doi:10.11887/j.cn.201802021 http://journal.nudt.edu.cn

基于截断函数的有限时间滑模控制方法*

赵 曜[1],周剑波[1],迟学谦[1],刘 娟[1],刘向东[2]
(1. 中国运载火箭技术研究院,北京 100076;2. 北京理工大学 自动化学院,北京 100081)

摘 要:针对一类二阶不确定非线性系统的鲁棒控制问题,提出一种基于截断函数的有限时间滑模控制算法。该算法具有以下特点:系统状态可在期望的有限时刻收敛为零;受控系统对外部扰动和参数不确定性具有全局鲁棒特性;系统状态的动态响应可解析预测;通过选择不同的截断函数可以实现对控制器性能的调节。仿真结果验证了所提算法的有效性。

关键词:截断函数;有限时间;滑模控制;非线性
中图分类号:TP13 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2018)02-132-04

Truncation function-based finite-time sliding mode control method

ZHAO Yao[1], *ZHOU Jianbo*[1], *CHI Xueqian*[1], *LIU Juan*[1], *LIU Xiangdong*[2]
(1. China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China;
2. School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: A truncation function-based finite-time sliding mode control strategy was presented to address the robust control problem of the second-order nonlinear uncertain system. The advantages of the proposed method are as follows: the system states will converge to zero at the desired finite time; the controlled system is globally robust against external disturbance and parameter variation; the system response can be analytically expressed; the system performance can be tuned by selecting different truncation function. Simulation results validate the effectiveness of the proposed method.

Key words: truncation function; finite-time; sliding mode control; nonlinear

滑模控制是一种常用的非线性控制算法,它通过将系统状态控制到特定的滑模面上运动来实现期望的控制目标[1-2]。相较于其他的控制算法,滑模控制具有很多优点,如:干扰抑制能力强、对参数摄动不敏感以及动态响应快等[3],这也使其广泛应用于机械系统、飞行器及电机的控制系统设计之中。然而,传统的滑模控制律只能使得受控系统状态渐进收敛。

有限时间控制往往具有更好的控制特性,如:更快的收敛速率,更高的控制精度和更好的扰动抵抗能力[4-5]。为了实现系统状态的有限时间收敛,Man 等提出了终端滑模控制方法[6]。该方法在滑模函数设计中引入了终端吸引子,实现了系统状态的有限时间收敛。为了进一步加快收敛速度,Yu 和 Man 提出了快速终端滑模控制方法[7]。然而,文献[6-7]提出的控制律中存在状态的负数次幂,可能会引起控制奇异问题。为了避免奇异,学者们提出了多种解决办法。Man 和 Yu 设计了在终端滑模面和传统滑模面间切换的控制逻辑[8]。Wu 等对滑模控制律进行预先设计,先将系统轨迹控制到不发生奇异的区域,然后再应用终端滑模控制[9]。然而上述两种方法均是间接避免奇异,并没有从根本上解决控制奇异问题。Feng 等在 2002 年提出了非奇异终端滑模控制方法,从而从根本上消除了控制奇异现象[10]。需要指出的是,上述滑模控制方法虽然实现了系统状态的有限时间收敛,但是依然存在着收敛时间无法事先确定的问题。

基于积分滑模思想,Laghrouche 提出了一种高阶滑模控制策略,实现了系统状态的有限时间收敛,且收敛时间可以事先给定[11]。然而,该控制策略对初始状态非常依赖,如果初始状态存在偏差,则控制律无法使得系统状态在期望的时刻收敛为零。为了解决该问题,Geng 等提出了一种时变非奇异终端滑模控制方法[12]。该方法也能使得系统状态在期望的有限时间收敛为零,且控

* 收稿日期:2017-03-09
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11402020)
作者简介:赵曜(1987—),男,山东淄博人,工程师,博士,E-mail:shine3y9r@126.com

制精度不受初始偏差影响。但是如果控制过程中系统状态偏离了滑模面,文献[11 -12]中提出的控制策略均无法保证终端时刻的控制精度。

本文针对一类二阶不确定非线性系统提出了一种新的系统状态有限时间收敛的滑模控制律,由于滑模面设计中引入了特定的截断函数,因此被称为基于截断函数的有限时间滑模控制。由于截断函数的选择不固定,因此可以通过选择不同的截断函数调节控制器性能。该控制律作用下,系统状态能在设定的时刻收敛为零,且系统对匹配的外界扰动和参数不确定性具有全局不敏感性。利用该算法的全局滑模特性,可以得到系统状态的解析解。此外,如果控制过程中系统状态偏离了滑模面,只要在设定收敛时刻之前系统状态再次回到滑模面,所提方法仍然能够保证终端时刻的控制精度。

1　方法推导

考虑如下典型的二阶不确定非线性系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = g(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x})u + d\end{cases} \tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$ 为状态向量,u 为控制输入,$g(\boldsymbol{x})$ 和 $b(\boldsymbol{x})$ 为以 $\boldsymbol{x}$ 为变量的已知函数且有 $b(\boldsymbol{x}) \neq 0$,d 为未知但有界的聚合扰动。控制器的设计目标为:设计控制律使得系统状态在设定的有限时间 t_f 收敛为零,即 $\lim\limits_{t\to t_f} x_1 \to 0$,$\lim\limits_{t\to t_f} x_2 \to 0$。

在设计控制器之前,首先构造一特殊变量如下:

$$\sigma = x_2 - \frac{n\dot{f}(t)}{f(t)}x_1 \tag{2}$$

其中,n 为大于 1 的常数,$f(t)$ 为一时变函数且满足如下条件:①$f(t)$ 是二阶可微的;②当 $0 \leqslant t < t_f$ 时,$f(t) \neq 0$,当 $t = t_f$ 时,$f(t) = 0$。

然后,设计如下滑模函数:

$$s_1 = \sigma + \xi \tag{3}$$

其中,$\xi(0) = -\sigma(0)$,$\dot{\xi} = -\dfrac{m\dot{f}(t)}{f(t)}\sigma$,$m$ 为不小于 n 的常数。考虑如下控制律:

$$u = \frac{1}{b(\boldsymbol{x})}\left\{\frac{nf(t)\ddot{f}(t) - (m+1)n[\dot{f}(t)]^2}{[f(t)]^2}x_1 + \frac{(m+n)\dot{f}(t)}{f(t)}x_2 - g(\boldsymbol{x}) - k\mathrm{sgn}(s_1)\right\} \tag{4}$$

其中,$k > \|d\|_\infty$ 为切换增益。进而可以得到下述定理。

定理 1　考虑式(1)所示的非线性系统,采用式(3)所示的滑模面和式(4)所示的控制律,可使得系统状态一直处于滑模面上运动,即实现全局滑模。此外,系统状态 x_1 和 x_2 将会在 $t = t_f$ 时同时收敛为零。

证明:考虑如下正定的 Lyapunov 函数:

$$V_1 = \frac{1}{2}s_1^2 \tag{5}$$

对 V_1 求导,并将控制律(4)代入求导结果,可得到:

$$\dot{V}_1 = s_1(-k\mathrm{sgn}(s_1) + d) \leqslant -(k - \|d\|_\infty)|s_1| \leqslant 0 \tag{6}$$

显然,$\dot{V}_1$ 是非正定的,因此 $V_1 \leqslant V_1(0)$。进一步注意到 $s_1(0) = \sigma(0) + \xi(0) = 0$,进而可以得到 $V_1 \leqslant 0$。由式(5)可以看出 $V_1 \geqslant 0$。因此可以得到 $V_1 \equiv 0$。该结果意味着在 $t \in [0, t_f]$ 时,有 $s_1 \equiv 0$。因此系统状态将一直处于滑模面运动,实现了全局滑模动态。

对 $s_1 = 0$ 求导,可以得到:

$$\dot{s}_1 = \dot{\sigma} - \frac{m\dot{f}(t)}{f(t)}\sigma = 0 \tag{7}$$

重新安排变量位置,式(7)可以等价写为:

$$\frac{1}{\sigma}d\sigma = \frac{m\dot{f}(t)}{f(t)}dt \tag{8}$$

然后,以$(0, \sigma(0))$为初始状态对式(8)进行积分,可以得到:

$$\ln\frac{\sigma(t)}{\sigma(0)} = \ln\left(\frac{f(t)}{f(0)}\right)^m \tag{9}$$

由式(9)结果可进一步求得变量 σ 的解析解为:

$$\sigma = b_2[f(t)]^m \tag{10}$$

其中,$b_2 = \dfrac{\sigma(0)}{[f(0)]^m}$为一常数。

将式(2)代入式(10),可以得到:

$$x_2 - \frac{n\dot{f}(t)}{f(t)}x_1 = b_2[f(t)]^m \tag{11}$$

令 $P(t) = -\dfrac{n\dot{f}(t)}{f(t)}$,$Q(t) = b_2[f(t)]^m$,可将式(11)等价写为:$\dot{x}_1 + P(t)x_1 = Q(t)$。显然,上式为一典型的一阶线性微分方程,其通解为 $x_1 = \mathrm{e}^{-\int P(t)\mathrm{d}t}\left[b_3 + \int Q(t)\mathrm{e}^{\int P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right]$,其中 b_3 为常数,可由初始条件得到。通过求解上式可以得到系统状态 x_1 的解析解如下:

$$x_1 = [f(t)]^n[b_3 + b_2F(t)] \tag{12}$$

其中,$F(t) = \int[f(t)]^{m-n}\mathrm{d}t$ 是函数$[f(t)]^{m-n}$的原

函数，$b_3 = \dfrac{x_1(0)}{[f(0)]^n} - b_2F(0)$ 为常数。

由于 $f(t)$ 为连续函数且 $m \geqslant n$，因此 $F(t)$ 一定存在。此外，由于 $F(t)$ 在 $t \in [0, t_f]$ 时间段内是连续的，因而其函数值有界。基于上述分析并注意到 $f(t_f) = 0$，可以得到 x_1 在 $t = t_f$ 时刻收敛为零。

进一步对式(12)求微分，可以得到：

$$x_2 = [f(t)]^{n-1}\{n\dot{f}(t)[b_3 + b_2F(t)] + b_2[f(t)]^{m-n+1}\} \tag{13}$$

由式(13)可以发现在 $t = t_f$ 时，x_2 也将会收敛为零。

□

注1 从式(4)可以看出，控制律中有两项分母中含有 $f(t)$。由于 $f(t_f) = 0$，因此在 $t = t_f$ 时控制量可能会出现奇异。事实上，该奇异问题可以通过合理地调节参数 n 来解决。将式(12)和式(13)所示的系统状态解析解代入控制律(4)，可以得到：

$$\begin{aligned} u = \{&[n\dot{f}(t)\ddot{f}(t) - (m+1)n(\dot{f}(t))^2](b_3 + \\ &b_2F(t))(f(t))^{n-2} - g(\boldsymbol{x}) - k\mathrm{sgn}(s_1) + \\ &(m+n)\dot{f}(t)[n\dot{f}(t)(b_3 + b_2F(t))n + \\ &b_2(f(t))^{m-n+1}](f(t))^{n-2}\}\frac{1}{b(\boldsymbol{x})} \end{aligned} \tag{14}$$

通过式(14)可以发现，只要选择 $n \geqslant 2$，控制奇异就可以避免。因此，在应用该控制律时，参数 n 应选为不小于2的值。

注2 如果在控制过程中系统状态偏离式(3)所示的滑模面，相应的控制性能也会受到影响。然而，如果在控制律作用下系统状态在 t_f 时刻之前重新回到滑模面上(如在 $t_r \leqslant t \leqslant t_f$ 时，$s_1 = 0$)，则系统状态仍然能在 $t = t_f$ 时刻收敛为零。这是因为从 t_r 时刻开始，系统状态 x_1 和 x_2 的动态响应仍然由式(12)和式(13)所决定。唯一的区别在于常数 b_2 和 b_3 的值有所变化，此时 $b_2 = \dfrac{\sigma(t_r)}{(f(t_r))^m}$，$b_3 = \dfrac{x_1(t_r)}{(f(t_r))^n} - b_2F(t_r)$。

注3 需要指出的是，虽然基于截断函数的有限时间滑模控制律能够保证系统状态在设定的有限时间收敛，但是其控制过程在期望的终端时刻 t_f 就结束了。因此，本节提出的方法适用于控制目标需要在设定时间达到的控制问题。

注4 本文提出的滑模控制方法与时变的截断函数 $f(t)$ 紧密关联，并且该控制器保证了系统状态有限时间收敛。因此该方法被称为基于截断函数的有限时间滑模控制方法。根据文中给出的截断函数 $f(t)$ 的设计原则，其选择并不是唯一的，只要满足要求即可，例如 $f(t)$ 可设计为 $t_f - t$、$(t_f - t)^2$ 及 $t^2 + At + B$(其中 A 和 B 为设计参数)等多种形式。$f(t)$ 中的可调参数越多，对应控制系统的设计自由度越多，但相应的控制律形式也变得越复杂。上述性质不仅给控制器设计带来了很大的灵活性也使得控制器能满足不同的设计指标要求。该特性将在后续仿真中进行说明。

2 算例验证

为了验证本文所提控制律的有效性，本节针对二阶不确定非线性系统(1)进行了算例验证。其中，$g(\boldsymbol{x})$、$b(\boldsymbol{x})$ 和 d 的表达式分别选为：$g(\boldsymbol{x}) = 0.6\sin(x_1 + 2x_2)$，$b(\boldsymbol{x}) = 0.5\sin(x_1 + x_2) + 1$ 和 $d = 0.3\sin(10t) + 0.2\cos(0.5x_1 + 7x_2)$。系统状态期望的收敛时间设为 $t_f = 4$ s，切换增益选为 $k = 1$，其他控制参数选为 $m = n = 2$。

仿真算例中选择了不同的截断函数，分别为 $f(t) = t_f - t$ 和 $f(t) = t^2 + At + B$。其中，$B = -t_f^2 - At_f$，参数 A 为任意常数。由于参数 A 可任意取值，因此它为控制系统提供了一个额外的自由度。在本算例中，也选择了不同的参数 A 来测试控制器性能。仿真结果如图1～4所示。

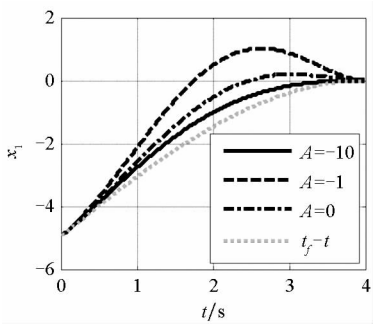


图1 系统状态 x_1 响应曲线

Fig. 1 Response curve of system state x_1

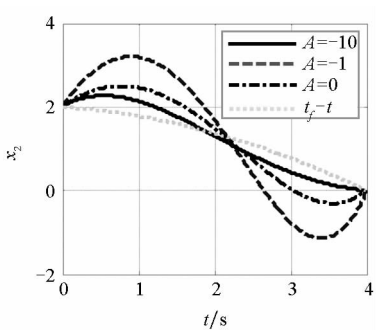


图2 系统状态 x_2 响应曲线

Fig. 2 Response curve of system state x_2

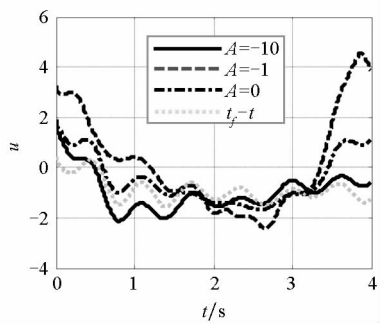


图 3　控制输入

Fig. 3　Control input

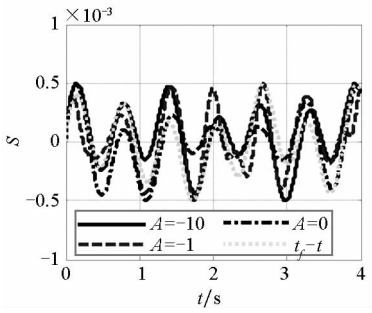


图 4　滑模函数

Fig. 4　Sliding surface

从图中结果可以看出,即使存在外部扰动,所提控制律仍能保证系统状态在期望的有限时间收敛为零。在控制律作用下,滑模函数一直在零值附近,保证了受控系统良好的鲁棒性。从图中结果可以进一步发现选择的截断函数不同,系统的动态响应也各不相同。因此可以通过设计不同的截断函数来对控制系统性能进行调节,该结果也验证了所提控制器设计的灵活性。

3　结论

针对一类不确定非线性二阶系统,本文设计了一种基于截断函数的有限时间滑模控制方法,实现了受控系统状态的设定时间收敛。通过理论分析和数值仿真验证了所提控制器设计的灵活性和对外界扰动的鲁棒性。该方法的最大特点是截断函数设计不唯一,这给控制器设计带来了很大的灵活性。如果没有特殊的控制要求,截断函数可设计为最简单的形式,即 $f(t)=t_f-t$,如果有额外控制需求,可以通过增加截断函数的设计参数来增加控制系统的自由度。由于很多控制问题(如末制导和交会对接问题)需要在设定时刻实现期望的性能指标,因此,所提控制策略在解决该类问题上具有很大的潜力和价值。

参考文献(References)

[1] Utkin V I. Sliding modes in control and optimization[M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1992.

[2] Hung J Y, Gao W B, Hung J C. Variable structure control: a survey[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1993, 40(1): 2 – 22.

[3] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京:科学出版社, 1998.
Gao Weibing. Variable structure control theory and design method[M]. Beijing: Science Press, 1998. (in Chinese)

[4] Du H B, Li S H, Qian C J. Finite-time attitude tracking control of spacecraft with application to attitude synchronization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(11): 2711 – 2717.

[5] Wang X, Sun X, Li S, et al. Finite-time position tracking control of rigid hydraulic manipulators based on high-order terminal sliding mode[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 2012, 226: 394 – 415.

[6] Man Z H, Paplinski A P, Wu H R. A robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1994, 39(12): 2464 – 2469.

[7] Yu X H, Man Z H. Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(2): 261 – 264.

[8] Man Z H, Yu X H. Terminal sliding mode control of MIMO linear systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1997, 44(11): 1065 – 1070.

[9] Wu Y Q, Yu X H, Man Z H. Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems[J]. Systems & Control Letters, 1998, 34(5): 281 – 287.

[10] Feng Y, Yu X H, Man Z H. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators[J]. Automatica, 2002, 38(12): 2159 – 2167.

[11] Laghrouche S, Plestan F, Glumineau A. Higher order sliding mode control based on integral sliding mode[J]. Automatica, 2007, 43(3): 531 – 537.

[12] Geng J, Sheng Y Z, Liu X D. Time-varying nonsingular terminal sliding mode control for robot manipulators[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2014, 36(5): 604 – 617.