA、ΔB、f 为由测量误差引起的系统不确定性,在工程实践中是有界的;ξ 为目标机动信息,无法通过传感器获得。对于目标机动信息,一般方法是将其视为外部扰动,设计相应观测器进行观测。Shtessel[12-13]基于高阶滑模微分器设计了一种干扰观测器,但该观测器要求精确获得弹目距离 r 和视线接近速度 $\dot{r}$,同时要求目标机动 w_q 可微,这在实际中都不可能实现。为更加贴近实际,引入目标机动模型[15],目标机动未知且具有随机性,假定目标机动项 ξ 为零均值高斯白噪声过程,其方差为 $Q(t)$。因此系统(6)成为随机不确定非线性系统。

2 随机快速光滑二阶滑模控制律设计

考虑如下的动态系统:

$$\dot{\sigma} = g(t) + u + \xi \tag{7}$$

式中:σ 可以看作是滑模变量;u 为系统的输入;$g(t)$为充分光滑的不确定函数,且其导数项 $\dot{g}$ 是有界的,即$|\dot{g}|\leqslant g_d$,g_d 为已知的正常数。

令 $\mu_1=\sigma$,随机快速光滑二阶滑模动态如下:

$$\begin{cases}\dot{\mu}_1 = -k_1\,|\mu_1|^{\frac{m-1}{m}}\operatorname{sgn}(\mu_1)-k_2\mu_1-\\ \qquad k_3\,|\mu_2|\operatorname{sgn}(\mu_1)+\xi\\ \dot{\mu}_2 = -k_4\,|\mu_1|^{\frac{m-2}{m}}\operatorname{sgn}(\mu_2)-k_5\mu_2\end{cases}\tag{8}$$

式中:$m>2$, $k_i>0$ $(i=1,2,\cdots,5)$。其中参数 k_i 调整系统收敛速度;参数 m 调整系统函数的光滑程度。

令 $\boldsymbol{\mu}=[\mu_1,\ \mu_2]^{\mathrm{T}}$,则式(8)是关于状态 $\boldsymbol{\mu}$ 的随机系统。令:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\mu})=\begin{bmatrix}-k_1\,|\mu_1|^{\frac{m-1}{m}}\operatorname{sgn}(\mu_1)-k_2\mu_1-k_3|\mu_2|\operatorname{sgn}(\mu_1)\\ -k_4\,|\mu_1|^{\frac{m-2}{m}}\operatorname{sgn}(\mu_2)-k_5\mu_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}=[\sqrt{Q}\quad 0]^{\mathrm{T}}$$

式(8)可改写为:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\mu})\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}W(t)\tag{9}$$

式中,$W(t)$是定义在完全概率空间上的标准 1 维 Wiener 过程。容易看出,系统(9)是带加性噪声的随机非线性系统。

3　有限时间收敛特性分析

由于加性噪声影响,系统(9)不存在平衡点。在分析系统有限时间收敛特性时,不能采用传统稳定性定义,即让$(\sigma,\dot{\sigma})$在有限时间内趋于原点。闭环系统到达滑动模态的程度必须使用概率、数学期望等数字特征描述[16]。在工程实际中,不需要系统状态与滑动曲面的距离在有限时间内达到理论上的原点,只要系统状态能在有限时间内到达原点附近充分小的范围内即可[17]。基于这一应用背景,引入均方实用稳定性概念,即只需要使得$(\sigma,\dot{\sigma})$在有限时间内到达原点附近充分小的范围内。

3.1　随机系统滑模运动的均方二阶实用可达性定义

定义　考虑如下随机非线性系统:

$$\dot{x}=f(x)+\xi\tag{10}$$

在初始条件 $x(t_0)=x_0$ 下的解为 $x=x(t)$,滑模切换函数为 $\sigma(t)=\sigma(x(t))$。如果对于满足一定条件的实数对 δ, $\varepsilon>0$, $\exists T>0$,当 $E\|\sigma(t_0)\|^2\leqslant\delta$ 时,有:

$$E\|\sigma(t)\|^2\leqslant\varepsilon,\ \forall\, t-t_0>T\tag{11}$$

则称系统有限时间均方实用可达。

若进一步存在 $T>0$,当 $E(\|\sigma(t_0)\|^2+\|\dot{\sigma}(t_0)\|^2)\leqslant\delta$ 时,有:

$$E(\|\sigma(t)\|^2+\|\dot{\sigma}(t)\|^2)\leqslant\varepsilon,\ \forall\, t-t_0>T\tag{12}$$

则称系统实现了二阶滑模有限时间控制,系统二阶有限时间均方实用可达。

二阶有限时间均方实用可达意味着当 $t-t_0>T$ 时,$(\sigma(t),\dot{\sigma}(t))$在实际中已经充分接近原点。

3.2　控制律有限时间收敛性分析

首先给出如下定理:

定理　考虑系统(9),构造矩阵如下:

$$\boldsymbol{\Lambda}=\frac{m}{2m+1}\begin{bmatrix}k_5 & 0\\ 0 & k_2\end{bmatrix}\tag{13}$$

当参数选取 $m>2$,$k_i>0$ $(i=1,2,3,4,5)$,并且精度指标 ε 满足:

$$\varepsilon\geqslant\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda})}\frac{Q}{2k_2}\tag{14}$$

其中,Q 为状态噪声的方差。则当实数 δ 满足:

$$\delta>\frac{Q}{2k_2}\tag{15}$$

时,系统(9)可以在有限时间内关于实数对(δ,ε)均方实用收敛到原点,系统二阶有限时间均方实用可达。

证明:

针对系统(9),根据参考文献[18],定义 Lyapunov 候选函数为:

$$V=\frac{1}{2}(k_5\,|\mu_1|^2+k_2\,|\mu_2|^2)\tag{16}$$

构造向量 $\boldsymbol{\eta}=[\,|\mu_1|,\ |\mu_2|\,]^{\mathrm{T}}$,则 $V(\boldsymbol{\mu})$可以表示为如下形式:

$$V=\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}\tag{17}$$

式中

$$\boldsymbol{\Lambda}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}k_5 & 0\\ 0 & k_2\end{bmatrix}\tag{18}$$

显然,当 $m>2$,$k_i>0$ $(i=1,2,3,4,5)$时,$\boldsymbol{\Lambda}$ 正定。函数 V 是径向无界正定函数。由式(17)有:

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda})E(\|\boldsymbol{\eta}\|^2)\leqslant EV\leqslant\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda})E(\|\boldsymbol{\eta}\|^2)\tag{19}$$

式中,$\|\cdot\|$表示欧式范数,$\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda})$和 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda})$分别表示矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的最小和最大特征值,且

$$E\|\boldsymbol{\eta}\|^2=E\,|\mu_1|^2+E\,|\mu_2|^2\tag{20}$$

用 L 表示式(9)生成的伴随偏微分算子,$\Delta\boldsymbol{V}=\partial^2V/\partial\boldsymbol{\mu}^2$ 表示 Hasse 矩阵,利用 Itô 公式可以得到:

$$LV=\frac{\partial V(\boldsymbol{\mu},t)}{\partial t}+\left(\frac{\partial V(\boldsymbol{\mu},t)}{\partial\boldsymbol{\mu}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}+\frac{1}{2}trace\left(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2V(\boldsymbol{\mu},t)}{\partial\boldsymbol{\mu}^2}\boldsymbol{g}\right)\tag{21}$$

代入 V 可以得到：

$$\begin{aligned} LV &= \begin{bmatrix} k_5 |\mu_1|^{\mathrm{sgn}(\mu_1)} \\ k_2 |\mu_2|^{\mathrm{sgn}(\mu_2)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{2} trace\left(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{\mu}^2} \boldsymbol{g} \right) \\ &= -k_1 k_5 |\mu_1|^{\frac{2m-1}{m}} - k_2 k_5 |\mu_1|^2 - k_3 k_5 |\mu_1||\mu_2| - \\ &\quad k_2 k_4 |\mu_1|^{\frac{m-2}{m}} |\mu_2| - k_2 k_5 |\mu_2|^2 + \frac{1}{2} trace\left(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{\mu}^2} \boldsymbol{g} \right) \\ &\leqslant -k_2 k_5 \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + \frac{1}{2} trace\left(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{\mu}^2} \boldsymbol{g} \right) \end{aligned} \tag{22}$$

将式(22)第二项记为 LV_2，可得：

$$LV_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} \Delta V \boldsymbol{g} = \frac{1}{2} Q k_5 \tag{23}$$

将 LV_2 代入式(22)，得到：

$$LV \leqslant -k_2 k_5 \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + \frac{k_5}{2} Q \tag{24}$$

根据 Itô 微分公式 $(EV)' = E(LV)$，并结合式(19)，有：

$$\begin{aligned} (EV)' &= E(LV) \\ &= -k_2 k_5 E(\|\boldsymbol{\eta}\|^2) + \frac{k_5}{2} Q \\ &\leqslant -k_2 k_5 \frac{EV}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda})} + \frac{k_5}{2} Q \\ &= -\gamma_1 EV + \gamma_2 \end{aligned} \tag{25}$$

式中：$\gamma_1 = \dfrac{k_2 k_5}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda})}$，$\gamma_2 = \dfrac{k_5}{2} Q$，$\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} = \dfrac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}) Q}{2k_2}$。显然，当 $m > 2, k_i > 0$ 时，有 $\gamma_j > 0$，$(j = 1, 2)$。

考虑如下微分方程：

$$\dot{\varphi} = -\gamma_1 \varphi + \gamma_2, \ \varphi(t_0) = \varphi_0 \geqslant 0 \tag{26}$$

其解析解为：

$$\varphi(t) = \left(\varphi_0 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \mathrm{e}^{-\gamma_1 (t - t_0)} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \tag{27}$$

记 $EV(t_0) = EV_0$，根据比较原理，当 $EV_0 \leqslant \varphi_0$ 时，有 $EV(t) \leqslant \varphi(t)$。取 $\varphi_0 = EV_0$，可以得到：

$$EV(t) \leqslant \left(EV_0 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \mathrm{e}^{-\gamma_1 (t - t_0)} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \tag{28}$$

记 $\boldsymbol{\eta}(t_0) = \boldsymbol{\eta}_0$，易知 $E\|\boldsymbol{\eta}_0\|^2 \leqslant \delta$，根据式(19)求得：

$$\begin{aligned} E\|\boldsymbol{\eta}(t)\|^2 &\leqslant \frac{EV(t)}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda})} \leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda})} \cdot \\ &\quad \left\{ \left[EV_0 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right] \mathrm{e}^{-\gamma_1 (t - t_0)} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right\} \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda})} \left\{ \left[\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}) E\|\boldsymbol{\eta}_0\|^2 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right] \mathrm{e}^{-\gamma_1 (t - t_0)} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right\} \\ &\leqslant \left[\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda})} \delta - \frac{\gamma_2}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}) \gamma_1} \right] \mathrm{e}^{-\gamma_1 (t - t_0)} + \frac{\gamma_2}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}) \gamma_1} \triangleq h(t) \end{aligned} \tag{29}$$

由定理条件中参数 $\delta > Q/2k_2$，再根据 γ_1 和 γ_2 的定义，可得：

$$\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda})} \delta - \frac{\gamma_2}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}) \gamma_1} > 0$$

即 $h(t)$ 关于 t 为单调递减函数，且存在下界 $h_{\min}$ 如下：

$$\begin{aligned} h_{\min} &= \lim_{t \to \infty} h(t) \\ &= \frac{\gamma_2}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}) \gamma_1} = \frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda})} \frac{Q}{2k_2} \end{aligned} \tag{30}$$

由于 $\varepsilon \geqslant h_{\min}$，因此存在有限时间 T，使得 $t > t_0 + T$ 时，$E\|\eta(t)\|^2 < \varepsilon$。$T$ 由式(31)来确定，则：

$$E\|\boldsymbol{\eta}(t)\|^2 \leqslant \varepsilon \tag{31}$$

求解式(31)可得：

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\gamma_1} \ln \left(\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}) \delta - \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}) \varepsilon - \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma_1} \ln \left(\frac{\gamma_1 \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}) \delta - \gamma_2}{\gamma_1 \lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}) \varepsilon - \gamma_2} \right) \end{aligned} \tag{32}$$

根据 3.1 节的定义可知，系统(9)实现了有限时间二阶均方实用收敛滑模控制。 □

4 末制导律设计

根据文献[19]，导弹直接命中目标条件为：

$$V_q = c_0 \sqrt{r} \tag{33}$$

选取滑模面：

$$\sigma = V_q - c_0 \sqrt{r} = r\dot{q} - c_0 \sqrt{r} \tag{34}$$

式(34)两侧分别对 t 求导得到：

$$\dot{\sigma} = r\dot{x} + \dot{r}x - \frac{c_0}{2} \frac{1}{\sqrt{r}} \tag{35}$$

将制导不确定系统方程(6)的标称系统代入式(35)，并考虑到 $\dot{r}(t) < 0$，得到控制量的表达式为：

$$u_q = -\dot{\sigma} - \dot{r}x - \frac{c_0}{2} \frac{1}{\sqrt{r}} + \boldsymbol{f} + \xi \tag{36}$$

由于在工程实际中系统(6)的干扰和摄动项都是有界的，根据文献[14]推论 1.1，变结构制导律对制导参数摄动具有鲁棒性，无须检验。再由控制律表达式(8)，得到可以使得随机不确定系统(6)在有限时间内收敛的快速光滑二阶滑模制导律如下：

$$\begin{cases} u_q = -\dot{r}x - \dfrac{c_0}{2} \dfrac{1}{\sqrt{r}} + k_1 |\mu_1|^{\frac{m-1}{m}} \mathrm{sgn}(\mu_1) + \\ \qquad k_2 \mu_1 + k_3 |\mu_2|^{\mathrm{sgn}(\mu_1)} \\ \dot{\mu}_2 = -k_4 |\mu_1|^{\frac{m-2}{m}} \mathrm{sgn}(\mu_2) - k_5 \mu_2 \end{cases} \tag{37}$$

制导律(37)中设计参数较多,其中 m 主要影响控制律的光滑程度,一般取 3 即可;$k_i(i=1,2,3,4,5)$ 为设计参数,共同影响滑模控制算法的收敛速度,进而影响到制导律的制导精度。参数 k_1 和 k_4 在初始状态距离平衡区域较近时起主要作用;k_2 和 k_5 在初始状态距离平衡区域较远时起主要作用,同时还起到控制精度调节的作用;k_3 用于微调系统的初始收敛速度。参数具体取值根据具体系统不同进行设计。对于制导系统而言,当弹目相对运动较快时,需相应增大 k_1 和 k_2 的取值,并对应地调整 k_3、k_4、k_5 使得收敛速度和收敛精度达到控制要求。

5　仿真分析

为了检验所提出的制导律,选取导弹在纵向平面内拦截目标场景进行仿真。将随机快速光滑二阶滑模末制导律(Stochastic Fast Smooth Second-order Sliding Mode Guidance, SFSS_SMG)仿真结果与经典的扩展比例导引(Augmented Proportional Navigation, APN),普通滑模变结构导引(Sliding Mode Guidance, SMG)以及确定性光滑二阶滑模末制导律(Smooth Second-order Sliding Mode Guidance, SS_SMG)进行对比。

仿真条件:导弹初始位置为(0,0) km,初始马赫数为 3,最大过载为 30g,初始速度方向 0°;当地音速根据温度和高度插值拟合得到。目标机动方式为以最大 n_t 过载的法向加速度做机动,每隔2 s随机改变一次机动方向和大小。

导弹导引头测量视线角速率状态噪声为标准差 0.01 rad/s 的高斯白噪声,且测量过程视为一阶惯性环节,时间常数为 0.1 s;导引头提供的视线角速率通过对含噪声的信号进行 Kalman 滤波得到,记为 $\hat{q}$;制导律更新频率为 100 Hz;导弹舵机视为一阶惯性环节,时间常数为 0.1 s,仿真步长为 0.001 s。

扩展比例导引参考文献[20]如下:

$$u=-4\dot{r}\hat{q}+0.5a_T \tag{38}$$

并且假定目标的法向加速度 a_T 完全已知。

三种滑模变结构导引律的滑模面均取为直接命中条件:

$$\sigma=r\dot{q}-c_0\sqrt{r} \tag{39}$$

参数 $c_0=0.1$。

SMG 以指数趋近律设计控制律[1]:

$$u=-(2+k_1^{sl})\dot{r}\hat{q}+k_2^{sl}\mathrm{sgn}(\sigma) \tag{40}$$

其中,设计参数 $k_1^{sl}=2$, $k_2^{sl}=100$。

在仿真中为减弱 SMG 系统抖振,采用“边界层”内连续化方法,即在 SMG 导引规律中采用饱和函数“sat”代替符号函数。

$$sat(x)=\begin{cases}x/\theta & |x|\leqslant\theta\\ \mathrm{sgn}(x) & |x|>\theta\end{cases}$$

式中,θ 是很小的正数,取 1×10^{-3}。

SS_SMG 导引律为[12]:

$$\begin{cases}u=-\dot{r}x-\dfrac{c_0}{2}\dfrac{1}{\sqrt{r}}+k_1^{s2}\ |\mu_1|^{\frac{m^{s2}-1}{m^{s2}}}\mathrm{sgn}(\mu_1)+\mu_2\\ \dot{\mu}_2=-k_2^{s2}\ |\mu_1|^{\frac{m^{s2}-2}{m^{s2}}}\mathrm{sgn}(\mu_2)\end{cases} \tag{41}$$

其中,参数设置为 $m^{s2}=3$, $k_1^{s2}=20$, $k_2^{s2}=6$。

SFSS_SMG 导引律如式(37)所示,参数设置为 $m=3$, $k_1=20$, $k_2=10$, $k_3=1$, $k_4=6$, $k_5=6$。

为了对比分析各制导律的优缺点,分别在尾追和迎头态势下对制导情况进行分析:

5.1　仿真 1:尾追态势

尾追态势下,目标初始位置为(8, 4) km,初始速度方向角 10°,马赫数为 1.5。

进行 100 次蒙特卡洛(Monte Carlo, MC)仿真。n_t 取不同值时四种导引律脱靶量仿真均值和方差分别如表 1 和表 2 所示。

表 1　不同 n_t 值时脱靶量 MC 仿真均值

Tab. 1　Mean of miss distance MC simulation with different n_t　　m

	3g	5g	7g
APN	2.153	10.627	19.510
SMG	0.908	6.740	7.507
SS_SMG	0.503	1.658	4.963
SFSS_SMG	0.235	0.970	1.224

表 2　不同 n_t 值时脱靶量 MC 仿真方差

Tab. 2　Variance of miss distance MC simulation with different n_t

	3g	5g	7g
APN	1.891	16.258	31.122
SMG	1.045	6.242	9.650
SS_SMG	0.412	1.384	5.114
SFSS_SMG	0.097 1	0.450	2.015

从表 1 可以看出,在目标机动、导引头探测延迟、舵机延迟等影响下,APN 在目标机动信息完全可知情况下脱靶量仍然是四种制导律中最大的,说明该制导律在抑制干扰、延迟和噪声方面效果不好。SMG 在抑制参数摄动方面表现明显优于 APN,但是相比 SS_SMG 和 SFSS_SMG,其脱靶量依然很大,说明其在滑模面收敛性方面仍有缺

陷。SFSS_SMG 脱靶量在四种制导律中最小。从表 2 中仿真方差对比中可以看出,SFSS_SMG 的方差比其他制导律要小,表明该制导律制导效果比较稳定。

在固定目标机动样式情况下,取 $n_t=5g$,对随机情形进行单次仿真,对比不同制导律表现。目标机动过载如图 2 所示。

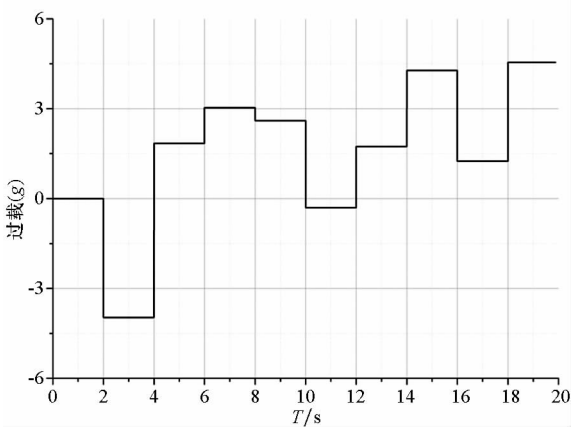


图 2 目标的机动过载

Fig. 2 Maneuvering overload of the target

各制导律滑模变量收敛情况如图 3 所示。从图 3 中可以看出,四种导引律中只有具备有限时间收敛特性的 SFSS_SMG 和 SS_SMG 使得滑模变量迅速收敛到了 0 附近邻域,SMG 收敛速度较慢,而 APN 的滑模变量不具备收敛特性,因此 APN 无法实现直接碰撞,导致脱靶量很大。从局部放大图中可以看出,SMG 的滑模变量具有较大抖振,而 SFSS_SMG 和 SS_SMG 抑制了抖振。但由于 SS_SMG 没有考虑目标随机机动,导致收敛性有偏差,而 SFSS_SMG 的滑模变量更加接近 0,表现优于 SS_SMG。

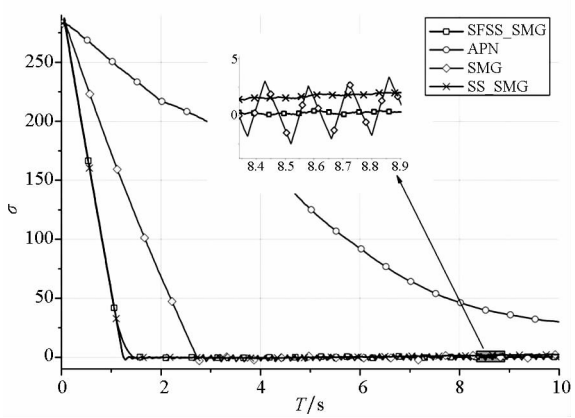


图 3 滑模变量收敛特性对比

Fig. 3 Convergence of the sliding mode variable

图 4 为制导过程中导弹法向过载情况,容易看出 SFSS_SMG 和 SS_SMG 末制导初段所需机动过载较大,这一点与实际情况中导弹制导初段速度较大可以提供较大的过载相符,说明这两种制导律充分利用了导弹机动能力,可以达到有限时间收敛;SMG 在制导初段过载较小,因此收敛速度较慢;而 APN 在末制导初中段都没有充分利用导弹机动能力。在制导中段,SMG 过载具有较大抖振,SFSS_SMG 和 SS_SMG 控制量明显更光滑。对于目标随机机动噪声,SFSS_SMG 在制导中段的调节能力要优于 SS_SMG。

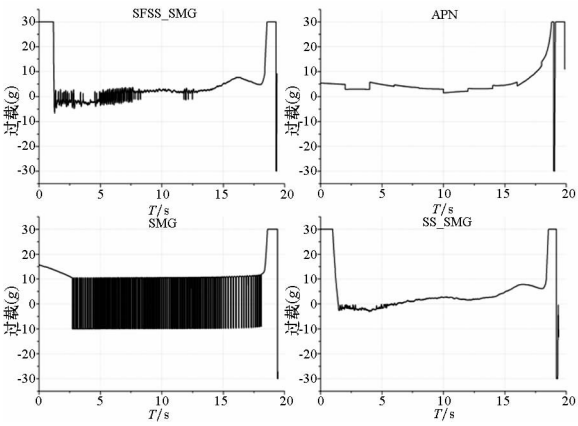


图 4 导弹法向过载对比

Fig. 4 Comparison of missile normal overload

5.2 仿真 2:迎头态势

迎头态势下,导弹的发射距离会相应增大,目标初始位置(20, 2) km,初始速度方向角 170°,马赫数为 1.5。

进行 100 次 Monte Carlo 仿真。n_t 取不同值时四种导引律脱靶量仿真均值和方差分别如表 3 和表 4 所示。

表 3 不同 n_t 值时脱靶量 MC 仿真均值

Tab. 3 Mean of miss distance MC simulation with different n_t m

	$3g$	$5g$	$7g$
APN	3.894	12.269	21.293
SMG	0.958	8.546	9.055
SS_SMG	0.891	2.027	6.518
SFSS_SMG	0.478	1.090	2.421

表 4 不同 n_t 值时脱靶量 MC 仿真方差

Tab. 4 Variance of miss distance MC simulation with different n_t

	$3g$	$5g$	$7g$
APN	1.930	15.367	26.101
SMG	1.268	7.527	10.116
SS_SMG	0.334	1.443	5.166
SFSS_SMG	0.094 7	0.388	1.726

从表 3 和表 1 的结果可以看出,迎头态势下脱靶量普遍要比尾追态势大,这是因为迎头态势下,弹目相互关系变化更快,尤其是弹目距离变小时,更快的相对运动关系会导致脱靶量变大。结果表明,迎头态势下 SFSS_SMG 表现优于其他三种制导律。表 4 的仿真方差对比结果表明,迎头态势下,SFSS_SMG 的脱靶量 MC 仿真方差依然是四种制导律中最小的。

单次目标机动过载如图 5 所示,各制导律滑模变量收敛情况如图 6 所示。从图 6 可以看出,四种导引律中收敛特性与尾追态势一致。从局部放大图中可以看到,SMG 的滑模变量仍然有较大的抖振。SFSS_SMG 和 SS_SMG 抑制了抖振,在迎头态势下二者收敛情况比较接近,SFSS_SMG 的滑模变量在 0 附近有小幅上下波动,而 SS_SMG 的波动中心在 1 附近,这也是该制导律未考虑目标随机机动造成的。

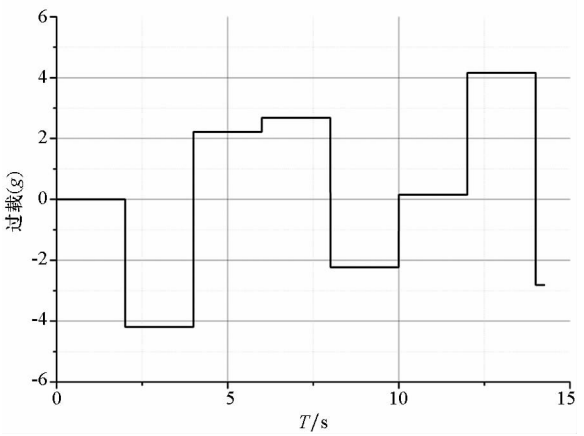


图 5　目标的机动过载

Fig. 5　Maneuvering overload of the target

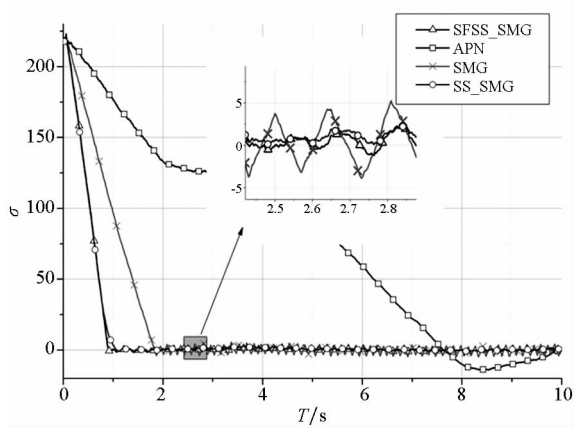


图 6　滑模变量收敛特性对比

Fig. 6　Convergence of the sliding mode variable

图 7 为迎头态势下导弹法向过载情况,总体与尾追态势一致。对比图 4 可以看出,由于弹目相对运动变快,导致制导中段 SFSS_SMG 与 SS_SMG 导弹机动过载调整更加频繁,以使得滑模变量尽快收敛。

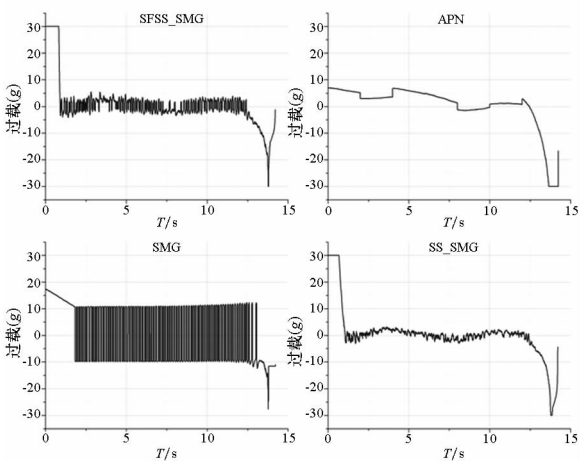


图 7　导弹法向过载对比

Fig. 7　Comparison of missile normal overload

6　结论

基于推导的随机不确定制导系统模型,提出了随机快速光滑二阶滑模算法。基于有限时间均方二阶实用收敛概念,证明了该算法的有限时间收敛特性。根据直接命中条件设计了新型制导律。仿真结果表明,该导引律滑模变量收敛速度明显优于非有限时间制导律。考虑了目标的随机机动,相比于 SS_SMG,脱靶量更小。所提制导律能够有效抑制制导中段控制量大幅抖振,使控制量更容易实现而且视线角速度更加平稳。

为简化问题,在仿真中将弹体环节简化为一阶弹体环节,目标机动模型也选用了基础的高斯白噪声模型。这些简化都有待进一步的研究。后续可改进的工作包括:建立更加精确的弹体环节模型,设计相应的控制律形成制导控制回路;引入更加精确的目标机动模型,推导更加符合实际的制导律等。

参考文献(References)

[1]　Balakrishnan S N, Tsourdos A, White B A. Advances in missile guidance, control, and estimation[M]. Boca Raton, US: CRC Press, 2012.

[2]　方洋旺. 随机系统最优控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
FANG Yangwang. Optimal control for stochastic systems[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005. (in Chinese)

[3]　张运喜, 孙明玮, 陈增强. 滑模变结构有限时间收敛制导律[J]. 控制理论与应用, 2012, 29(11): 1413 – 1418.
ZHANG Yunxi, SUN Mingwei, CHEN Zengqiang. Sliding-mode variable structure finite-time convergence guidance law[J]. Control Theory & Applications, 2012, 29(11): 1413 – 1418. (in Chinese)

[4] 赵明元, 魏明英. 带有双闭环滤波器的有限时间稳定变结构制导律[J]. 航空学报, 2010, 31(8): 1629 – 1635.
ZHAO Mingyuan, WEI Mingying. Finite time stable variable structure guidance law with double closed-loop filters[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2010, 31(8): 1629 – 1635. (in Chinese)

[5] 孙胜, 周荻. 有限时间收敛变结构导引律[J]. 宇航学报, 2008, 29(4): 1258 – 1262.
SUN Sheng, ZHOU Di. A finite time convergent variable structure guidance law[J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(4): 1258 – 1262. (in Chinese)

[6] 周荻, 慕春棣, 徐文立. 空间拦截智能自适应变结构导引规律研究[J]. 宇航学报, 1999, 20(4): 60 – 65.
ZHOU Di, MU Chundi, XU Wenli. Intelligent adaptive variable structure guidance for space interception[J]. Journal of Astronautics, 1999, 20(4): 60 – 65. (in Chinese)

[7] Zhou D, Mu C D, Xu W L. Adaptive sliding-mode guidance of a homing missile[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1999, 22(4): 589 – 594.

[8] 孙胜, 张华明, 周荻. 考虑自动驾驶仪动特性的终端角度约束滑模导引律[J]. 宇航学报, 2013, 34(1): 69 – 78.
SUN Sheng, ZHANG Huaming, ZHOU Di. Sliding mode guidance law with autopilot lag for terminal angle constrained trajectories[J]. Journal of Astronautics, 2013, 34(1): 69 – 78. (in Chinese)

[9] 孙胜, 张华明, 禹春梅, 等. 考虑导弹动态延迟特性的滑模导引律设计[J]. 系统工程与电子技术, 2014(8): 1614 – 1618.
SUN Sheng, ZHANG Huaming, YU Chunmei, et al. Sliding-model guidance law design considering missile dynamic delay[J]. Systems Engineering and Electronics, 2014(8): 1614 – 1618. (in Chinese)

[10] 王洪强, 方洋旺, 伍友利. 基于非奇异 Terminal 滑模的导弹末制导律研究[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(6): 1391 – 1395.
WANG Hongqiang, FANG Yangwang, WU Youli. Research on terminal guidance law of missiles based on nonsingular terminal sliding mode[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(6): 1391 – 1395. (in Chinese)

[11] Zhou D, Sun S, Teo K L. Guidance laws with finite time convergence[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32(6): 1838 – 1846.

[12] Shtessel Y B, Shkolnikov I A, Levant A. Smooth second-order sliding modes: missile guidance application[J]. Automatica, 2007, 43(8): 1470 – 1476.

[13] Shtessel Y B, Shkolnikov I A. Integrated guidance and control of advanced interceptors using second order sliding modes[C]//Proceedings of 42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003: 4587 – 4592.

[14] 周荻. 寻的导弹新型导引规律[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002.
ZHOU Di. New guidance laws for homing missile[M]. Beijing: National Defend Industry Press, 2002. (in Chinese)

[15] Li X R, Jilkov V P. Survey of maneuvering target tracking. part Ⅰ: dynamic models[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2003, 39(4): 1333 – 1364.

[16] 刘永清, 邓飞其. 随机系统的变结构控制[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1998.
LIU Yongqing, DENG Feiqi. Variable structure control for stochastic systems[M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1998. (in Chinese)

[17] La Salle J, Lefschetz S. Stability by Liapunov's direct method with applications[M]. New York, US: Academic Press, 1961.

[18] Moreno J A, Osorio M. A lyapunov approach to second order sliding mode controllers[C]// Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, 2008: 2856 – 2861.

[19] Moon J, Kim K, Kim Y. Design of missile guidance law via variable structure control[J]. Journal on Guidance, Control, and Dynamics, 2001, 24(4): 659 – 664.

[20] Zarchan P. Tactical and strategic missile guidance, progress in astronautics and aeronautics[M]. Reston, VA, US: AIAA Publications, 2012.