doi:10.11887/j.cn.201705024 http://journal.nudt.edu.cn

直觉模糊物元及其在权重信息未知多属性群决策中的应用*

张洋铭[1],陈云翔[1],项华春[1],赵志宁[2],刘 念[3]
(1. 空军工程大学 装备管理与安全工程学院,陕西 西安 710051;
2. 国防大学 联合作战学院,河北 石家庄 050000;3. 中国人民解放军94188部队,陕西 西安 710051)

摘 要:针对传统物元分析理论无法应用于决策信息为直觉模糊数的多属性决策问题,提出直觉模糊物元分析模型以及用相对相似度代替传统方法中的关联函数来解决直觉模糊物元分析问题,进而完整阐述了直觉模糊物元多属性决策的方法步骤,并通过实例验证了该方法的有效性。特别是针对权重信息未知这一类较为复杂的多属性群决策问题,采用投影法和直觉模糊熵确定权重信息,并运用直觉模糊物元多属性决策方法进行了实例分析,证明了方法的实用性,为直觉模糊多属性群决策提供了一种新的思路。

关键词:直觉模糊物元;权重信息未知;多属性决策
中图分类号:C93 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2017)05-150-07

Intuitionistic fuzzy matter-element and its application in multi-attribute group decision-making with unknown weight

ZHANG Yangming[1], *CHEN Yunxiang*[1], *XIANG Huachun*[1], *ZHAO Zhining*[2], *LIU Nian*[3]
(1. Equipment Management & Safety Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China;
2. Joint War College, National Defense University, Shijiazhuang 050000, China; 3. The PLA Unit 94188, Xi'an 710051, China)

Abstract: The intuitionistic fuzzy matter-element model with intuitionistic fuzzy decision information was proposed for the traditional matter-element theory which cannot be applied in intuitionstic fuzzy decision-making. It presented relative similarity to replace the traditional correlation function and then integrally described intuitionistic fuzzy matter-element multi-attribute decision-making method and its steps. An example was used to show the effectiveness of this method, especially it analyzed the multi-attribute group decision-making problem with unknown weight by using the projection method and intuitionistic fuzzy entropy to prove the practicability of this method. It is proved that the method presented here can offer a new approach to solve intuitionistic fuzzy multi-attribute group decision-making problems.

Key words: intuitionistic fuzzy matter-element; unknown weight; multi-attribute group decision-making

物元理论是由我国学者蔡文在1983年提出并创立的,物元理论研究的是事物的质与量之间的内在联系及变化规律,能够从定性和定量两个角度来客观地描述事物所处的状态。物元理论现在已经广泛应用于人工智能、控制与检测、经济与管理等各个领域,与层次分析法、灰色关联分析、模糊综合评判等决策方法相比,物元分析的方法能够通过定量的计算看出各评价因子及方案之间的细微差别[1-4],具有更高的精确度。但是随着决策过程中决策信息不确定性、不完全性等问题的不断涌现,物元理论亟须进一步地丰富和发展,以应对不确定多属性决策问题的出现。特别是近年来随着直觉模糊理论研究的深入进行,决策信息为直觉模糊数的多属性决策问题层出不穷[5-13],其中文献[5]利用直觉模糊得分函数和精确函数概念构造改进的直觉模糊得分函数;文献[6]利用直觉模糊灰色关联方法比较事物间灰色关联系数;文献[7]利用直觉模糊折中理想解法(Vlse-Kriterijumska Optimizacija I Kompromisno Resenje, VIKOR)法分别比较群体效用值、个体遗憾值和折衷决策值大小;文献[8]利用直觉模糊证据理论比较直觉模糊mass函数的大小;文献[13]利用直觉模糊逼近理想解法(Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution, TOPSIS)法比较理想距离等来解决此类直觉模糊决策问题。但讨论直觉模糊物元分析方法的论述却未见报道,这说明物元理论在直觉模糊集范畴还有待研究。基于此,本文从传统物元理论和直

* **收稿日期**:2016-03-21;
基金项目:"十二五"国防研究基金资助项目(513300102)
作者简介:张洋铭(1988—),男,山东烟台人,博士研究生,E-mial:352186390@qq.com;
陈云翔(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mial:cyx87793@163.com

觉模糊理论入手,挖掘二者的共通之处,探讨直觉模糊物元模型的构建以及直觉模糊物元多属性决策的方法步骤,并对一种较为烦琐的权重信息未知直觉模糊物元多属性群决策问题进行研究分析,通过实例阐释直觉模糊物元多属性决策方法的有效性和实用性。

1　物元分析理论简介

物元分析主要是根据事物关于特征的量值来判断事物属于集合的程度,并用关联函数的大小来衡量元素和集合的关系[2-4]。首先要确定待评物元矩阵,即由事物名称 M、关于特征 C 的量值 v 组成的物元 $\boldsymbol{R}=(N,C,v)$,如果事物有 n 个特征,记作 C_1,$C_2,\cdots,C_n$,相应量记作 $v_1,v_2,\cdots,v_n$,则物元记为:

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} N, & c_1, & v_1 \\ & c_2, & v_2 \\ & \vdots & \vdots \\ & c_n & v_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

然后确定经典域

$$\boldsymbol{R}_j=(N_j,C_i,x_{ji})=\begin{bmatrix} N_j, & c_1, & x_{j1} \\ & c_2, & x_{j2} \\ & \vdots & \vdots \\ & c_n & x_{jn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} N_j, & c_1, & [a_{j1},b_{j1}] \\ & c_2, & [a_{j2},b_{j2}] \\ & \vdots & \vdots \\ & c_n, & [a_{jn},b_{jn}] \end{bmatrix} \tag{2}$$

式中,N_j 表示所划分的 j 个效果等级 $j=(1,2,\cdots,g)$,C_i 表示效果等级 N_j 的特征,X_{ji} 分别为 N_j 关于 C_i 所规定的量值范围。

随后确定节域

$$\boldsymbol{R}_p=(P,C_i,x_{pi})=\begin{bmatrix} P, & c_1, & x_{p1} \\ & c_2, & x_{p2} \\ & \vdots & \vdots \\ & c_n & x_{pn} \end{bmatrix}$$

$$=P\begin{bmatrix} N_j, & c_1, & [a_{p1},b_{p1}] \\ & c_2, & [a_{p2},b_{p2}] \\ & \vdots & \vdots \\ & c_n, & [a_{pn},b_{pn}] \end{bmatrix} \tag{3}$$

式中,P 表示效果等级的全体,X_{pi} 为 P 关于 C_i 所取的量值范围。对于评价对象而言就可以用物元 $\boldsymbol{R}=(P_0,c_i,x_i)$ 表示,其中 x_i 为 P_0 关于 c_i 的量值,即具体所测数据。

之后通过计算第 i 个指标数值域属于第 j 个等级的关联度函数来进行综合评定,即

$$K_j(x_i)=\begin{cases}\rho(x_i,x_{ji})/[\rho(x_i,x_{pi})-\rho(x_i,x_{ji})], x_i\in x_{ji} \\ -\rho(x_i,x_{ji})/|x_{ji}|, x_i\notin x_{ji}\end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\begin{cases}\rho(x_i,x_{ji})=\left|x_i-\dfrac{a_{ji}+b_{ji}}{2}\right|-\dfrac{1}{2}(b_{ji}-a_{ji}) \\ \rho(x_i,x_{pi})=\left|x_i-\dfrac{a_{pi}+b_{pi}}{2}\right|-\dfrac{1}{2}(b_{pi}-a_{pi})\end{cases} \tag{5}$$

则关联度 $K_j(P_0)=\sum_{i=1}^{n}w_{ij}K_j(x_i)$,根据选取最大 K_j 来评定等级。

2　直觉模糊集理论简介

直觉模糊集(Intuitionistic Fuzzy Sets,IFS)是对 Zadeh 模糊集的一种扩充和发展,Zadeh 模糊集是直觉模糊集的特殊情形[5],直觉模糊集的一般定义如下:

定义 1　设 X 为一给定的论域,则 X 上的一个直觉模糊集定义为:

$$\tilde{A}=\{<x,\mu_{\tilde{A}}(x),\nu_{\tilde{A}}(x)>|x\in X\}$$

式中,$\mu_{\tilde{A}}(x):X\to[0,1]$ 和 $\nu_{\tilde{A}}(x):X\to[0,1]$ 分别代表 $\tilde{A}$ 的隶属函数和非隶属度函数,且对于 $\tilde{A}$ 上的所有 $x\in X,0\leqslant\mu_{\tilde{A}}(x)+\nu_{\tilde{A}}(x)\leqslant 1$ 成立,将 $\pi_{\tilde{A}}$ 称作 $\tilde{A}$ 中元素 x 的犹豫度。

定义 2　若 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 是论域 X 上的 2 个直觉模糊集,$\lambda>0$ 是任意实数,直觉模糊集的基本运算法则如下。

直觉模糊集的和:

$$\tilde{A}+\tilde{B}=\{<x,\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_B(x)-\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_B(x),\ \nu_{\tilde{A}}(x)\nu_B(x)>|x\in X\} \tag{6}$$

直觉模糊集的数乘:

$$\lambda\tilde{A}=\{<x,1-(1-\mu_{\tilde{A}}(x))^{\lambda},\nu_{\tilde{A}}(x)^{\lambda}>|x\in X\} \tag{7}$$

直觉模糊集的模:

$$|\tilde{A}|=\sqrt{(\mu_{\tilde{A}}(x))^2+(\nu_{\tilde{A}}(x))^2+(\pi_{\tilde{A}}(x))^2} \tag{8}$$

定义 3　直觉模糊相似度是反映 2 个直觉模糊集之间接近程度的量对于有限型论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上任意直觉模糊集 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$,其欧几里得相似度[6]为:

$$s_2(\tilde{A},\tilde{B})=1-\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}[(\mu_{\tilde{A}}(x_j)-\mu_B(x_j))^2+(\nu_{\tilde{A}}(x_j)-\nu_B(x_j))^2+(\pi_{\tilde{A}}(x_j)-\pi_B(x_j))^2]} \tag{9}$$

直觉模糊相似度的对偶概念为直觉模糊距离,即:

$$d_2(\tilde{A},\tilde{B}) = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}[(\mu_{\tilde{A}}(x_j)-\mu_{\tilde{B}}(x_j))^2+(\nu_{\tilde{A}}(x_j)-\nu_{\tilde{B}}(x_j))^2+(\pi_{\tilde{A}}(x_j)-\pi_{\tilde{B}}(x_j))^2]} \quad (10)$$

如果不同元素具有不同的权重,则需要使用加权直觉模糊相似度和加权直觉模糊距离。

定义 4 表征直觉模糊集模糊程度的直觉模糊熵[7]为:

$$E_{\tilde{A}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-|\mu_{\tilde{A}}(x_i)-\nu_{\tilde{A}}(x_i)|+\pi_{\tilde{A}}(x_i)}{1+|\mu_{\tilde{A}}(x_i)-\nu_{\tilde{A}}(x_i)|+\pi_{\tilde{A}}(x_i)} \quad (11)$$

定义 5 为研究直觉模糊群决策问题,需要对决策群体的决策信息进行集结,基本的直觉模糊集集结算子有:

直觉模糊集加权集结算子 *IFWA*:

$$IFWA(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\cdots\tilde{A}_n) = \langle 1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_j)^{\lambda_j},\prod_{j=1}^{n}\upsilon_j^{\lambda_j}\rangle \quad (12)$$

其中,μ_j 是隶属度值,υ_j 是非隶属度值,$\boldsymbol{\lambda}_j(j=1,2,\cdots,n)$是决策者的权重向量。

3 直觉模糊物元多属性决策模型

3.1 待评直觉模糊物元

当物元分析的决策信息是直觉模糊数时,根据物元分析的方法步骤,首先确定直觉模糊物元。直觉模糊物元也是由事物、特征和量值三要素组成,假设事物 M 有 n 个特征 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 及相应的量值 $x_{ij}=\langle\mu_{ij},\upsilon_{ij}\rangle(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则这 M 个事物的 n 维直觉模糊物元为:

$$\boldsymbol{R}_{mn}=\begin{bmatrix} & C_1 & \cdots & C_n \\ M_1 & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_m & x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & C_1 & \cdots & C_n \\ M_1 & \langle\mu_{11},\upsilon_{11}\rangle & \cdots & \langle\mu_{1n},\upsilon_{1n}\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_m & \langle\mu_{m1},\upsilon_{m1}\rangle & \cdots & \langle\mu_{mn},\upsilon_{mn}\rangle \end{bmatrix} \quad (13)$$

3.2 理想直觉模糊物元

根据物元理论中关联函数的意义,即 K 表示待评事物与标准事物之间的关联系数,但是由文献[11-12]可知,待评事物与标准事物关联系数大并不一定意味着距离非标准事物距离远,因此需要另一种关联测度——相对相似度,即可以构建正理想直觉模糊物元和负理想直觉模糊物元,利用待评直觉模糊物元与正负理想直觉模糊物元的相对相似度代替传统方法中的关联函数进行决策。那么正理想直觉模糊物元即为:

$$\boldsymbol{R}^+=\begin{bmatrix} & C_1 & \cdots & C_n \\ M_1 & \langle\mu_{11}^+,\upsilon_{11}^+\rangle & \cdots & \langle\mu_{1n}^+,\upsilon_{1n}^+\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_m & \langle\mu_{m1}^+,\upsilon_{m1}^+\rangle & \cdots & \langle\mu_{mn}^+,\upsilon_{mn}^+\rangle \end{bmatrix} \quad (14)$$

负理想直觉模糊物元即为:

$$\boldsymbol{R}^-=\begin{bmatrix} & C_1 & \cdots & C_n \\ M_1 & \langle\mu_{11}^-,\upsilon_{11}^-\rangle & \cdots & \langle\mu_{1n}^-,\upsilon_{1n}^-\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_m & \langle\mu_{m1}^-,\upsilon_{m1}^-\rangle & \cdots & \langle\mu_{mn}^-,\upsilon_{mn}^-\rangle \end{bmatrix} \quad (15)$$

但是实质上根据传统物元分析理论中"物元整体"思想和所谓"域"的设置理念,在直觉模糊集范畴中正负理想物元的节域区间,即$[\mu^-,\mu^+]$和$[\upsilon^-,\upsilon^+]$也应该由决策者统一确定并给出,而不同于传统直觉模糊 TOPSIS 决策中根据不同指标任意确定正负理想值区间。

3.3 相对相似度

待评直觉模糊物元与正理想直觉模糊物元之间的相似度为:

$$s_i(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^+) = 1-\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}w_j[(\mu_{ij}-\mu_{ij}^+)^2+(\nu_{ij}-\nu_{ij}^+)^2+(\pi_{ij}-\pi_{ij}^+)^2]} \quad (16)$$

待评直觉模糊物元与负理想直觉模糊物元之间的相似度为:

$$s_i(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^-) = 1-\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}w_j[(\mu_{ij}-\mu_{ij}^-)^2+(\nu_{ij}-\nu_{ij}^-)^2+(\pi_{ij}-\pi_{ij}^-)^2]} \quad (17)$$

其中,w_j 为属性权重,则第 i 个事物的相对相似度为:

$$C'_i=\frac{s_i(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^+)}{s_i(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^+)+s_i(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^-)} \quad (18)$$

通过比较 C_i 的大小进行事物或方案决策。

3.4 直觉模糊物元多属性决策步骤

步骤 1:首先确定待评直觉模糊物元。

步骤 2:确定决策信息。个体决策者只需收集其对多个属性的直觉模糊信息,群体决策则需

要利用信息集结算子对决策者的决策信息进行集结,决策群体权重未知的情况下还需要确定决策者权重。

步骤 3:根据决策信息确定正负理想直觉模糊物元。

步骤 4:根据已知属性权重计算各个方案的相对相似度,属性权重未知的情况下要利用决策信息确定属性权重。

步骤 5:比较相对相似度进行方案决策。直觉模糊物元决策的步骤如图 1 所示。

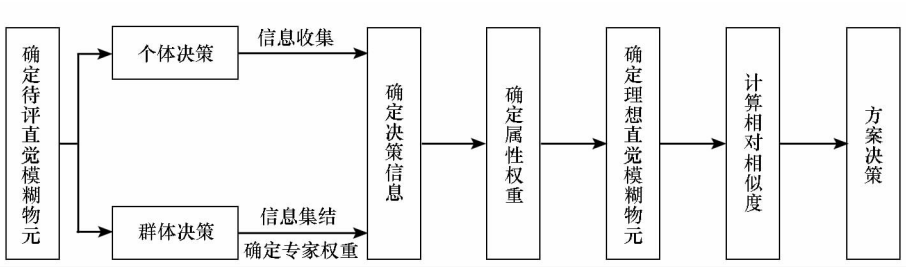


图 1　直觉模糊物元多属性决策步骤

Fig. 1　Steps of intuitionistic fuzzy matter-element decision-making

3.5　实例验证

采用本文提出的直觉模糊物元多属性决策方法对文献[13]中的白酒质量评价问题进行评估决策,其中专家权重和属性权重为:

$\lambda=(0.3,0.3,0.4)$ 和 $w=(0.1,0.25,0.50,0.15)$,首先确定待评直觉模糊物元为:

$$\boldsymbol{R}_{34}=\begin{bmatrix} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ M_1 & \langle\mu_{11},v_{11}\rangle & \langle\mu_{12},v_{12}\rangle & \langle\mu_{13},v_{13}\rangle & \langle\mu_{14},v_{14}\rangle \\ M_2 & \langle\mu_{21},v_{21}\rangle & \langle\mu_{22},v_{22}\rangle & \langle\mu_{23},v_{23}\rangle & \langle\mu_{24},v_{24}\rangle \\ M_3 & \langle\mu_{31},v_{31}\rangle & \langle\mu_{32},v_{32}\rangle & \langle\mu_{33},v_{33}\rangle & \langle\mu_{34},v_{34}\rangle \end{bmatrix}$$

决策信息采用 *IFWA* 算子集结后的决策矩阵为:

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} \langle 0.068\,2,0.901\,9\rangle & \langle 0.174\,4,0.631\,5\rangle & \langle 0.521\,2,0.316\,6\rangle & \langle 0.140\,7,0.830\,0\rangle \\ \langle 0.116\,8,0.851\,5\rangle & \langle 0.208\,8,0.669\,0\rangle & \langle 0.323\,1,0.355\,3\rangle & \langle 0.085\,2,0.842\,0\rangle \\ \langle 0.089\,4,0.854\,8\rangle & \langle 0.308\,0,0.631\,5\rangle & \langle 0.297\,4,0.557\,8\rangle & \langle 0.075\,0,0.759\,0\rangle \end{bmatrix}$$

由此根据原文选取理想直觉模糊物元为:

$$\boldsymbol{R}_{34}^{+}=\begin{bmatrix} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ M_1 & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle \\ M_2 & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle \\ M_3 & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{34}^{-}=\begin{bmatrix} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ M_1 & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle \\ M_2 & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle \\ M_3 & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle \end{bmatrix}$$

根据式(16)和式(17)分别计算正负相似度得:$s_1(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^+)=0.926\,1$,$s_1(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^-)=0.832\,5$,$s_2(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^+)=0.861\,4$,$s_2(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^-)=0.862\,9$,$s_3(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^+)=0.833\,1$,$s_3(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^-)=0.931\,0$。

由此得到各白酒方案的相对相似度为:

$$\begin{cases} C'_1=0.526\,6 \\ C'_2=0.499\,5 \\ C'_3=0.472\,3 \end{cases}$$

可见白酒 1 的质量最好,白酒 2 次之,白酒 3 质量最差,该结果与文献[13]的结果吻合,说明本文提出的直觉模糊物元决策模型有效,可以在多属性决策中进行实际应用。同时,与原来的传统方法(传统贴近度结果为 $C_1=0.693\,8$,$C_2=0.497\,1$,$C_3=0.292\,5$)相比,直觉模糊物元分析方法不依赖于人为改变不同决策因子的正负理想物元大小,且算法结果能够定量地反映出事物之间的细微差别,体现出物元分析理论的优势。

4　权重未知的直觉模糊物元多属性群决策

前面已经提出了直觉模糊物元多属性决策模型,对于个体决策者,只需要收集其对各属性指标的直觉模糊决策信息,便可以按照图 1 所示的直觉模糊物元多属性决策步骤进行方案决策。但是对于群体决策而言,不仅涉及决策信息的集结问题,而且往往出现决策专家权重未知,同时属性权重未知的情况,下面就对这样一类权重信息未知的直觉模糊物元多属性群决策问题进行研究。

4.1　基于投影法的专家权重确定和信息集结

假设某一多属性决策问题中 $d=\{d_1,d_2,d_3,\cdots,d_k\}$ 为群体决策者集合,$\boldsymbol{D}=\{D_1,D_2,$

$D_3,\cdots,D_k\}$ 为第 k 个决策者的决策矩阵，其中决策者的权重为 $\lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_k\}$，$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 为属性集，$M=\{M_1,M_2,\cdots,M_m\}$ 为方案集，属性权重为 $w=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$，其中 K 为决策者个数，m 为方案个数，n 为属性指标个数。分析文献[11－16]中对专家权重问题的阐释发现，在属性权重未知的情况下想要准确确定专家权重的值非常困难，因此本文从侧面入手，利用投影法[17]确定第 k 个专家针对方案 M_i 关于属性 C_j 的专家权重 λ_{ij}^k，来集结 k 个专家的决策信息，最终形成综合决策矩阵。直觉模糊集的投影表示为：

$$P_{rj_BA}=\frac{\sum_i^m(\mu_{ai}\mu_{\beta i}+\upsilon_{ai}\upsilon_{\beta i}+\pi_{ai}\pi_{\beta i})}{|B|} \tag{19}$$

其中，αi、βi 分别为直觉模糊集 A、B 的分量，投影越大，A、B 越接近，对于同一方案的同一属性而言，专家的决策信息越接近各专家的平均值说明越能得到大家的支持，越应该赋予更大的权重，因此对 k 个专家提出的决策矩阵求平均决策矩阵：

$$\bar{\boldsymbol{D}}=(\langle\bar{\mu}_{ij},\bar{\upsilon}_{ij}\rangle)_{m\times n} \tag{20}$$

其中，$\bar{\mu}_{ij}=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^K\mu_{ij}^k$，$\bar{\upsilon}_{ij}=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^K\upsilon_{ij}^k$。

则由式(19)得到第 k 个专家评判的第 i 个方案的第 j 个属性对专家平均决策信息的投影为：

$$P_{rj_{\langle\bar{\mu}_{ij},\bar{\upsilon}_{ij}\rangle\langle\mu_{ij}^k,\upsilon_{ij}^k\rangle}}=\frac{\mu_{ij}^k\bar{\mu}_{ij}+\upsilon_{ij}^k\bar{\upsilon}_{ij}+\pi_{ij}^k\bar{\pi}_{ij}}{|\langle\bar{\mu}_{ij},\bar{\upsilon}_{ij}\rangle|} \tag{21}$$

则：

$$\lambda_{ij}^k=\frac{P_{rj_{\langle\bar{\mu}_{ij},\bar{\upsilon}_{ij}\rangle\langle\mu_{ij}^k,\upsilon_{ij}^k\rangle}}}{\sum_{k=1}^K P_{rj_{\langle\bar{\mu}_{ij},\bar{\upsilon}_{ij}\rangle\langle\mu_{ij}^k,\upsilon_{ij}^k\rangle}}} \tag{22}$$

在得到所有的专家针对某一方案和某一属性的权重之后就可以依次集结得到综合决策矩阵：

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}I_{11}&I_{12}&\cdots&I_{1n}\\I_{21}&I_{22}&\cdots&I_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\I_{m1}&I_{m2}&\cdots&I_{mn}\end{bmatrix} \tag{23}$$

其中，$I_{ij}=\sum_{k=1}^K\lambda_{ij}^k\langle\mu_{ij}^k,\upsilon_{ij}^k\rangle$。

4.2 基于直觉模糊熵的属性权重确定方法

利用 4.1 节介绍的专家权重确定方法可以集结决策信息得到综合决策矩阵 $\boldsymbol{I}$，由式(11)可以计算得到综合决策矩阵的熵矩阵 $\boldsymbol{E}_I$[18－20]，归一化得到：

$$\boldsymbol{E}_I=\begin{bmatrix}\bar{E}_{11}&\bar{E}_{12}&\cdots&\bar{E}_{1n}\\\bar{E}_{21}&\bar{E}_{22}&\cdots&\bar{E}_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\bar{E}_{m1}&\bar{E}_{m2}&\cdots&\bar{E}_{mn}\end{bmatrix} \tag{24}$$

其中，$\bar{E}_{ij}=\frac{E_{ij}}{\max\{E_{1j},E_{2j},\cdots,E_{mj}\}}$。

随后计算属性权重为：

$$w_j=\frac{1-\theta_j}{n-Z} \tag{25}$$

其中，$\theta_j=\sum_{i=1}^m\bar{E}_{ij}$，$Z=\sum_{t=1}^n\theta_t$。

确定了专家权重和属性权重后，再按照图 1 所示步骤进行决策，就可以解决这类权重信息未知的直觉模糊物元多属性决策问题。

4.3 权重信息未知的直觉模糊物元多属性群决策实例分析

假设某多机种综合保障机场要实施飞行保障工作，为圆满完成任务，保障部门制定了 M_1、M_2、M_3 三个保障预案，特邀请来自上级机关、基层保障分队和科研院所的甲、乙、丙三位专家对保障预案进行评估决策，其中主要考虑了影响保障成功率的 C_1、C_2、C_3、C_4 四个指标因素，三位专家的决策信息 $\boldsymbol{D}_1$，$\boldsymbol{D}_2$，$\boldsymbol{D}_3$ 如下所示。由于上级要求，权重信息不便明确给出，现采用直觉模糊物元多属性决策来进行保障预案的评估决策。

首先，根据直觉模糊物元所属性决策方法步骤可以确定该决策问题的待评直觉模糊物元 $\boldsymbol{R}$，其结果如下所示。

然后由式(20)计算专家平均决策矩阵 $\bar{\boldsymbol{D}}$，其结果如下所示。

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{bmatrix}\langle0.650\,0,0.240\,0\rangle&\langle0.150\,0,0.660\,0\rangle&\langle0.570\,0,0.350\,0\rangle&\langle0.100\,0,0.870\,0\rangle\\\langle0.100\,0,0.800\,0\rangle&\langle0.200\,0,0.600\,0\rangle&\langle0.380\,0,0.390\,0\rangle&\langle0.200\,0,0.720\,0\rangle\\\langle0.500\,0,0.400\,0\rangle&\langle0.300\,0,0.600\,0\rangle&\langle0.200\,0,0.500\,0\rangle&\langle0.180\,0,0.770\,0\rangle\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_2=\begin{bmatrix}\langle0.520\,0,0.270\,0\rangle&\langle0.220\,0,0.720\,0\rangle&\langle0.610\,0,0.310\,0\rangle&\langle0.290\,0,0.680\,0\rangle\\\langle0.310\,0,0.600\,0\rangle&\langle0.260\,0,0.670\,0\rangle&\langle0.320\,0,0.350\,0\rangle&\langle0.530\,0,0.440\,0\rangle\\\langle0.390\,0,0.540\,0\rangle&\langle0.800\,0,0.100\,0\rangle&\langle0.720\,0,0.260\,0\rangle&\langle0.180\,0,0.750\,0\rangle\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_3=\begin{bmatrix}\langle0.460\,0,0.510\,0\rangle&\langle0.180\,0,0.650\,0\rangle&\langle0.530\,0,0.330\,0\rangle&\langle0.140\,0,0.830\,0\rangle\\\langle0.160\,0,0.810\,0\rangle&\langle0.230\,0,0.660\,0\rangle&\langle0.350\,0,0.590\,0\rangle&\langle0.170\,0,0.760\,0\rangle\\\langle0.430\,0,0.550\,0\rangle&\langle0.410\,0,0.390\,0\rangle&\langle0.370\,0,0.550\,0\rangle&\langle0.100\,0,0.780\,0\rangle\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ M_1 & \langle\mu_{11},\upsilon_{11}\rangle & \langle\mu_{12},\upsilon_{12}\rangle & \langle\mu_{13},\upsilon_{13}\rangle & \langle\mu_{14},\upsilon_{14}\rangle \\ M_2 & \langle\mu_{21},\upsilon_{21}\rangle & \langle\mu_{22},\upsilon_{22}\rangle & \langle\mu_{23},\upsilon_{23}\rangle & \langle\mu_{24},\upsilon_{24}\rangle \\ M_3 & \langle\mu_{31},\upsilon_{31}\rangle & \langle\mu_{32},\upsilon_{32}\rangle & \langle\mu_{33},\upsilon_{33}\rangle & \langle\mu_{34},\upsilon_{34}\rangle \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{D}}=\begin{bmatrix} \langle 0.543\ 3,0.340\ 0\rangle & \langle 0.183\ 3,0.676\ 7\rangle & \langle 0.570\ 0,0.330\ 0\rangle & \langle 0.176\ 7,0.793\ 3\rangle \\ \langle 0.190\ 0,0.736\ 7\rangle & \langle 0.230\ 0,0.643\ 3\rangle & \langle 0.350\ 0,0.443\ 3\rangle & \langle 0.300\ 0,0.640\ 0\rangle \\ \langle 0.440\ 0,0.496\ 7\rangle & \langle 0.503\ 3,0.363\ 3\rangle & \langle 0.430\ 0,0.436\ 7\rangle & \langle 0.153\ 3,0.766\ 7\rangle \end{bmatrix}$$

根据式(21)可以得到投影矩阵为:

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix} 0.687\ 1 & 0.700\ 4 & 0.673\ 1 & 0.871\ 4 \\ 0.805\ 5 & 0.658\ 2 & 0.587\ 6 & 0.740\ 9 \\ 0.637\ 6 & 0.602\ 2 & 0.549\ 0 & 0.791\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix} 0.612\ 2 & 0.749\ 7 & 0.687\ 5 & 0.727\ 4 \\ 0.664\ 0 & 0.719\ 1 & 0.557\ 6 & 0.623\ 7 \\ 0.666\ 5 & 0.712\ 4 & 0.678\ 9 & 0.773\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix} 0.655\ 2 & 0.694\ 7 & 0.638\ 0 & 0.841\ 1 \\ 0.823\ 4 & 0.707\ 2 & 0.659\ 2 & 0.763\ 5 \\ 0.695\ 6 & 0.590\ 2 & 0.653\ 6 & 0.792\ 6 \end{bmatrix}$$

由式(22)可以得到 i 方案、j 属性的专家权重为:

$$\boldsymbol{\lambda}_1=\begin{bmatrix} 0.351\ 5 & 0.326\ 6 & 0.336\ 8 & 0.357\ 2 \\ 0.351\ 3 & 0.315\ 7 & 0.325\ 7 & 0.348\ 2 \\ 0.318\ 9 & 0.316\ 1 & 0.291\ 8 & 0.335\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_2=\begin{bmatrix} 0.313\ 2 & 0.349\ 5 & 0.344\ 0 & 0.298\ 1 \\ 0.289\ 6 & 0.345\ 0 & 0.309\ 0 & 0.293\ 1 \\ 0.333\ 3 & 0.374\ 0 & 0.360\ 8 & 0.328\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_3=\begin{bmatrix} 0.335\ 2 & 0.323\ 9 & 0.319\ 2 & 0.344\ 7 \\ 0.359\ 1 & 0.339\ 3 & 0.365\ 3 & 0.358\ 8 \\ 0.347\ 8 & 0.309\ 9 & 0.347\ 4 & 0.336\ 2 \end{bmatrix}$$

由式(23)可以集结得到综合决策矩阵为:

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} \langle 0.554\ 3,0.253\ 5\rangle & \langle 0.202\ 8,0.718\ 9\rangle & \langle 0.611\ 6,0.331\ 2\rangle & \langle 0.208\ 6,0.716\ 2\rangle \\ \langle 0.214\ 7,0.628\ 6\rangle & \langle 0.242\ 5,0.651\ 7\rangle & \langle 0.321\ 5,0.343\ 3\rangle & \langle 0.380\ 3,0.508\ 6\rangle \\ \langle 0.419\ 4,0.487\ 5\rangle & \langle 0.693\ 3,0.264\ 5\rangle & \langle 0.577\ 9,0.333\ 5\rangle & \langle 0.178\ 6,0.750\ 7\rangle \end{bmatrix}$$

根据 4.2 节中计算最终可得属性权重为:

$w=(0.338\ 0,0.081\ 4,0.419\ 2,0.161\ 4)$

根据综合决策矩阵并结合专家意见,确定正负直觉模糊理想物元为:

$$\boldsymbol{R}^{+}=\begin{bmatrix} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ M_1 & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle \\ M_2 & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle \\ M_3 & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^{-}=\begin{bmatrix} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ M_1 & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle \\ M_2 & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle \\ M_3 & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,1\rangle \end{bmatrix}$$

根据式(16)~(18)可以解得相对相似度为:$C'_1=0.504\ 3$,$C'_2=0.474\ 7$,$C'_3=0.501\ 2$。

所以 $C'_1>C'_3>C'_2$,应该选择保障方案 M_1。同时,如果采用传统 TOPSIS 算法步骤,根据各个决策指标信息最大、最小值设定其相应的理想解大小,其结果为 $C_1=0.641\ 5$,$C_2=0.232\ 4$,$C_3=0.411\ 5$,虽然最终决策结果一致,但是并不能真正看清各个决策因子与方案之间的细微差别,在精确度要求上没有直觉模糊物元决策方法高。

5　结论

本文对决策信息为直觉模糊集的物元决策理论进行了深入分析,构建了直觉模糊物元,提出了一种直觉模糊物元多属性决策方法,与直觉模糊 TOPSIS 等直觉模糊决策方法相比,直觉模糊物元多属性决策方法利用"相对相似度"代替传统"贴近度"和"相似度",决策过程更加合理,且通过物元分析算法可以使得决策结果更加精确,更能反映出物元理论的核心,即定量地得到各决策因子与事物之间的细微差别。通过对该方法进行实例验证,证明了方法的有效性。在对权重未知直觉模糊物元多属性群决策进行研究的过程中,运用投影法和直觉模糊熵法解决了权重信息问题,通过实例运用,验证了所提方法的实用性,该方法丰富了物元分析理论并能够为直觉模糊多属性决策提供一种新的思路。

参考文献(References)

[1] 李玲玲, 刘敬杰, 凌跃胜, 等. 物元理论和证据理论相结合的电能质量综合评估[J]. 电工技术学报, 2015, 30(12): 383-391.
LI Lingling, LIU Jingjie, LING Yuesheng, et al. Power quality comprehensive evaluation based on matter-element theory and evidence theory [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2015, 30(12): 383-391. (in Chinese)

[2] 王小宁, 安实, 张德军, 等. 基于物元分析的立交方案综合评价方法[J]. 武汉理工大学学报:交通科学与工程版, 2009, 33(2): 207-210.

WANG Xiaoning, AN Shi, ZHANG Dejun, et al. Interchange project synthesis evaluation method based on the matter-element analysis [J]. Journal of Wuhan University of Technology: Transportation Science & Engineering, 2009, 33(2): 207 – 210. (in Chinese)

[3] 周晓光. 基于熵权的模糊物元决策[J]. 系统管理学报, 2009, 18(4): 454 – 458.
ZHOU Xiaoguang. Research on method of vague matter-element decision making based on entropy weight [J]. Journal of Systems & Management, 2009, 18(4): 454 – 458. (in Chinese)

[4] 李博, 庄弘炜, 赵法栋, 等. 模糊物元分析在军事装备退役决策中的应用[J]. 火力与指挥控制, 2014, 39(6): 167 – 169, 173.
LI Bo, ZHUANG Hongwei, ZHAO Fadong, et al. Application of fuzzy matter-element theory on retirement decisions of military equipment [J]. Fire Control & Command Control, 2014, 39(6): 167 – 169, 173. (in Chinese)

[5] 吴冲, 刘千, 万翔宇. 基于改进得分函数的直觉模糊多属性决策方法[J]. 统计与信息论坛, 2014, 29(1): 3 – 8.
WU Chong, LIU Qian, WAN Xiangyu. Intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making approach based on prospect score function [J]. Statistics & Information Forum, 2014, 29(1): 3 – 8. (in Chinese)

[6] 李小林, 张力娜. 基于灰色关联分析的直觉模糊集多属性Web服务选择[J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 2015, 43(6): 152 – 157.
LI Xiaolin, ZHANG Lina. Intuitionistic fuzzy multiple attribute Web service selection based on grey correlation analysis[J]. Journal of Henan Normal University: Natural Science Edition, 2015, 43(6): 152 – 157. (in Chinese)

[7] 杨山亮, 王鹏, 李革, 等. 基于直觉模糊VIKOR方法的装备优选群决策模型[J]. 系统仿真学报, 2015, 27(9): 2169 – 2175.
YANG Shanliang, WANG Peng, LI Ge, et al. Group decision making for weapon selection using extended VIKOR method under intuitionistic fuzzy environment [J]. Journal of System Simulation, 2015, 27(9): 2169 – 2175. (in Chinese)

[8] 江红莉, 何建敏, 庄亚明, 等. 基于直觉模糊集和证据理论的群决策方法[J]. 控制与决策, 2012, 27(5): 752 – 756.
JIANG Hongli, HE Jianmin, ZHUANG Yaming, et al. Approach to group decision making based on intuitionistic fuzzy sets and evidence theory [J]. Control and Decision, 2012, 27(5): 752 – 756. (in Chinese)

[9] Abbas S E. On intuitionistic fuzzy compactness [J]. Information Sciences, 2005, 173(1/2/3): 75 – 91.

[10] 王文川, 程春田, 邱琳. 基于综合权重的理想模糊物元多属性决策法及应用[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(3): 126 – 129.
WANG Wenchuan, CHENG Chuntian, QIU Lin. Ideal fuzzy matter-element multi-attribute decision-making method based on synthetic weight and its application [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39(3): 126 – 129. (in Chinese)

[11] 马荣国, 杨森林, 李铁强. 基于理想解法的偏好物元评价决策方法[J]. 交通运输工程学报, 2004, 4(4): 76 – 80.
MA Rongguo, YANG Shenlin, LI Tieqiang. Evaluation and decision making method of preference matter element based on TOPSIS [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2004, 4(4): 76 – 80. (in Chinese)

[12] 徐泽水. 直觉模糊信息集成理论及应用[M]. 北京:科学出版社, 2008: 208.
XU Zeshui. Intuitionistic fuzzy information aggregation theory and application [M]. Beijing: Science Press, 2008: 208. (in Chinese)

[13] 唐润, 王海燕. 基于直觉模糊 – TOPSIS 群决策方法的白酒质量评价[J]. 系统工程, 2012, 30(8): 97 – 100.
TANG Run, WANG Haiyan. Liquor quality evaluation based on intuitionistic fuzzy-TOPSIS group decision method [J]. Systems Engineering, 2012, 30(8): 97 – 100. (in Chinese)

[14] 刘培德, 王娅资. 一种属性权重未知的区间概率风险型混合多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2012, 27(2): 276 – 280.
LIU Peide, WANG Yazi. Method of hybrid multi-attribute decision-making with risk of interval probability under attribute weight unknown [J]. Control and Decision, 2012, 27(2): 276 – 280. (in Chinese)

[15] 张英俊, 马培军, 苏小红, 等. 属性权重不确定条件下的区间直觉模糊多属性决策[J]. 自动化学报, 2012, 38(2): 220 – 228.
ZHANG Yingjun, MA Peijun, SU Xiaohong, et al. Multi-attribute decision making with uncertain attribute weight information in the framework of interval-valued intuitionistic fuzzy sets [J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(2): 220 – 228. (in Chinese)

[16] 赵萌, 任嵘嵘, 邱菀华. 基于直觉模糊熵的专家权重确定方法及其验证[J]. 控制与决策, 2015, 30(7): 1233 – 1238.
ZHAO Meng, REN Rongrong, QIU Wanhua. Experts' weights method and computational experiment analysis based on intuitionistic fuzzy entropy measures [J]. Control and Decision, 2015, 30(7): 1233 – 1238. (in Chinese)

[17] 曾守桢. 基于直觉模糊信息的综合评价问题研究[D]. 杭州: 浙江工商大学, 2013: 66 – 70.
ZENG Shouzhen. Study on the comprehensive evaluation technology based on intuitionistic fuzzy information [D]. Hangzhou: Zhejiang Gongshang University, 2013: 66 – 70. (in Chinese)

[18] 陈志旺, 陈琳, 杨七, 等. 用区间直觉模糊集方法对属性权重未知的群求解其多属性决策[J]. 控制理论与应用, 2014, 31(8): 1025 – 1033.
CHEN Zhiwang, CHEN Lin, YANG Qi, et al. Interval-valued intuitionistic fuzzy set method for group multi-attribute decision-making with unknown attribute weights [J]. Control Theory & Applications, 2014, 31(8): 1025 – 1033. (in Chinese)

[19] 周伟, 何建敏, 余德建. 直觉模糊群决策中专家权重确定的一种精确方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(5): 716 – 720, 725.
ZHOU Wei, HE Jianmin, YU Dejian. Accurate method of obtaining decision expert weights in intuitionistic fuzzy group decision making [J]. Control and Decision, 2013, 28(5): 717 – 720, 725. (in Chinese)

[20] 巩奕成, 任仲宇, 丁飞, 等. 基于直觉梯形模糊数的灰关联投影寻踪动态聚类[J]. 控制与决策, 2015, 30(7): 1331 – 1339.
GONG Yicheng, REN Zhongyu, DING Fei, et al. Grey relation-projection pursuit dynamic cluster method for multi-attribute decision making assessment with trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers[J]. Control and Decision, 2015, 30(7): 1331 – 1339. (in Chinese)