

有限水深 Kelvin 源格林函数的传播特性及其应用*

肖汶斌, 刘巍, 程兴华, 王勇献

(国防科技大学海洋科学与工程研究院, 湖南长沙 410073)

摘要:为探究有限水深环境下自由面兴波在远场的传播特性,应用线性水动力学的基本理论,从有限水深 Kelvin 源格林函数的积分表达式中提取相函数,采用同相分析法求得亚临界和超临界速度区下远场传播波系的等相线。结果表明,水深傅汝德数 $F_h < 1$ 时远场传播波包括横波和散波两个波系, $F_h > 1$ 时远场波系仅由散波构成,点源兴波的影响范围可由 Kelvin 角的大小确定,当 F_h 趋近于 1 时 Kelvin 角迅速增大至 90° 。依据船型要素、两船相对位置和池壁几何参数,并计及船模的定常兴波经池壁反射作用后对自身和另一船模的干扰,提出了有限水深条件下并行航行两船模池壁效应的判别方法,并结合实例检查分析了某试验工况下的池壁效应。

关键词:有限水深; Kelvin 源; 同相分析法; 池壁效应; 两船水动力干扰

中图分类号: U661.32 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2017)04-185-07

Propagation characteristics of Kelvin source Green function in finite depth water and its application

XIAO Wenbin, LIU Wei, CHENG Xinghua, WANG Yongxian

(Academic of Ocean Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Present work is focused on the investigation of the propagation characteristics of making wave on the free surface in finite depth water. On the basis of linear hydrodynamic theory, phase function was extracted from the integral representation of 3-D Kelvin source Green function in finite depth water. By adopting the stationary phase analysis method, the constant phase curves and propagation wave patterns were investigated at subcritical and supercritical speed zones respectively. Results indicate that the far field wave systems are composed of transverse and divergent wave patterns if depth Froude number $F_h < 1$. If $F_h > 1$, only divergent wave patterns are found in the far field. The influence scope of propagating waves above can be determined by the Kelvin angle whose degree changes with depth Froude number and increases to 90 degrees near the critical depth Froude number $F_h = 1$. Based on the geometrical parameters, such as ship model particulars, relative position of two ships and tank breadth, a discriminant method is proposed for two ship models advancing parallel in calm water of finite depth, which is taken the side wall effects into account in towing tank. In this discrimination method, the interferences of the reflected steady waves from the tank walls, which may act on both ships, are also considered. Under the experimental conditions, the side wall effects are examined in a two-model test.

Key words: finite water depth; Kelvin source; stationary-phase analysis; side wall effect; hydrodynamic interactions of two ships

Kelvin 源格林函数是一类定常移动兴波源格林函数^[1],其自动满足除物面条件外其他所有的边界条件,无须像 Rankine 源格林函数在所有流体边界上分布源汇,在应用势流理论求解船舶水动力特性上具有一定的数值优势。针对无限水深 Kelvin 源格林函数, Noblesse^[2] 和 Baar^[3] 等先后开展了快速稳定积分计算方法的研究,并已运用于船舶阻力性能及定常兴波的计算分析之中。通过对分布奇点关于有限水底的镜像, Chen^[4-5] 和 Yang^[6-7] 推导了极坐标系下的有限水深 Kelvin 源格林函数数学表达式。另外, Yang 以该类格林函

数为积分内核开展了 Wigley 船型的水动力数值研究,其计算所得的兴波阻力、垂向力、纵倾力矩与试验结果吻合较好,这表明采用有限水深 Kelvin 源格林函数求解浅水下的船舶阻力问题是适用的。

船舶以一定速度通过水域时,会引起流场压力分布及自由液面的变化。Kelvin 最早对该问题给出了合理的物理解释^[8], Lighthill & Whitham^[9] 则从运动学角度分析了船舶兴波现象。与无限水深不同的是,浅水条件下的船舶兴波范围将受到水深的影响,这已被大量航空照片及雷达测波结果的证实^[10]。随着近年来多体船及高速船的发

* 收稿日期:2016-02-22

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11272352, 61379056); 航天支撑技术基金资助项目(HT201401)

作者简介:肖汶斌(1988—),男,湖南长沙人,助理研究员,博士, E-mail: hgxiaowb727@126.com

展,且试验水池、内河及近海中的水深大多较浅,有限水深下的船舶定常兴波问题日益引起人们的重视^[11-13]。借鉴 Lighthill & Whitham 研究无限水深波系构成的思路,Fang^[14]构建了计及风向与水深影响的水波动力学统一模型,并获得了定量分析 Kelvin 角的数学表达式。

本文直接从有限水深 Kelvin 源格林函数的波函数中提取相函数,采用同相分析法获得了亚临界和超临界速度时的远场传播波形,讨论分析了水深傅汝德数对 Kelvin 角大小的影响,基于有限水深 Kelvin 源格林函数传播特性提出了静水中两船池壁效应的判别方法,以指导水池试验方案的设计及试验测量不确定度的分析。

1 有限水深 Kelvin 源格林函数

设点源以航速 U 在有限水深中航行,建立三

$$W = \begin{cases} -4iH(-X) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{\cosh[k(1+\zeta)] \cosh[k(1+z)] \exp[ik(|X|\cos\theta + Y\sin\theta)]}{\cosh^2 k(F_h^2 \cos^2\theta - \operatorname{sech}^2 k)}, & F_h < 1 \\ -4iH(-X) \int_0^{+\infty} dk \frac{\cosh[k(1+\zeta)] \cosh[k(1+z)]}{2kF_h^2 \cos\theta \sin\theta \cosh^2 k} \{ \exp[ik(|X|\cos\theta + Y\sin\theta)] + \exp[ik(|X|\cos\theta - Y\sin\theta)] \}, & F_h > 1 \end{cases} \quad (2)$$

式中: $X=x-\xi, Y=y-\eta$; Heaviside 函数 $H(X)$ 确保了点源航行前方的无波条件,当 $X>0$ 时 $H(X)=1$,当 $X<0$ 时 $H(X)=0$;波数 k 和变量 θ 满足非线性色散方程 $kF_h^2 \cos^2\theta - \tanh k=0$,对不同的 F_h 和 θ 求解出的 k 值曲线称为色散曲线(见图 1)。由图可知,当 $\theta \in [0, \pi/2]$ 且 $F_h < 1$ 时,色散方程均有唯一的根 $k \neq 0$;当 $F_h > 1$,必须满足 $F_h^2 \cos^2\theta < 1$ 时,色散方程才有非零根 k 。

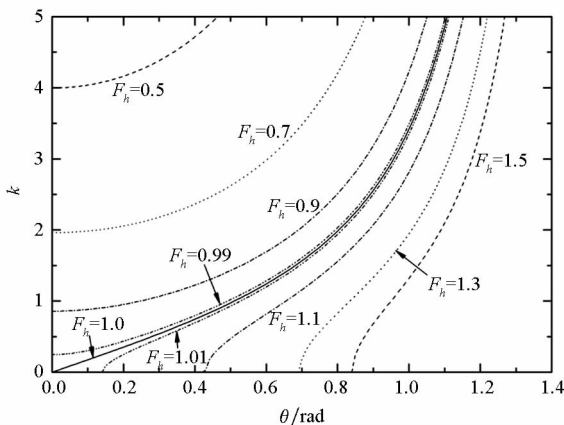


图 1 色散曲线图

Fig. 1 Dispersion Curves

维随动正交坐标系 $o-xyz$,其中 xoy 平面位于未扰动水平面, ox 轴正向与航速 U 同向, oz 轴垂直向上为正。假定流体为理想不可压缩流体且运动无旋,此时流场的扰动速度势满足 Laplace 方程,定解条件包括线性自由面条件、物面与水底不可穿透条件及远方无波条件。在有限水深情形下,计及水面线性兴波的影响,以水深 h 为因次化各变量,可得自由表面以下的源点 (ξ, η, ζ) 对场点 (x, y, z) 的 Kelvin 源格林函数^[7]为:

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = A + N + W \quad (1)$$

其中: A 为关于水底和水面无穷多个镜像的 Rankine 源集合; N 为一双重积分,是近场局部扰动项;单重积分 W 为波函数项,远场兴波主要来自该项,对应不同水深傅汝德数 $F_h = U/\sqrt{gh}$, W 的数学表达式为:

2 波函数的传播特性分析

2.1 亚临界速度区 $F_h < 1$

当 $F_h < 1$ 时,波函数的被积表达式由指数函数、三角余弦、双曲余弦和双曲正割函数构成,其中指数函数的指数部分为纯虚数,该虚数的模可反映积分路径上被积函数的振荡频率及相位,故可定义亚临界速度区的相函数为:

$$\psi(\theta, k) = k(|X|\cos\theta + Y\sin\theta)$$

其中,参数 k 和 θ 满足色散方程,即 $k = k(\theta)$,因此相函数 ψ 可视为关于 θ 的函数。另外考虑到 Heaviside 函数的取值特性,相函数可改写为如下形式:

$$\psi(\theta) = k(-X\cos\theta + Y\sin\theta) \quad (3)$$

此时色散方程在积分区间 $[-\pi/2, \pi/2]$ 内是可微的,故有:

$$\frac{dk}{d\theta} = \frac{2kF_h^2 \sin\theta \cos\theta \cosh^2 k}{F_h^2 \cos^2\theta \cosh^2 k - 1} \quad (4)$$

依据相函数的相位特性,采用同相分析法^[15-16]求解有限水深 Kelvin 源格林函数的远场波系,令 $d\psi/d\theta=0$,则有:

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{Xk\sin\theta(F_h^2 \cos^2\theta \cosh^2 k + 1) - Yk\cos\theta[(1 + \sin^2\theta)F_h^2 \cosh^2 k - 1]}{F_h^2 \cos^2\theta \cosh^2 k - 1} = 0 \quad (5)$$

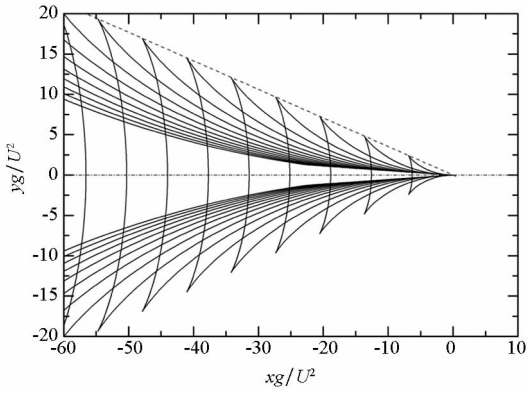
$$\frac{Y}{X} = \frac{\sin\theta(F_h^2 \cos^2\theta \cosh^2 k + 1)}{\cos\theta[(1 + \sin^2\theta)F_h^2 \cosh^2 k - 1]} \quad (6)$$

将式(6)代入相函数表达式(3)即可获得等相曲线族的参数方程为:

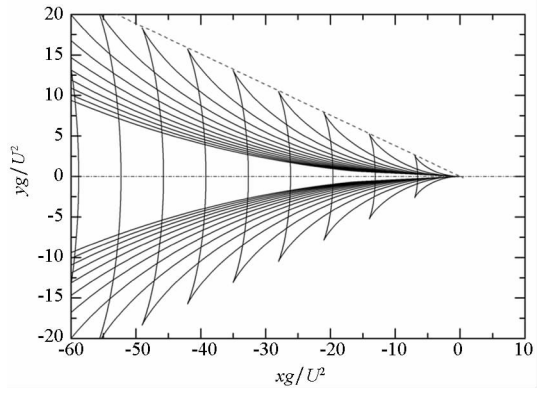
$$\begin{cases} X = -\frac{\cos\theta[(1 + \sin^2\theta)F_h^2 \cosh^2 k - 1]}{k(F_h^2 \cos^2\theta \cosh^2 k - 1)}\psi \\ Y = -\frac{\sin\theta(F_h^2 \cos^2\theta \cosh^2 k + 1)}{k(F_h^2 \cos^2\theta \cosh^2 k - 1)}\psi \end{cases}, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (7)$$

X 和 Y 表达的是场点和源点在水平面的相对位置,不失一般性,可将点源平移至坐标系的竖直

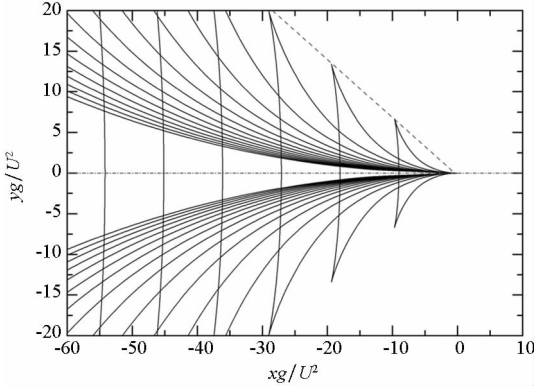
轴上,此时式(7)中的 $X、Y$ 可用 $x、y$ 替换。由积分区间的对称性和三角函数的奇偶性可知,由式(7)所确定的等相曲线族必定关于点源航行方向对称。另外,相函数 ψ 具有周期特性,令 $\psi = 2n\pi$ (n 为正整数),则可绘制出亚临界速度区情形下的点源远场兴波等相线(如图2所示)。从图可知,亚临界速度时的传播波包括横波和散波两个波系,且传播范围限制在关于航行方向对称的楔形区域内。随着水深傅汝德数 F_h 的增大,Kelvin 角将逐渐增大,兴波的覆盖面也随之扩大,同时横波和散波的波长呈现出增大的趋势。



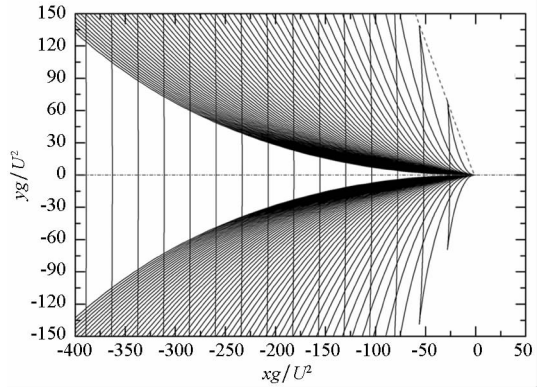
(a) $F_h = 0.5$



(b) $F_h = 0.7$



(c) $F_h = 0.9$



(d) $F_h = 0.99$

图2 亚临界速度下的等相线

Fig. 2 Constant-phase curves at subcritical speed

在无限水深($h \rightarrow +\infty$)中,由色散方程可知 $\tanh k \rightarrow 1, k/h \rightarrow g/U^2$,此时方程(7)的极限表达形式为:

$$\begin{cases} \lim_{h \rightarrow +\infty} X = -\psi \frac{U^2}{g} (1 + \sin^2\theta) \cos\theta \\ \lim_{h \rightarrow +\infty} Y = -\psi \frac{U^2}{g} \sin\theta \cos^2\theta \end{cases}, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (8)$$

方程(8)描述的等相线与无限水深下的

Kelvin 源传播波形^[17]是一致的,此时有限水深 Kelvin 源相应地退化为无限水深 Kelvin 源格林函数。

2.2 超临界速度区 $F_h > 1$

当 $F_h > 1$ 时,波函数的积分区间为 $k \in [0, +\infty)$,且被积函数为两函数的求和。分析色散曲线的特性可知,波函数可转换为关于 θ 的积分,即:

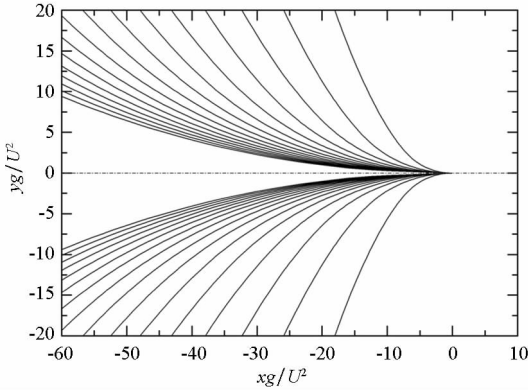
$$W = -4iH(-X) \left(\int_{-\pi/2}^{-\theta_0} + \int_{\theta_0}^{\pi/2} \right) d\theta \frac{\cosh[k(1 + \zeta)] \cosh[k(1 + z)]}{\cosh^2 k(F_h^2 \cos^2\theta - \text{sech}^2 k)} \exp[ik(|X| \cos\theta + Y \sin\theta)] \quad (9)$$

其中, θ_0 为色散曲线在 θ 正半轴上的截距, 此时 $k(\theta_0) = 0$ 。

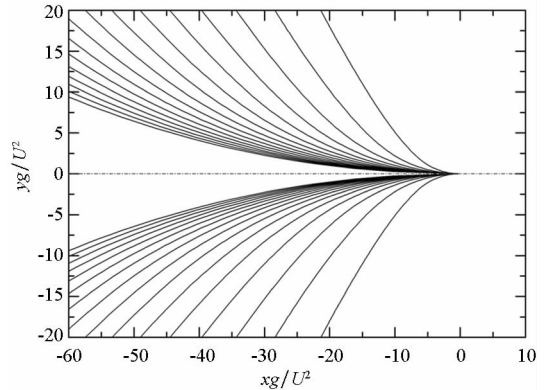
按照 2.1 节的分析思路, 超临界速度区情形下等相曲线族的参数方程可表示如下:

$$\begin{cases} X = -\frac{\cos\theta[(1 + \sin^2\theta)F_h^2 \cosh^2 k - 1]}{k(F_h^2 \cos^2\theta \cosh^2 k - 1)}\psi \\ Y = -\frac{\sin\theta(F_h^2 \cos^2\theta \cosh^2 k + 1)}{k(F_h^2 \cos^2\theta \cosh^2 k - 1)}\psi \end{cases},$$

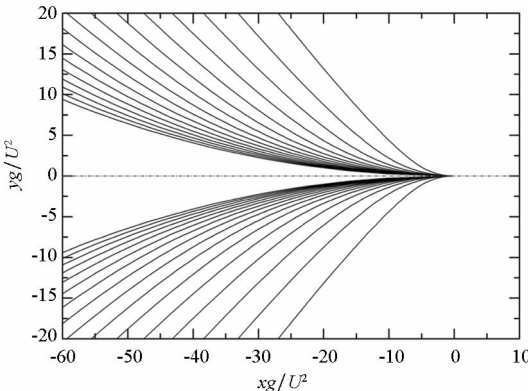
$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\theta_0\right] \cup \left[\theta_0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (10)$$



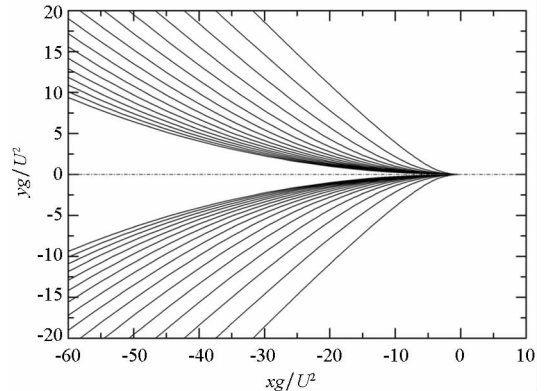
(a) $F_h = 1.01$



(b) $F_h = 1.1$



(c) $F_h = 1.3$



(d) $F_h = 1.5$

图 3 超临界速度下的等相线

Fig. 3 Constant phase curves at supercritical speed

等相线(见图 2)可知, 点源兴波的楔形传播范围可利用横波与散波波系的交点与点源坐标的夹角表达, 由于等相线曲线族方程中的 X 和 Y 在 $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ 区间内均为连续函数, 故两类波系的交点实质上对应着 X 和 Y 的驻点坐标。若令 $dY/d\theta = 0$, 则:

$$(8F_h^2 \sinh^2 k \cosh^2 k + 2F_h^2 \cosh^2 k - 1)k^3 + \sinh k \cosh k (4F_h^2 \cosh^2 k - 8 \sinh^2 k + 1)k^2 + 5 \sinh^2 k \cosh^2 k \cdot k - 3 \sinh^3 k \cosh^3 k = 0 \quad (11)$$

在 $k \in (0, +\infty)$ 区间内式(11)无法获得精确的解析解, 但可采用数值计算方法中的 Newton 迭代法求解。设 k_c 为式(11)的零点值, 并依据色散

图 3 给出了不同水深傅汝德数下方程(10)所确定的点源远场传播波系图。由图可知, 超临界速度下点源的兴波波系仅有散波存在, 此时横波消失, 但其传播范围仍然限制在关于航行方向对称的楔形区域内。随着点源航行速度的增大或水深的减小, 波系的覆盖区域呈现逐渐减小的趋势。

3 兴波特征参数的定量分析

有限水深中, 点源兴波的 Kelvin 角 β 是反映水深效应的重要特征参数。观察亚临界速度区的

方程可获得相应的 θ_c 值, 综合式(6), 亚临界速度下的 Kelvin 角 β 应满足如下的表达式:

$$\tan\beta = \frac{Y(\theta_c)}{X(\theta_c)}, \quad 0 < F_h < 1 \quad (12)$$

若定义 λ_D 和 λ_T 为亚临界速度下散波波系与横波波系沿点源移动方向的波长, 由式(7)可知 λ_D 的表达式为:

$$\lambda_D = 2\pi \frac{\cos\theta_c[(1 + \sin^2\theta_c)F_h^2 \cosh^2 k_c - 1]}{k_c(F_h^2 \cos^2\theta_c \cosh^2 k_c - 1)}, \quad 0 < F_h < 1 \quad (13)$$

而横波波系与点源航行方向的交点对应于 $\theta = 0$, 故 λ_T 可表示为:

$$\lambda_T = 2\pi \frac{F_h^2}{\tanh k(0)}, \quad 0 < F_h < 1 \quad (14)$$

数值计算表明,当 $0.5 < F_h < 1$ 时, $\tanh k(0) \approx 1$,故横波波长可近似为 $\lambda_T = 2\pi F_h^2$ 。

超临界速度下传播波的等相线(见图3)均为内凹的V形曲线,Kelvin角 β 可由距点源无穷远处的 X 和 Y 坐标表达,此时 $\theta \rightarrow \theta_0$,而 $\cos\theta_0 = 1/F_h$,则有:

$$\tan\beta = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{Y(\theta)}{X(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{F_h^2 - 1}}, \quad F_h > 1 \quad (15)$$

图4为 Kelvin角随水深傅汝德数的变化曲线,并给出了 Fang^[14]采用水波动力学模型的计算结果。由图可知,在亚临界速度区内,Kelvin角随水深傅汝德数的增大而逐渐增大,当 $F_h < 0.5$ 时,Kelvin角与无限水深中的情形几乎相同,且 $\beta \approx 19.47^\circ$;当 $F_h > 0.9$ 时,Kelvin角迅速增大直至 90° (对应于 $F_h = 1$)。在超临界速度区内,Kelvin角随着水深傅汝德数的增大由 90° 逐渐减小,在 $F_h = 1$ 附近的变化较为显著,这表明此时的传播波形具有不稳定性。Fang所预报的 Kelvin角随水深傅汝德数的变化趋势与上述分析是相一致的,但在某些区域存在一定的数值差异,这与分析采用的不同数学模型有关。图5给出了亚临界速

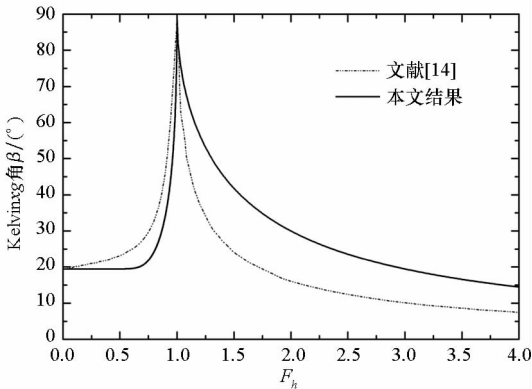


图4 不同水深傅汝德数下的 Kelvin角
Fig. 4 Kelvin angle versus Froude number

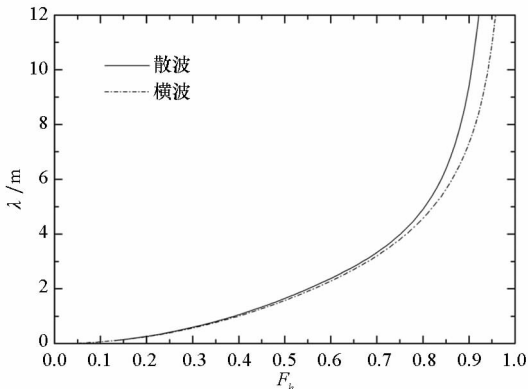


图5 亚临界速度下的散波与横波波长
Fig. 5 Wavelength of divergent and transverse waves at $F_h < 1$

度下散波与横波沿点源航迹方向的波长变化曲线,当 $F_h \rightarrow 1$ 时两类波系的波长将迅速增大。

4 静水中两船池壁效应的判别方法

对浅水中并行航行两船的池壁效应问题,利用有限水深 Kelvin源格林函数的传播特性,依据船模长度、两船相对位置和池壁几何参数,可提出静水中两船池壁效应的判别分析方法。

设在宽度为 B_T 的水池中,船模 a 和 b 的长度分别为 L_a 和 L_b ,不失一般性,可设船模 a 位于船模 b 的右舷,此时两船的横向间距为 Δy ,船模 a 距水池中轴线的距离为 d ($d \geq 0$),且船模 a 船艏相对于船模 b 船艏的偏移量为 Δx ,约定 Δx 为正值时表示船模 a 在船模 b 的前方。

以图6为例,两船模产生的定常兴波经池壁的反射作用后可能对其自身产生干扰,该类临界角应以距船模较近的池壁作为参考,设对船模 a 和 b 该角度分别为 α_1 和 α_2 ,其计算式如下:

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \frac{B_T - 2d}{L_a} \quad (16)$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \frac{B_T - 2\Delta y + 2d}{L_b} \quad (17)$$

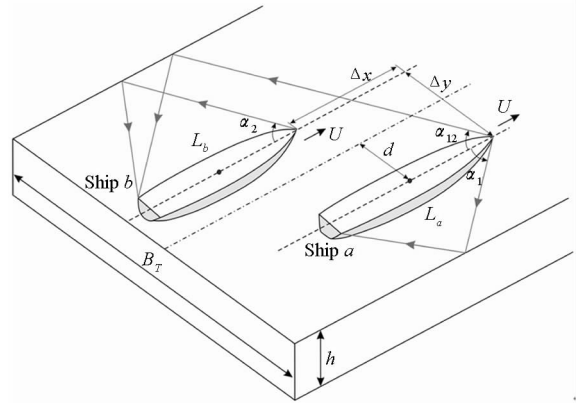


图6 静水并行航行两船的池壁效应判别
Fig. 6 Discrimination of side wall effects for two ship models advancing parallel in calm water

另外,还需考虑船模的传播波经池壁反射后对另一船模的干扰作用,此时由于船体的遮蔽效应,两船舷间的船体兴波应限于在舷间的狭小区域内传播,这是两船近距离航行水动力干扰的重要特性。但当两船纵向距离较大,如船模 a 船艏距船模 b 船艏的偏移量与船长处于同一量级时,船模 a 产生的兴波可能经左侧池壁的反射后作用于船模 b ,设此时的临界角为 α_{12} ,则:

$$\alpha_{12} = \tan^{-1} \frac{B_T - \Delta y + 2d}{\Delta x + L_b} \quad (18)$$

分析可知,考虑式(18)的前提条件是 $\Delta x(B_T - \Delta y + 2d) > \Delta y(\Delta x + L_a)$, 否则船模 a 左舷侧的兴波无法传至左池壁。

故可利用式(16)~(18)所示的三个临界角作为并行航行两船池壁效应判别的依据,并定义其最小值作为判别是否发生池壁效应的临界角 $\alpha_i = \text{Min}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12})$ 。在一定水深傅汝德数 $F_h = U/\sqrt{gh}$ 下,若 Kelvin 角 β 大于临界角 α_i , 则表明船模附近的兴波经池壁反射后作用于船模附近的流场,即产生了池壁效应,而 $\beta \leq \alpha_i$ 时则不会出现池壁效应。

针对文献[18]开展的有限水深两船航行试验,应用上述判别方法对其试验工况下的池壁

效应进行了检查,表 1 给出了检查计算的结果。试验模型长 $L_a = 2.520$ m、 $L_b = 1.600$ m, 试验水池长 80 m、宽 4 m、水深 0.504 m, 两船的横向间距 $\Delta y = 0.25L_a$, 纵向间距 $\Delta x = 0, 0.35L_a, 0.60L_a$, 水深傅汝德数 $F_h = 0.5 \sim 1.1$ 。若考虑两模型距水池中轴线等距布置,发现无论两船纵向间距如何变化, $F_h = 1.1$ 时的试验工况总存在一定的池壁干扰作用,其中 $\Delta x = 0$ 和 $0.35L_a$ 时均是由于船模 b 的传播波经左侧池壁反射后作用于船模 b , 而 $\Delta x = 0.60L_a$ 时船模 a 左舷的兴波经左侧池壁反射后也作用于船模 b , 这表明该试验中船模 b 受到池壁效应的影响相对较大。

表 1 静水并行航行两船的池壁效应检查表

Tab. 1 Check of side wall effects for two ship models advancing parallel in calm water

F_h	Kelvin 角 $\beta/(\circ)$	$\Delta x = 0$		$\Delta x = 0.35L_a$		$\Delta x = 0.60L_a$	
		$\alpha_i/(\circ)$	判别结果	$\alpha_i/(\circ)$	判别结果	$\alpha_i/(\circ)$	判别结果
0.5	19.47		×		×		×
0.7	20.53	53.21	×	53.21	×	52.12	×
0.9	34.62		×		×		×
1.1	65.38		√		√		√

注: * 符号 × 表示该工况下不发生池壁效应;符号 √ 则表示该工况下存在池壁干扰效应。

5 结论

1) 针对三维有限水深 Kelvin 源格林函数的积分表达式,本文从波函数表达式中提取相函数,基于非线性色散方程的取值特性,依据同相分析法的研究手段,获得了两种速度区内的远场传播波系及其数学表达式。

2) 亚临界速度区时点源的传播波包括横波和散波两个波系,在超临界速度区内横波波系消失,而波系的传播范围均限制在关于航行方向对称的楔形区域内。当水深傅汝德数接近于 1 时,兴波覆盖面表现出增大的趋势。

3) 分析发现,有限水深 Kelvin 源格林函数仍可描述无限水深下的传播波系,这表明该类格林函数对不同水深远场波系的表达具有普适性。采用 Newton 迭代法和极限分析方法,推导了有限水深 Kelvin 角的数学表达式,并获得了亚临界速度时散波波系与横波波系的波长随水深的变化关系。

4) 以有限水深 Kelvin 源格林函数的传播特性为基础,依据船型要素、两船相对位置和水池宽

度等几何参数,提出了静水中并行航行两船模池壁效应的判别方法,并应用于有限水深两船航行试验的池壁效应判别之中。

参考文献 (References)

- [1] 刘应中. 船舶兴波阻力理论 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2003: 98-105.
LIU Yingzhong. Theory of ship wave making resistance [M]. Beijing: National Defense of Industry Press, 2003: 98-105. (in Chinese)
- [2] Noblesse F. The fundamental solution in the theory of steady motion of a ship [J]. Journal of Ship Research, 1977, 21(2): 82-88.
- [3] Baar J J M, Price W G. Evaluation of the wavelike disturbance in the Kelvin waves source potential [J]. Journal of Ship Research, 1988, 32(1): 44-53.
- [4] Chen X B, Nguyen T. Ship-motion Green function in finite-depth water [C] // Proceedings of 4th International Conference on Hydrodynamics, 2000.
- [5] Chen X B, Zhao R. Steady free-surface flow in water of finite depth [C] // Proceedings of 16th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, 2001: 17-20.
- [6] Yang Q Z. Wash and wave resistance of ships in finite water depth [D]. Trondheim: Norwegian University of Science and Technology, 2002.
- [7] Yang Q Z, Faltinsen O M. Green function of steady motion in finite water depth [J]. Journal of Ship Research, 2006,

- 50(2): 120 – 137.
- [8] Kelvin W T. Deep sea ship waves [J]. *Mathematical and Physical Papers*, Cambridge, 1910, 4: 303 – 306.
- [9] Lightill M J, Whitham G B. On kinematic waves: I. flood movement in long rivers; II. theory of traffic flow on long crowded roads [J]. *Proceedings of the Royal Society A*, 1955, 229(1178): 281 – 345.
- [10] Kuo J M, Chen K S. The application of wavelets correlator for ship wake detection in SAR images [J]. *IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing*, 2003, 41 (6): 1506 – 1511.
- [11] 张志宏, 顾建农. 浅水高速船舶引起的波浪和压力场研究 [J]. *船舶力学*, 2006, 10(2): 15 – 22.
ZHANG Zhihong, GU Jiannong. Research on wave and pressure field caused by ship moving at high speed in shallow water [J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2006, 10(2): 15 – 22. (in Chinese)
- [12] Lazauskas L. The hydrodynamic resistance, wave wakes and bottom pressure signatures of a 5900t displacement air warfare destroyer [R]. The University of Adelaide, Australia, 2007: 9 – 15.
- [13] Aubault A, Yeung R W. Multi-hull interference wave-resistance in finite-depth waters [C] // *Proceedings of 24th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, 2009.
- [14] Fang M C, Yang R Y, Shugan I V. Kelvin ship wake in the wind waves field and on the finite sea depth [J]. *Journal of Mechanics*, 2011, 27(1): 71 – 77.
- [15] Xu Y, Dong W C, Xiao W B. Study on far field wave patterns and their characteristics of Havelock form Green function [J]. *China Ocean Engineering*, 2013, 27 (3): 283 – 298.
- [16] Xiao W B, Dong W C. Decomposition of the unsteady wave patterns for Bessho form translating-pulsating source Green function [J]. *Journal of Ocean University of China*, 2014, 13(5): 771 – 776.
- [17] Bertram V. *Practical ship hydrodynamics* [M]. UK: Butterworth Heinemann, 2000: 57 – 86.
- [18] 缪涛, 张志宏, 王冲, 等. 有限水深双船航行水底压力计算与实验研究 [J]. *华中科技大学学报: 自然科学版*, 2012, 40(9): 128 – 132.
MIAO Tao, ZHANG Zhihong, WANG Chong, et al. Calculation and experiment of bottom pressure variation induced by two ships in finite depth [J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology: Nature Science*, 2012, 40(9): 128 – 132. (in Chinese)