doi:10.11887/j.cn.201706013　　http://journal.nudt.edu.cn

脉冲激励下船舶结构谐振响应预报及其模态阻尼参数识别*

唐宇航[1,2],陈志坚[1],梅志远[1]
(1. 海军工程大学 舰船工程系,湖北 武汉 430033;2. 海军研究院,北京 100161)

摘　要:从模态识别基本原理出发,对脉冲激励下的时-频域响应、谐振激励下的时域响应的表达式进行推导,找到了其时-频域下的幅值关系,认为一定条件下谐振响应中伴随自由振动成分短时间内难以衰减,指出谐振激励力幅值与脉冲力幅值相等时,脉冲响应频谱对应频率下的幅频与谐振下的强迫振动幅值相等。在建立响应等价关系的基础上,推导了仅通过脉冲响应频谱上有限个谱线信息所确定的某阶模态阻尼比的计算公式。利用船体梁模型验证了响应预报及阻尼比估算的准确性。完成了 2 块不同材料典型船体板单元模型的前 8 阶模态阻尼比测试,通过数值计算结合试验响应频谱验证了方法的快速性、可靠性。

关键词:脉冲激励;谐振激励;响应频谱;模态阻尼比;伴随自由振动;快速预报
中图分类号:TH212;TH213.3　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1001-2486(2017)06-079-09

Ship structure resonance response prediction and modal damping parameter identification under effect of impulse excitation

TANG Yuhang[1,2], *CHEN Zhijian*[1], *MEI Zhiyuan*[1]
(1. Department of Naval Architecture Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China;
2. Naval Research Institute, Beijing 100161, China)

Abstract: Starting from the basic principle of modal identification, and the expressions were derived for time frequency response of the excitation force and time response of resonant excitation, and the relationships among the time-frequency domain amplitudes were found. It was concerned that the associated free vibration in the resonant response is difficult to decay in a short time, and it was pointed out that the amplitude of the impulse frequency response spectrum at corresponding frequency is equal to the amplitude of forced vibration under resonant excitation. Based on establishing relationship of response equivalence, the formula of damping ratio was derived by a limited spectral information of impulse response spectrum. The accuracy of response prediction and damping ratio estimation was verified by ship girder model. In addition, the first eight modal damping ratios' tests of 2 typical ship plate element models of different materials were also completed, and the rapidity and reliability of the method were verified by the numeral calculation binding experimental response frequency spectrum.

Key words: impulse excitation; resonant excitation; response spectrum; modal damping ratio; associated free vibration; fast prediction

对结构进行动态性能测试及响应预报时,激励形式有接触式和非接触式两种。激振器作用产生的接触式激励可以使结构获得持续振动响应,规范对激振器作用下不同激励波形的测试方法进行了规定[1],但操作不当时会存在自由振动衰减不彻底、样本数据泄露严重、共振区数据采集量不够等问题,对频响函数测试以及参数识别造成一定的误差[2]。此外,在结构共振区附近进行持续性激励时,若阻尼较小,结构达到稳态振动时间较长、响应较大,易于对结构造成损伤。

锤击法等脉冲激励较激振器激励操作更简单快捷,便于更换激振位置,是得到频响信息的快速测量方法。钱进国[3]指出了力脉冲、力谱的影响因素,提出了采样频率要求,认为该方法不适用于大阻尼的大型结构或非线性结构试验。脉冲激励响应是自由衰减振动,频响中包含了丰富的模态信息,张永杰等[4]根据稳态能量流法和瞬态衰减法提出了一种基于脉冲激励获取结构内损耗因子的方法。然而实际工程中,脉冲激励信号有时难以直接测量,给阻尼估算带来了困难。为避免测量激励力谱,张文德等[5]用阶跃激励响应自功率谱估算阻尼比,但计算过程比较复杂。此外,传统的半功率带宽法是基于响应频谱求解阻尼比的,时域响应经快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)后只

* **收稿日期**:2016-08-09
基金项目:国家自然科学基金资助项目(51479205)
作者简介:唐宇航(1991—),男,安徽蚌埠人,博士研究生,E-mail:tangyuhang102@163.com;
陈志坚(通信作者),男,教授,硕士,博士生导师,E-mail:chenliu1957@yahoo.com

能得到离散的频响信息,时常难以恰好得到半功率点[6],陈奎孚等[7]分析了线性插值法近似确定半功率点的主要误差及规律。

1 理论背景

1.1 模态参数识别概述

振动系统有线性和非线性之分,线性系统服从模态叠加原理,是模态分析的主要应用范畴,可简化成有限个单自由度模型来分析。多自由度系统响应分析在于确定各模态参数,一般通过试验建立激振与拾振点间的频响函数矩阵来求解。多自由度系统总响应为:

$$\boldsymbol{X} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\boldsymbol{\varphi}_r \boldsymbol{\varphi}_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}}{k_r[(1-\gamma_r^2)+\mathrm{i}(2\zeta_r\gamma_r)]} \tag{1}$$

式中:k_r,ζ_r 和 $\boldsymbol{\varphi}_r$ 分别为第 r 阶模态的刚度、阻尼比和振型;γ_r 为激励频率与固有频率之比。假定只在结构 j 点作用有激振力 F_j,那么

$$\boldsymbol{F} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad F_j \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

任意 i 点的响应为:

$$X_i = \sum_{r=1}^{N} \frac{\varphi_{ir}\varphi_{jr}F_j}{k_r[1-\gamma_r^2+\mathrm{j}2\zeta_r\gamma_r]} \tag{3}$$

按式(3)定义 i,j 间的频响函数 $H_{ij}(\omega)$(也称机械导纳),为在 j 点作用单位力时 i 点的响应,即

$$H_{ij}(\omega) = X_i(\omega)/F_j(\omega) \tag{4}$$

根据线性系统的互易性,有 $H_{ij}=H_{ji}$。试验中 F_j 可以是各种形式的激励力,$H_{ij}(\omega)$ 是线性定常系统的固有特性,与输入函数类型无关[8]。简谐激励时,H_{ij} 是稳态输出与输入的相量之比;瞬态激励时,H_{ij} 是输出与输入的傅里叶变换之比;平稳随机激励时,H_{ij} 是输出和输入的互谱与输入的自谱之比。

根据线性叠加原理,Y_r 为 r 阶模态导纳,$_r\boldsymbol{H}$ 为 r 阶模态对频响函数矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的贡献,即

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\boldsymbol{\varphi}_r \boldsymbol{\varphi}_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}}{k_r[1-\gamma_r^2+\mathrm{j}2\zeta_r\gamma_r]}$$

$$= \sum_{r=1}^{N} Y_r \begin{bmatrix} \varphi_{1r} \\ \varphi_{2r} \\ \vdots \\ \varphi_{Nr} \end{bmatrix} [\varphi_{1r}\ \varphi_{2r}\ \cdots\ \varphi_{Nr}]\boldsymbol{F} = \sum_{r=1}^{N} {}_r\boldsymbol{H}\boldsymbol{F} \tag{5}$$

$\boldsymbol{H}$ 是以 H_{ij} 为元素的对称阵,其任一行(或一列)包含所有模态参数,单点激励单点拾振(或单点激励多点拾振)法参数识别就是基于这一特性。但单点激振法测量时既要避免研究模态的振型节点(或节线),也要注意控制激励力幅,以避免因局部非线性变形引入误差,如遇模态重根时可采用多点激振多点拾振识别模态参数。

1.2 脉冲响应函数及其性质

模态分析中常用的接触式和非接触式激励包括各种激振器和力锤。锤击法产生脉冲激励十分常见,其适用于中、小型和低阻尼结构激励。力锤传递给结构的冲击力几乎为半正弦形,时域冲击脉宽越窄其信号频带越宽,极限情况是脉宽为 0 的 δ 函数,其傅里叶变换为频带无限宽的白谱[9],对于单位脉冲(即 Dirac delta 函数),存在

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega 0}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 \tag{6}$$

对单自由度黏滞阻尼体系作用脉冲力时,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_{脉}(t) = p_0\delta(t) \tag{7}$$

积分求极限得 $\dot{x}(0) = p_0/m$,即系统获得该初速度后做自由振动。

$$x_{脉}(t) = \frac{p_0}{m\omega_d}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t \tag{8}$$

其中:p_0 为脉冲力幅值;m,c,k 分别为体系的质量、阻尼和刚度;ω_n 为固有自由振动频率;$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$,为有阻尼自由振动频率。式(8)为脉冲响应函数,用 $x_{脉}(t)$ 表示,是系统动特性在时域的一种表现形式,包含了所有动特性参数,量纲为位移/冲量。

$x_{脉}(\omega)$ 表示 $x_{脉}(t)$ 的频域变换,对时域信号运用欧拉公式并进行单边傅里叶变换得:

$$x_{脉}(\omega) = f[x_{脉}(t)] = \int_0^{\infty}\left[\frac{p_0\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d}\cdot\frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_d t}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_d t})\right]\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{p_0\mathrm{i}}{2m\omega_d}\left\{\frac{1}{-[\zeta\omega_n+\mathrm{i}(\omega_d+\omega)]} - \frac{1}{-[\zeta\omega_n+\mathrm{i}(\omega_d-\omega)]}\right\}$$

$$= \frac{p_0}{k-\omega^2 m+\mathrm{i}\omega c} = \frac{p_0}{k}\cdot\frac{1}{(1-\gamma^2)+\mathrm{i}(2\zeta\gamma)} \tag{9}$$

则其幅频特性为:

$$|x_{脉}(\omega)| = \frac{p_0}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2\zeta\gamma)^2}} \tag{10}$$

其中,$|x_{脉}(\omega)|$ 表示 ω 处系统响应谱线幅值。

对单自由度黏滞阻尼体系作用谐振荷载时,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_{谐}(t) = p_0\sin(\omega t+\beta) \tag{11}$$

上述微分方程求解得到总反应[10]

$$x_{谐}(t) = \mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t}(a'_1\cos\omega_d t + a'_2\sin\omega_d t) + [a_1\cos(\omega t+\beta) + a_2\sin(\omega t+\beta)] \tag{12}$$

式中:

$$\begin{cases} a'_1 = a_1 \\ a'_2 = a_2 \dfrac{\omega}{\omega_d} + a_1 \dfrac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \end{cases}; \begin{cases} a_1 = \dfrac{p_0}{k} \cdot \dfrac{-2\zeta\gamma}{(1-\gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2} \\ a_2 = \dfrac{p_0}{k} \cdot \dfrac{1-\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2} \end{cases};$$

p_0,ω,β 分别为简谐激励力的幅值、频率和相位角。式(12)右端第一项表示按 $e^{-\xi\omega t}$ 衰减的瞬态反应,即伴随自由振动项;第二项为无限持续的稳态谐振反应,即强迫振动项。人们一般认为瞬态反应衰减很快而常将其忽略,但某些情况下其很难衰减,甚至在一定时间范围内起主导作用[11],若忽略这一点将会对响应结果分析产生较大影响。

那么,谐振激励下伴随自由振动充分衰减后的总反应为:

$$x_{谐}(t) = \frac{p_0}{k}\left[\frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2}}\right]\sin(\omega t + \beta + \phi) \tag{13}$$

式中,$|x_{谐}(t)|$ 表示其振动幅值,ϕ 表示相对角度。

假设单自由度系统频响函数用 $h(\omega)$ 表示,理想单位脉冲可以激起全频段的响应,用 $h_{脉}(\omega)$ 表示该激励下的频响函数。结合以上叙述,存在

$$\begin{cases} f_{脉}(\omega) = p_0 \\ h_{脉}(\omega) = h(\omega) = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{1}{(1-\gamma^2) + \mathrm{i}(2\zeta\gamma)} \\ x_{脉}(\omega) = f_{脉}(\omega) h_{脉}(\omega) = p_0 h(\omega) \end{cases} \tag{14}$$

可见,单位脉冲响应函数经傅里叶变换后可直接得到频响函数,结合式(10)、式(13)建立时域谐振激励响应与频域脉冲激励响应间关系。

$$|x_{谐}(t)| = p_0 |h(\omega)| = |x_{脉}(\omega)| \tag{15}$$

根据式(15)可知,脉冲激励响应频谱与频响函数间随脉冲幅值呈线性关系,脉冲力幅与谐振力幅相等(均为 p_0)时,脉冲响应频谱的幅频与谐振下的强迫振动幅值相等。因此,脉冲频谱可以准确预报,力幅与脉冲力力幅相等的任意频率简谐激励作用下伴随自由振动充分衰减后的稳态谐振反应振幅(即强迫振动振幅)。

1.3　伴随自由振动占比讨论

一般在微幅变形下进行系统振动测试,为在宽频段内获得准确的响应,常采用加速度传感器。为探究伴随自由振动对谐振响应测试的影响程度,对加速度响应中该成分的占比规律及时域衰减程度进行分析。

式(12)中,称 $e^{-\zeta\omega_n t}$ 为伴随自由振动衰减项(决定衰减速率);$a'_1\cos\omega_d t + a'_2\sin\omega_d$ 为伴随自由振动非衰减项(决定初始振幅大小),其幅值为 $\sqrt{a'^2_1 + a'^2_2}$。$R_{\ddot{x}}(R^0_{\ddot{x}})$ 和 $\eta_{\ddot{x}}$ 分别表示加速度的伴随自由振动振幅(非衰减项)与强迫振动振幅之比,以及加速度的伴随自由振动振幅(非衰减项)与总振幅之比,则存在 $R_{\ddot{x}} = e^{-\zeta\omega_n t} R^0_{\ddot{x}}$。对于小阻尼系统,认为 $\zeta \ll 1$ 且 $\zeta^2 \approx 0$,将式(12)对 t 求导得:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\{&(\zeta^2\omega_n^2 - \omega_d^2)a'_1\cos\omega_d t + \\ &[(\zeta^2\omega_n^2 - \omega_d^2)a'_2 + 2\zeta\omega_n\omega_d a'_1]\sin\omega_d t\} + \\ &[-\omega^2 a_1\cos(\omega t + \beta) + \omega^2 a_2\sin(\omega t + \beta)] \end{aligned} \tag{16}$$

则

$$R^0_{\ddot{x}} = \frac{\sqrt{[(\zeta^2\omega_n^2 - \omega_d^2)a'_1]^2 + [(\zeta^2\omega_n^2 - \omega_d^2)a'_2 + 2\zeta\omega_n\omega_d a'_1]^2}}{\sqrt{(\omega^2 a_1)^2 + (\omega^2 a_2)^2}} \xrightarrow{\zeta \ll 1 \text{ 且 } \zeta^2 \approx 0} \frac{1}{\gamma} \tag{17}$$

在阻尼比 $\zeta < 5\%$、频率比 $\gamma < 1$ 的情况下,将式(17)与精确公式的计算结果进行对比,其与精确结果相差不超过 1%。当 ω_n 和 ζ_n 较小且衰减时间 t 很短时,$e^{-\zeta\omega_n t} \approx 1$。$R^0_{\ddot{x}}$ 规律如图 1 所示。

则 $R_{\ddot{x}} = e^{-\zeta\omega_n t} R^0_{\ddot{x}} \xrightarrow{t \to 0} 1/\gamma$,可得:

$$\eta_{\ddot{x}} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{e^{-\zeta\omega_n t} + \gamma} \xrightarrow{t \to 0} \frac{1}{\gamma + 1} \tag{18}$$

由图 1 可知,在频率比 $\gamma < 1$ 且衰减时间 t 很短时,加速度响应中伴随自由振动的初始占比一直较大,甚至达到强迫振动响应的数十倍以上,在总响应中占主要地位,且据式(18)可知,$\eta_{\ddot{x}} \geqslant 50\%$。

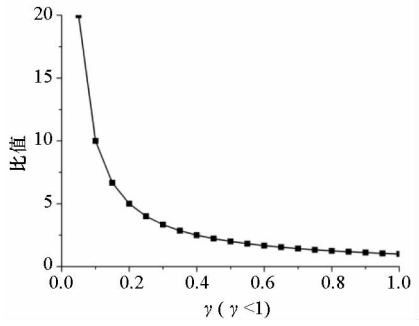


图 1　$R^0_{\ddot{x}}$ 随 $\gamma(\gamma < 1)$ 的变化规律

Fig. 1　Variation of $R^0_{\ddot{x}}$ with $\gamma(\gamma < 1)$

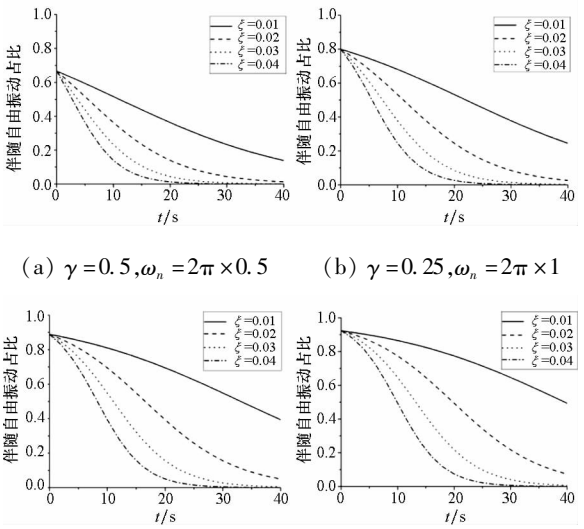
以船舶在海浪中航行的工程背景为例,论述关注伴随自由振动的重要性。计算参数见表 1,在波浪载荷作用下(持续性激励),所得相同荷载频率、不同阻尼比、不同自振频率下的 $\eta_{\ddot{x}}$ 随时间(覆盖多个低频波浪周期,取 40 s)的变化历程在图 2 中给出。可以看出,阻尼比 ζ 越小,伴随自由振动衰减速度越慢;频率比 γ 越小,伴随自由振动在总反应中的初始占比越高;$\gamma < 1$ 时,若固有频率 ω_n 较小,即使存在阻尼作用,伴随自由振动成分在 40 s 内也没有衰减到

可以忽略的程度，甚至在一定时间范围内该成分起主导作用。

表 1 相关计算参数

Tab. 1 Relevant calculation parameters

参数	数值
波浪遭遇频率 ω	0.25 Hz
船体固有频率 ω_n	0.5 Hz,1 Hz,2 Hz,3 Hz
频率比 γ	0.5,0.25,0.125,0.083 3
阻尼比 ζ	1%,2%,3%,4%



(a) $\gamma=0.5,\omega_n=2\pi\times0.5$ (b) $\gamma=0.25,\omega_n=2\pi\times1$

(c) $\gamma=0.125,\omega_n=2\pi\times2$ (d) $\gamma=0.083\,3,\omega_n=2\pi\times3$

图 2 伴随自由振动在加速度总响应中占比 η_A 随时间的衰减曲线

Fig. 2 Attenuation curve of acceleration response in the proportion of the total response (η_A) with time

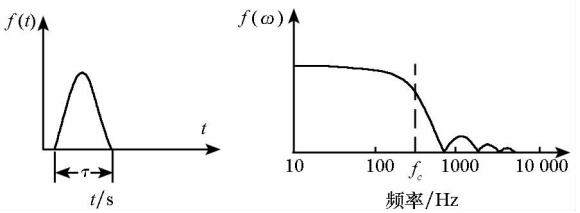
以上理论推导是在单自由度体系下进行的，不能完全一致地适用于多自由度体系的精确预报，但其规律性值得参考。对于固有频率低、阻尼比小的结构，其伴随自由振动成分更加难以衰减。此外，位移、速度以及应力响应中伴随自由振动成分同样存在一定的规律，此处不再赘述。

1.4 多种激励形式的比较

谐振激励下产生的伴随自由振动衰减缓慢时，会对结构响应测试造成干扰。脉冲激励作为一种瞬态激励形式，其响应频谱可以快速描述结构在谐振激励下的稳态响应幅值。

激振器做单点平动激励测量时有以下几种波形[2]。离散步进正弦激励，由低到高离散地逐步对结构进行定频激励，每改变一次频率都要等自由振动衰减彻底稳定后再采集，在(反)共振频率处等待时间更长，操作复杂费时，且需预先判断共振峰的频域位置、及时改变步长保证在其附近有足够的采样数据，以获取较为接近的半功率点数据来估算阻尼比；慢扫描正弦激励，由低到高连续扫过设定频段，理论上扫描法是不能得到稳定响应的，但对共振区扫频最大速率进行限制，可使响应测试结果误差控制在可接受范围内[12]；平稳随机激励，白噪声激励是理想的纯随机激励(能量在 0 ~ ∞ 频段内均匀分布)，可看作是脉冲函数的时间序列，但每块样本起点响应是先前激励的结果，样本尾部仍有激励但响应已被截断，这均会降低激励 - 响应间的相干性，对激励和响应加汉宁窗且取多次平均的方法往往也只是一种折中办法[1]；其他激励波形(伪随机激励、周期正弦快扫激励、周期脉冲激励、周期随机激励等)大多与平稳随机激励相似。

测试时的脉冲激励一般不是理想的 Dirac delta 函数，小型结构常用力锤，其冲击力类似于脉宽为 τ 的半正弦形，FFT 后的力谱如图 3 所示。频率成分直到 f_c(截止频率，即 $1/\tau$)之前基本是平的，称 f_c 以下的频段为有效激励频段。可以通过改变锤头质量和顶帽硬度来控制脉宽 τ，以获取研究频段内的有效数据。除力锤敲击外，脉冲激励形式还应包括工程中的撞击等，脉冲激励具有测量速度快、安装方便、易于更换激振点、激振时产生的结构附加载荷小等优势，但有时其也存在局限性，如结构非线性限制、信噪比问题以及阻尼限制等[13]，某些情况下也应考虑接触式激励。



(a) 冲力时域曲线 (b) 冲力频谱

(a) Impulse time domain curve (b) Impulse spectrum

图 3 力锤产生的冲击力及其频谱

Fig. 3 Impact force of hammer and its frequency spectrum

2 结构脉冲激励响应的应用技术

2.1 脉冲激励频响函数中稳态谐振幅值的提取

对结构进行振动核算时，时常关心其共振频率与主要激励力频率是否满足错开率要求，不满足时需进行动响应计算或测试。在共振区附近对结构进行持续性激励时，若结构的阻尼较小，其达到稳态振动时间较长、响应较大，易于造成损伤。条件允许时，可对激励部位进行脉冲激励，从响应

频谱中提取稳态谐振幅值。

以某船船体梁模型为例,相关参数见表 2。由式(14)可知,有限元软件中的频响分析可以得到等效的脉冲响应频谱,因此文中简化了脉冲响应的时域计算。模型考虑了全船总重量和附涟水质量,螺旋桨激励力幅值假定为 1 kN。从时、频域的角度,计算激励力分别与船体梁第 1、第 2、第 3 阶固有频率错开 3%、2%、1% 时船艏部响应,时域计算时保证响应已达到稳定。船体梁垂向前 3 阶固有频率和垂向响应对比计算结果见表 3。可见,从频谱中提取的响应结果与稳态谐振响应基本一致,认为存在的相对误差是计算机精度所致。

表 2　某船主尺度参数

Tab. 2　Main scale parameter of a vessel

参数	符号	数值
设计水线长/m	L_{WL}	165
型宽/m	B	20.2
型深/m	H	14.41
吃水/m	*Draft*	6.63
设计排水量/t	Δ	11 847
容积排水量/t	∇	11 558
方型系数	C_B	0.52

表 3　船体梁艏部响应计算结果对比及误差

Tab. 3　Response of fore part of ship girder and calculation error

振型阶次	固有频率 ω_n/Hz	激励频率与 ω_n 错开幅值/%	船艏位移响应($\times 10^{-3}$mm) 脉冲频谱拾取	稳态振动幅值	相对误差/%
第 1 阶	1.055	±3	118.821	118.725	0.080 9
			113.087	112.983	0.092 0
第 2 阶	2.447	±2	38.276	38.257	0.049 7
			36.305	36.286	0.052 4
第 3 阶	4.349	±1	16.128	16.118	0.062 0
			15.545	15.532	0.083 7

这种从频域上得到时域响应的方法,还可以摆脱激励频率调档、范围的限制,完成任意频率下的稳态响应提取,某些情况下较试验测试精度高、干扰小、速度快。此外,根据频响函数的互易性,当激励位置不适宜激励时,可以对拾振位置进行激励,测量激励位置的响应来等效预报拾振位置的响应特性。

2.2　脉冲激励下结构模态阻尼比快速识别

阻尼比计算公式以一维梁模型进行推演,二、三维系统可以同理运用。结合式(13)运用模态叠加法得到该多自由度系统在频率 ω 简谐激励力下总响应为:

$$X(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j p_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{M_j\omega_{nj}^2} \cdot \frac{\varphi_j(x)}{\sqrt{(1-\gamma_j{}^2)^2 + (2\zeta_j\gamma_j)^2}} \sin(\omega t + \beta + \phi_j) \tag{19}$$

外界激励力按第 j 阶共振频率对系统激励时,其主模态响应远大于其他阶模态响应[14-15],总响应为:

$$X_j(x,t) \approx \frac{f_j}{M_j\omega_{nj}^2} \cdot \frac{\varphi_j(x)}{2\zeta_j} \sin(\omega_{nj}t + \beta + \phi_j) \tag{20}$$

试验测试时,时常认为共振响应就是最大响应,但实际上最大响应是大于共振响应的,第 j 阶最大振动响应对应峰值频率与第 j 阶固有频率之比为:

$$\gamma_j = \bar{\omega}_{nj}/\omega_{nj} = \sqrt{1-2\zeta_j^2}$$

因此第 j 阶最大响应为:

$$\bar{X}_j(x,t) \approx \frac{f_j}{M_j\omega_{nj}^2} \cdot \frac{\varphi_j(x)}{2\zeta_j\sqrt{1-\zeta_j^2}} \sin(\bar{\omega}_{nj}t + \beta + \phi_j)$$

改变激励力频率 ω,使其与第 j 阶峰值频率 $\bar{\omega}_{nj}$ 有一小量差别 $\Delta\omega$,令 $\gamma_{ji} = (\bar{\omega}_{nj} \pm \Delta\omega)/\omega_{ni} = \bar{\omega}_{nj}^{\pm}/\omega_{ni}$,$\gamma_{jj} = \gamma_j = (\bar{\omega}_{nj} \pm \Delta\omega)/\omega_{nj} = \bar{\omega}_{nj}^{\pm}/\omega_{nj}$,则响应为:

$$\begin{aligned}\bar{X}_j^{\pm}(x,t) &= \sum_{i=1,i\neq j}^{\infty} \Delta\bar{X}_i(x,t) + \bar{X}_j(x,t) \\ &= \sum_{i=1,i\neq j}^{\infty} \frac{f_i}{M_i\omega_{ni}^2} \cdot \frac{\varphi_i(x)}{\sqrt{(1-\gamma_{ji}^2)^2 + (2\zeta_j\gamma_{ji})^2}} \cdot \\ &\quad \sin[(\bar{\omega}_{nj} \pm \Delta\omega)t + \phi - \theta_i] + \\ &\quad \frac{f_j}{M_j\omega_{nj}^2} \cdot \frac{\varphi_j(x)}{\sqrt{(1-\gamma_{jj}^2)^2 + (2\zeta_j\gamma_{jj})^2}} \cdot \\ &\quad \sin[(\bar{\omega}_{nj} \pm \Delta\omega)t + \phi - \theta_j]\end{aligned} \tag{21}$$

当 $\Delta\omega$ 足够小时,第 j 阶主模态响应 $\bar{X}_j(x,t)$ 亦远大于其他阶模态响应分量。为提高计算精度,视总响应 $\bar{X}_j^{\pm}(x,t)$ 为主模态响应 $\bar{X}_j(x,t)$ 与相邻模态响应 $\Delta\bar{X}_l(x,t)$ 的叠加,即

$$\bar{X}_j^{\pm}(x,t) \approx \bar{X}_j(x,t) + \Delta\bar{X}_l(x,t) \tag{22}$$

但当测点处于相邻模态的振型“节点”时,$\Delta\bar{X}_l(x,t)$ 为零,因此式(22)为:

$$\bar{X}_j^{\pm}(x,t) \approx \bar{X}_j(x,t) = \frac{f_j}{M_j\omega_{nj}^2} \cdot \frac{\varphi_j(x)}{\sqrt{(1-\gamma_j^2)^2 + (2\zeta_j\gamma_j)^2}} \sin[(\bar{\omega}_{nj} \pm \Delta\omega)t + \phi - \theta_j] \tag{23}$$

当激励力为作用在 $x = x_0$ 处，力幅恒定为 p_0 的简谐激励时，$f_j = p_0 \cdot \varphi_j(x_0)$，由式(20)、式(23)可得到：

$$\frac{|\bar{X}_j(x,t)|}{|\bar{X}_j^{\pm}(x,t)|} = \frac{\bar{X}_j(x)}{\bar{X}_j^{\pm}(x)} = \frac{2\zeta_j\sqrt{1-\zeta_j^2}}{\sqrt{(1-\gamma_j{}^2)^2+(2\zeta_j\gamma_j)^2}} \tag{24}$$

令 $\bar{\chi}_j = \bar{X}_j(x)/\bar{X}_j^{\pm}(x)$，即第 j 阶模态最大响应幅值与按 $\bar{\omega}_{nj}^{\pm}$ 频率激励下的响应幅值之比，无量纲。其中，$\gamma_j = (\bar{\omega}_{nj} \pm \Delta\omega)/\omega_{nj} = \bar{\omega}_{nj}^{\pm}/\omega_{nj}$，令 $\bar{\gamma}_j = \bar{\omega}_{nj}^{\pm}/\bar{\omega}_{nj}$，得：

$$\gamma_j = \bar{\omega}_{nj}^{\pm} \cdot \sqrt{1-2\zeta_j^2}/\bar{\omega}_{nj} = \sqrt{1-2\zeta_j^2} \cdot \bar{\gamma}_j \tag{25}$$

由式(24)～(25)得：

$$\zeta_j = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{\frac{1-\bar{\chi}^2}{1+(\bar{\gamma}_j^2-2)\bar{\gamma}_j^2\bar{\chi}^2}}\right]} \tag{26}$$

当阻尼较小时 $\bar{\omega}_{nj} \approx \omega_{nj}$，式(20)近似还原为式(18)，所得结果精度亦可接受。按上述方法同理可得：

$$\zeta_j = \frac{|1-\gamma_j^2|\chi_j}{2\cdot\sqrt{1-\chi_j^2}} \tag{27}$$

此时，$\gamma_j = (\omega_{nj} \pm \Delta\omega)/\omega_{nj} = \omega_{nj}^{\pm}/\omega_{nj}$，$\chi_j = X_j(x)/X_j^{\pm}(x)$，$\omega_{nj}^{\pm}$ 表示第 j 阶固有频率 ω_{nj} 的邻近频率，χ_j 表示第 j 阶共振响应幅值与按 $\omega_{nj}^{\pm}$ 频率激励下的响应幅值之比。

从式(26)～(27)可见，这种通过响应反演模态阻尼比的方法，所得 ζ 是与两个无量纲参数(γ 和 χ)相关的量，且在线性范围内与作用力幅值无关。此外，经验证，χ 可以为位移、速度以及加速度任意类型的响应比。以式(26)为例，参数($\bar{\gamma}_j$ 和 $\bar{\chi}_j$)全部可在脉冲响应频谱(或频响函数)中获得，无须测量激励力，即：

$$\begin{cases} |X_{脉}(\bar{\omega}_{nj})| = |\bar{X}_j(t)| \\ |X_{脉}(\bar{\omega}_{nj}^{\pm})| = |X_{脉}(\bar{\omega}_{nj} \pm m\Delta\bar{\omega})| = |\bar{X}_j^{\pm}(t)| \\ \bar{\gamma}_j = \bar{\omega}_{nj}^{\pm}/\bar{\omega}_{nj} = (\bar{\omega}_{nj} \pm m\Delta\bar{\omega})/\bar{\omega}_{nj} \end{cases} \tag{28}$$

其中，$\Delta\bar{\omega}$ 为频谱的频率分辨率，m 为峰值频率与邻近频率的谱线间隔。由以上频响信息即可快速计算该阶模态阻尼比。

结合上节船体梁模型进行验算，得到螺旋桨激励下的响应频谱，分析测点选在邻近低阶模态振型的“节点”处，按照规范对水面舰艇模态阻尼系数的规定[16]设定模态阻尼初值，计算参数见表 4。运用式(26)、式(28)且脉冲响应频谱可以通过软件的频响分析等效得到，阻尼计算结果及误差见表 5。结果表明，将脉冲响应频谱预报的谐振激励响应用以反演模态阻尼比，所得结果与设定值总体误差很小，比较准确，但由于较高阶(即第 2、第 3 阶)共振激励下梁低阶模态位移的贡献比例会增大[15]，导致了较高阶识别误差相对有所增大。

时域响应进行 FFT 变换后得到的是频域下的离散谱线，由于受频率分辨率的限制，传统的半功率法往往难以恰好找到半功率点来估算模态阻尼比。这种仅从脉冲响应频谱(或频响函数)中有限的离散谱线信息入手来计算阻尼比的方法，既可避免测量激励力的时域信号，又可以摆脱利用频域信息求解阻尼比时对连续频谱的依赖，操作简单迅速，且精度较高。但这种方法仅适用于模态密集度不高以及可以通过控制激振位置实现混叠模态分离的系统，否则计算精度难以保证。

表 4 数值计算参数

Tab. 4 Parameter of numerical calculation

工况	船体梁阶次	垂向固有频率 ω_n/Hz	频率分辨率 $\bar{\omega}$/Hz	谱线间隔 m	$m\bar{\omega}$/Hz	频率比 γ_j
1	第 1 阶	1.055		20	0.02	1 ± 0.018 96
2	第 2 阶	2.447	0.001	40	0.04	1 ± 0.016 35
3	第 3 阶	4.349		60	0.06	1 ± 0.013 80

表 5 船体梁阻尼计算结果及识别误差

Tab. 5 Damping calculation results of ship girder and identification error

工况	测点的振型位置	距船艉距离/mm	$\lvert\bar{X}_j^-(t)\rvert = \lvert X_{脉}(\bar{\omega}_{nj}^-)\rvert$ ($\times10^{-3}$mm)	$\lvert\bar{X}_j(t)\rvert = \lvert X_{脉}(\bar{\omega}_{nj})\rvert$ ($\times10^{-3}$mm)	$\lvert\bar{X}_j^+(t)\rvert = \lvert X_{脉}(\bar{\omega}_{nj}^+)\rvert$ ($\times10^{-3}$mm)	设定值 ζ_j ($\times10^{-2}$)	仿真值 ζ_j^- ($\times10^{-2}$)	仿真值 ζ_j^+ ($\times10^{-2}$)	识别误差 −/%	识别误差 +/%
1	第 2 阶振型“节点”	29 700	87.364 8	524.599 9	87.094 1	0.316 5	0.317 1	0.316 1	0.193	−0.126
2	第 1 阶振型“节点”	51 150	17.800 8	42.378 9	17.258 7	0.734 1	0.750 4	0.722 9	2.223	−1.521
3	第 2 阶振型“节点”	29 700	5.113 7	7.284 2	4.935 8	1.304 7	1.350 2	1.262 1	3.496	−3.261

注：$\lvert\bar{X}_j^{\pm}(t)\rvert$，$\zeta_j^{\pm}$ 及识别误差“ ± ”分别对应于 $\omega_{nj} \pm \Delta\omega$ 频率激励下的稳态响应幅值、阻尼仿真值以及阻尼识别误差。

3　试验验证及分析

3.1　试验背景及设计

工程机械中板架结构应用广泛，潜艇建造时板壳材质、厚度等沿全船分布复杂，局部板格振声性能研究对整船的声辐射预报意义重大。按照现行规范中对整船有限元建模要求，即网格尺寸按一个纵骨或肋距（约 500 mm）确定且尽量接近正方形，据此对船体典型局部板单元模型进行试验设计，测试钢板和复合材料板的阻尼性能。相关尺寸、材料参数见表 6。板单元四周螺栓紧密约束，工装基频在 1 kHz 以上，保证与板单元前 8 阶自振频率有足够的错开率。工装及典型测点分布如图 4 所示。

表 6　玻璃钢板与普通钢板参数

Tab. 6　Parameters of glass fiber plate and common steel plate

参数类型	玻璃钢	普通钢
材质	E800/350 环氧树脂	Q235 钢
弹性模量 E_{11}	19.57 ± 0.5 GPa	210 GPa
弹性模量 E_{22}	19.57 ± 0.5 GPa	210 GPa
泊松比 ν_{12}	0.14	0.3
密度 ρ	1.76 g/cm^3	7.8 g/cm^3
剪切模量 G_{12}	4.69 GPa	80 GPa
剪切模量 G_{23}	3 GPa	80 GPa
剪切模量 G_{13}	3 GPa	80 GPa
铺层方向	0°/90°	
材料单层厚度	0.68 mm	
板单元有效尺寸/mm	500 × 500 × 3	500 × 500 × 3

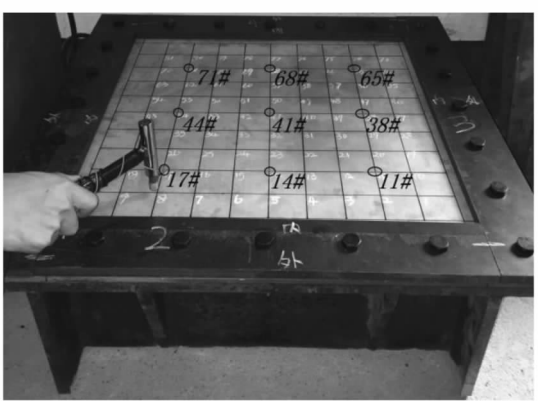


图 4　脉冲激励试验模型（玻璃钢板）

Fig. 4　Impulse excitation experiment (glass fiber plate)

试验中模态识别采用了多点激励多点拾振法（以辨别结构的模态重根），板正面均布 81 个激励点，背面均布 9 个加速度响应拾振点。为通过控制激振位置实现重根模态响应的分离，各阶模态阻尼比试验测点根据事先进行的数值计算确定，既位于邻近模态的“节点”“节线”处，亦为各阶振型下具有明显响应的位置。

3.2　试验结果及分析

对板单元各阶固有频率及振型进行识别，并与数值计算结果对比，见表 7、表 8。可见，数值计算与试验结果基本一致，各阶振型依次对应，固有频率仅存在小幅度的偏差（均小于 4%），认为试验模型与仿真模型匹配度高，微小的频率差异主要源于试验时固定边界不理想、人工网格划分有偏差和集中质量分布不对称等因素。

表 7　板单元模型固有频率的试验与仿真结果对比

Tab. 7　Comparison results among element model plates' natural frequency of experiment and simulation

模态阶次	普通钢板			玻璃钢板		
	试验/Hz	仿真/Hz	相对误差/%	试验/Hz	仿真/Hz	相对误差/%
1	82.29	81.41	−1.08	61.65	61.23	0.68
2	159.97	163.05	1.89	123.01	123.45	−0.36
3	171.23	168.17	−1.82	130.01	128.38	1.27
4	241.80	249.07	2.92	173.95	179.80	−3.25
5	282.22	285.60	1.18	218.91	214.47	2.07
6	301.94	298.47	−1.16	230.71	225.52	2.30
7	361.55	372.42	2.92	254.52	260.57	−2.32
8	368.12	380.98	3.38	263.36	267.32	−1.48

依据试验实测脉冲响应频谱曲线，对各阶模态阻尼比进行识别，以玻璃钢板为例的计算过程由表 9 给出，并将按上述方法识别的阻尼比结果与传统半功率法、Polylscf（稳态图计算法）识别结果进行对比，见表 8。其中，Polylscf 方法是国际最新发展并流行的基于传递函数的模态分析方法，具有很高的识别精度，利用模态分析软件将 Polylscf 方法识别结果作为参考值。可见，该方法与半功率法识别结果存在一定差异，半功率法识别结果普遍偏大，其识别误差的影响因素已在文献[6,17]中给出分析；与参考值比较，半功率法相对误差较大，该方法识别结果与参考值更为接近，阻尼比最大误差 5.14%，工程上可以接受。

为进一步验证文中阻尼计算方法的可靠性，以 11#（激振）与 71#（拾振）点间频响关系为例，结合两块板脉冲激励试验所得宽频带响应结果，与该频段内数值计算（取文中方法计算阻尼比）频响进行对比，如图 5 所示。从图 5 中可见，除因固有频率微小差异导致的频响曲线小幅偏移外，在峰值大小、分布形状上均与试验结果高度匹配，可认为该理论所得阻尼比比较可靠。

表 8 两块板单元模型前 8 阶模态阻尼比识别结果对比

Tab. 8 Comparison results among 2 element model plates′ 8 pre-order modal damping ratio

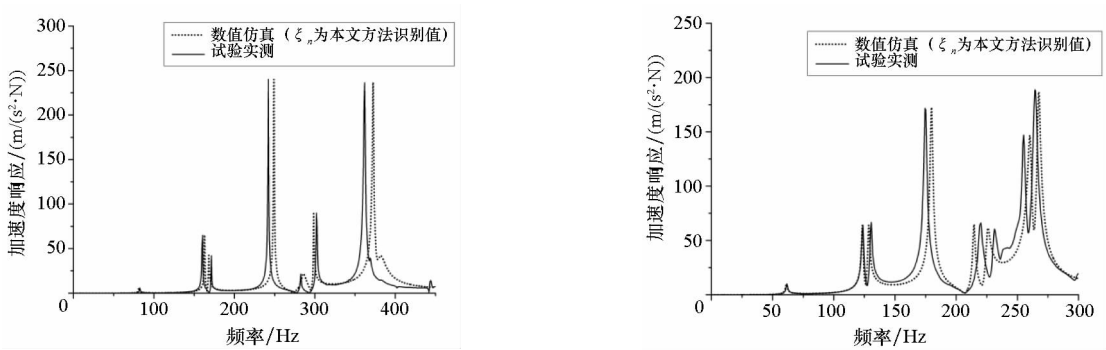
模态阶次	普通钢板					玻璃钢板				
	Polylscf（参考值）（$\times10^{-2}$）	半功率带宽法（$\times10^{-2}$）	相对误差/%	文中方法（$\times10^{-2}$）	相对误差/%	Polylscf（参考值）（$\times10^{-2}$）	半功率带宽法（$\times10^{-2}$）	相对误差/%	文中方法（$\times10^{-2}$）	相对误差/%
1	0.358	0.417	16.48	0.354	-1.12	0.955	0.891	-6.70	0.967	1.26
2	0.196	0.364	85.71	0.203	3.57	0.550	0.706	28.36	0.568	3.27
3	0.148	0.190	28.38	0.144	-2.70	0.640	0.724	13.13	0.621	-2.97
4	0.175	0.134	-23.43	0.184	5.14	0.645	0.726	12.56	0.673	4.34
5	0.193	0.219	13.47	0.186	-3.63	0.794	0.844	6.30	0.805	1.39
6	0.170	0.209	22.94	0.174	2.35	0.703	0.678	-3.56	0.678	-3.56
7	0.26	0.282	8.46	0.249	-4.23	0.664	0.830	25.00	0.654	-1.51
8	0.271	0.264	-2.58	0.262	-3.32	0.657	0.730	11.11	0.671	2.13

表 9 板单元模型阻尼计算结果（玻璃钢板）

Tab. 9 Damping calculation results of plate unit model (glass fiber plate)

模态阶次	测点所在振型位置	$\omega_{nj}\pm m\Delta\bar{\omega}$/Hz	$\lvert X_{脉}(\bar{\omega}_{nj}^{-})\rvert$/（m/s²）	$\lvert X_{脉}(\bar{\omega}_{nj})\rvert$/（m/s²）	$\lvert X_{脉}(\bar{\omega}_{nj}^{+})\rvert$/（m/s²）	ζ_j^{-}（$\times10^{-2}$）	ζ_j^{+}（$\times10^{-2}$）	平均 $\bar{\zeta}_j$（$\times10^{-2}$）
1	第 2 阶振型“节线”	61.646 ± 1.224	38.851	86.84	37.399	0.975	0.958	0.967
2	第 1 阶振型“节线”	123.010 ± 1.224	106.728	214.996	107.045	0.563	0.574	0.568
3	第 2 阶振型“节线”	130.005 ± 1.224	124.989	224.167	122.655	0.624	0.619	0.621
4	第 3 阶振型“节线”	173.950 ± 1.224	112.090	164.102	114.984	0.650	0.696	0.673
5	第 4 阶振型“节线”	218.910 ± 1.224	164.266	200.318	165.085	0.787	0.823	0.805
6	第 5 阶振型“节线”	230.713 ± 1.224	178.878	225.296	176.343	0.683	0.672	0.678
7	第 6 阶振型“节线”	254.517 ± 1.224	149.775	185.830	149.889	0.645	0.662	0.654
8	第 7 阶振型“节线”	263.360 ± 1.224	140.256	170.745	140.746	0.659	0.683	0.671

注：试验响应频谱频率分辨率 $\Delta\bar{\omega}=0.153$ Hz，按谱线间隔 $m=8$ 取值，响应为加速度响应。



（a）普通钢板 （b）玻璃钢板

（a）Common steel plate （b）Glass fiber plate

图 5 试验模型宽频带频响分析

Fig. 5 Broadband frequency response analysis of experiment model

4 结论

本文对时 - 频域下的响应函数进行推导，找到了脉冲激励下的响应频谱与稳态响应幅值的关系，推导了一种仅通过脉冲响应频谱上有限个谱线信息确定某阶模态阻尼比的快速计算公式，该方法不受试验和仿真的限制、适用范围广，在减小运算量的同时可以避免测量激励力的时域信号，所得响应、阻尼比结果具有足够的精度。但这种阻尼计算方法仅适用于模态密集度不高，且存在模态混叠时可以通过控制激振位置实现分离的系统，否则计算精度难以保证。

参考文献（References）

[1] 中华人民共和国国家质量监督检验检疫总局，中国国家标准化管理委员会. 振动与冲击机械导纳的试验确定第 2

部分：用激振器作单点平动激励测量：GB/T 11349. 2—2006[S]. 北京：中国标准出版社，2006.
General Administration of Quality Supervision, Inspection and Quarantine of the People's Republic of China, Standardization Administration of the People's Republic of China. Vibration and shock-experimental determination of mechanical mobility-part 2: measurements using single-point translation excitation with an attached vibration exciter: GB/T 11349. 2—2006[S]. Beijing: China Standards Press, 2006. (in Chinese)

[2] Brown D, Carbon G, Ramsey K. Survey of excitation techniques applicable to the testing of automotive structures [C]// Proceedings of International Automotive Engineering Congress and Exposition, 1977.

[3] 钱济国. 频响函数测量的脉冲激励方法[J]. 振动、测试与诊断，1994，14(2)：32－39.
QIAN Jiguo. Impulse excitation method for frequency response function measurements [J]. Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis, 1994, 14(2): 32－39. (in Chinese)

[4] 张永杰，肖健，韦冰峰，等. 一种新的基于脉冲激励的内损耗因子获取方法[J]. 振动与冲击，2014，33(12)：161－164.
ZHANG Yongjie, XIAO Jian, WEI Bingfeng, et al. A new method for estimating damping loss factor based on multi-pulse excitation [J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(12): 161－164. (in Chinese)

[5] 张文德，萧龙翔. 用阶跃激励响应的自功率谱估算模态阻尼[J]. 实验技术与管理，1996，13(4)：39－42.
ZHANG Wende, XIAO Longxiang. Modal damping ratio estimated by the power spectrum of the step response[J]. Experimental Technology and Management, 1996, 13(4): 39－42. (in Chinese)

[6] 陈奎孚，张森文. 半功率点法估计阻尼的一种改进[J]. 振动工程学报，2002，15(2)：151－155.
CHEN Kuifu, ZHANG Senwen. Improvement on the damping estimation by half power point method [J]. Journal of Vibration Engineering, 2002, 15(2): 151－155. (in Chinese)

[7] 陈奎孚，焦群英. 半功率点法估计阻尼比的误差分析[J]. 机械强度，2002，24(4)：510－514.
CHEN Kuifu, JIAO Qunying. Influence of linear interpolation approximation to half power points on the damping estimation precision [J]. Journal of Mechanical Strength, 2002, 24(4): 510－514. (in Chinese)

[8] 国家技术监督局. 机械振动与冲击术语：GB/T 2298—1991[S]. 北京：中国标准出版社，1991.
China State Bureau of Technical Supervision. Mechanical vibration and shock—terminology: GB/T 2298—1991 [S]. Beijing: China Standards Press, 1991. (in Chinese)

[9] 李德葆，陆秋海. 实验模态分析及其应用[M]. 北京：科学出版社，2001：18－21.
LI Debao, LU Qiuhai. Experimental modal analysis and application[M]. Beijing: Science Press, 2001: 18－21. (in Chinese)

[10] R. 克拉夫，J. 彭津. 结构动力学[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2006：29－36.
Ray Clough, Joseph Penjien. Structural dynamics[M]. 2nd ed. Beijing: High Education Press, 2006: 29－36. (in Chinese)

[11] 祁皑，范宏伟，陈永祥. 简谐荷载作用下伴生自由振动的研究[J]. 地震工程与工程振动，2002，22(6)：156－161.
QI Ai, FAN Hongwei, CHEN Yongxiang. Research on transient vibration under input of harmonic loading [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2002, 22(6): 156－161. (in Chinese)

[12] Bozich D J. Utilization of a digital computer for on-line acquisition and analysis of acoustic and vibration data[J]. Shock and Vibration Bulletin, 1966, 35(4): 151－180.

[13] Ewins D. State-of-the-art assessment of the mobility measurement techniques-summery of results[J]. Journal of the Society of Environmental Engineers, 1981, 21(1): 42－52.

[14] 孙谦，陈志坚. 基于实船航行试验的舰船总振动阻尼识别方法[J]. 中国舰船研究，2011，6(6)：34－37.
SUN Qian, CHEN Zhijian. Hull vibration damping identification method based on prototype experiment [J]. Chinese Journal of Ship Research, 2011, 6(6): 34－37. (in Chinese)

[15] 温金鹏，杨智春，李斌，等. 材料阻尼测试方法研究[J]. 振动、测试与诊断，2008，28(3)：220－224.
WEN Jinpeng, YANG Zhichun, LI Bin, et al. A method for material damping measurement [J]. Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis, 2008, 28(3): 220－224. (in Chinese)

[16] 陈志坚. 舰艇振动学[M]. 北京：国防工业出版社，2010：162－163.
CHEN Zhijian. Ship vibration [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2010: 162－163. (in Chinese)

[17] 应怀樵，刘进明，沈松. 半功率带宽法与 INV 阻尼计法求阻尼比的研究[J]. 噪声与振动控制，2006，26(2)：4－6.
YING Huaiqiao, LIU Jinming, SHEN Song. Half-power bandwidth method and INV damping ration solver study [J]. Noise and Vibration Control, 2006, 26(2): 4－6. (in Chinese)