doi:10.11887/j.cn.201803002 http://journal.nudt.edu.cn

# 攻击主动防御飞行器的微分对策制导律*

孙启龙,齐乃明,赵 钧,林海奇
(哈尔滨工业大学 航天学院,黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘 要**:基于微分对策理论设计了躲避护卫弹的同时攻击飞行器的制导律。根据传统的性能指标推导了该场景的微分对策制导律,并且根据权重系数的取值定义了三种制导律:最优追赶制导律、逃脱-追赶制导律和复合制导律。最优追赶制导律容易被护卫弹拦截,逃脱-追赶制导律容易造成导弹和飞行器的零控脱靶量急剧增大而使得攻击失败,复合制导律很难选择合适的权重系数。针对以上不足,提出了两种改进的制导律,并对该两种制导律的适用情况进行了分析。通过非线性模型仿真,验证了这两种方法的可行性。该两种制导律目的性强,攻击导弹可以躲避护卫弹进而攻击飞行器。

**关键词**:护卫弹;导弹;飞行器;微分对策;零控脱靶量;制导律
**中图分类号**:V448.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2018)03-007-08

# Differential game guidance laws against active defense aircraft

*SUN Qilong*, *QI Naiming*, *ZHAO Jun*, *LIN Haiqi*
(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract**: Evasion and pursuit guidance laws for the missile attacking the defense aircraft were derived based on the differential game theory. Three guidance laws which are optimal-pursuit guidance law, evasion-pursuit guidance law and composite guidance law respectively were derived using a traditional cost function by defining different weight coefficients. If the missile uses the optimal-pursuit guidance law, it can be intercepted easily. When the missile uses the evasion-pursuit guidance law, the zero miss distance between the missile and aircraft will increase sharply; thus the missile fails to attack the aircraft easily. When the missile uses the composite guidance law, it is hard to choose the reasonable weighting parameters. To overcome these deficiencies, two new guidance laws were investigated and the sufficient conditions for the missile winning the game were analyzed. The two new guidance laws were verified by the nonlinear simulation and the results show that the proposed guidance laws can help the attacking missile evade the defender and attack the aircraft successfully.

**Key words**: defender; missile; aircraft; differential game; zero miss distance; guidance law

传统的导弹攻防对抗场景中一般包含两个参与者:导弹和目标飞行器;文献[1-2]研究了一对一的攻防问题。攻防对抗的升级导致参与者增多,多对一的制导律逐渐成为研究热点[3-7]。多对一的场景大多都是用微分对策理论进行分析的。

几年来提出的主动防御问题是多对一问题中三方博弈的典型场景。该场景包括一个攻击导弹,一个飞行器(目标)和一个由飞行器发射的护卫弹。文献[8-9]利用相似的原理推导了一种保护目标的方法:控制护卫弹一直处于目标和导弹连线之间来拦截导弹;仿真结果证明,护卫弹利用该方法相比于一对一的制导律更易拦截来袭导弹。文献[10]研究了一种判断导弹制导律的方法,在此基础上利用护卫弹和目标互相合作去拦截导弹。文献[11-13]利用线性模型推导了二次型最优的合作制导律以对抗来袭导弹;仿真结果证明,在来袭导弹制导律已知的情况下,目标可以将导弹向着护卫弹容易拦截的地方引诱,同时护卫弹也会通过与目标合作预知导弹的轨迹,进而向着预测的拦截点运动;因此大大减小了护卫弹拦截导弹需要的加速度。Garcia 等利用非线性模型推导了目标和护卫弹相互合作的制导律以此来拦截导弹提高目标生存率[14-16]。随后 Kumar 等也利用非线性模型推导了最优的合作制导律[17]。特别地,Kumar 采用了一个减小脱靶量的指标:零控脱靶速度。该指标可以用来减小时间估计误差带来的脱靶量。

* **收稿日期**:2017-03-28
**基金项目**:国家自然科学基金资助项目(11672093)
**作者简介**:孙启龙(1989—),男,黑龙江哈尔滨人,博士研究生,E-mail:sunqilong27@163.com;
齐乃明(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:qinaimingok_hit@163.com

由于护卫弹对攻击导弹的巨大威胁,对抗护卫弹的制导律也随之发展。近年来对抗主动防御的制导律研究较少,Ratnoo 等在护卫弹和攻击导弹具有不同制导律的情况下,研究了导弹可以完成攻击目标的条件[18]。Rubinsky 等利用微分对策理论推导了攻击弹的制导律;该制导律是攻击弹先逃避到安全的边界线,然后利用一对一的最优追赶策略去完成攻击目标的任务[19-20]。虽然 Rubinsky 用微分对策研究了攻击导弹的制导律;但该制导律对于导弹和目标初始零控脱靶量较大的情况并不合适。本文针对不同的初始条件,设计了两种新的制导律。

## 1　模型建立

图 1 是主动防御场景中的导弹、护卫弹和飞行器(目标)的运动几何关系。图中:$A$、$T$、$D$ 分别代表导弹、目标和护卫弹;$R_{AT}$ 和 $R_{AD}$ 分别为导弹与目标之间和导弹与护卫弹之间的距离;$V_A$、$V_T$、$V_D$ 分别为导弹、目标和护卫弹的速度;$\gamma_A$、$\gamma_T$、$\gamma_D$ 分别为导弹、目标和护卫弹的航向角;$\lambda_{AT}$ 和 $\lambda_{AD}$ 代表导弹和目标以及导弹和护卫弹的视线角。$LOS_{AT}$ 和 $LOS_{AD}$ 分别为导弹和目标以及导弹和护卫弹的视线。假设导弹和护卫弹以及导弹和目标之间可以获取对方的位置,速度信息。

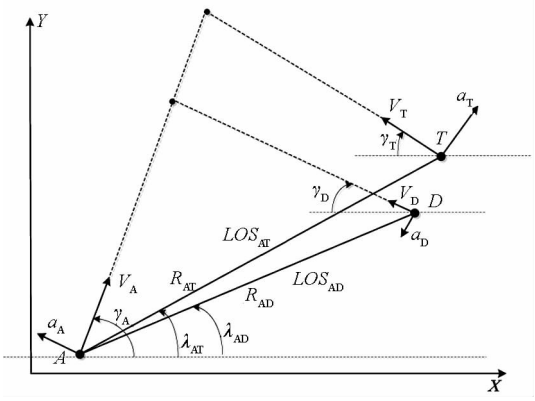



图 1　运动几何关系

Fig. 1　Kinematic geometry

导弹和目标的相对接近速度 $\dot{R}_{AT}$ 以及导弹和护卫弹的相对接近速度 $\dot{R}_{AD}$ 分别表示为:

$$\dot{R}_{AT}=V_A\cos(\gamma_A-\lambda_{AT})+V_T\cos(\gamma_T+\lambda_{AT}) \quad (1)$$

$$\dot{R}_{AD}=V_A\cos(\gamma_A-\lambda_{AD})+V_D\cos(\gamma_D+\lambda_{AD}) \quad (2)$$

视线角速度 $\dot{\lambda}_{AT}$ 和 $\dot{\lambda}_{AD}$ 为:

$$\dot{\lambda}_{AT}=\frac{V_T\sin(\gamma_T+\lambda_{AT})-V_A\sin(\gamma_A-\lambda_{AT})}{R_{AT}} \quad (3)$$

$$\dot{\lambda}_{AD}=\frac{V_D\sin(\gamma_D+\lambda_{AD})-V_A\sin(\gamma_A-\lambda_{AD})}{R_{AD}} \quad (4)$$

假设三个参与者的自动驾驶仪满足线性动力学:

$$\dot{x}_i=A_ix_i+b_iu_i' \quad i=\{A,T,D\} \quad (5)$$

$$a_i=C_ix_i+d_iu_i' \quad i=\{A,T,D\} \quad (6)$$

假设三者都具有理想的自动驾驶仪动态特性,则 $A_i$、$b_i$、$C_i$ 为 0;$d_i$ 为 1。定义 $u_i'\leqslant\|u_i'\|^{\max}$,上标 max 代表该加速度的最大值。航向角速度 $\dot{\gamma}_i$ 满足:

$$\dot{\gamma}_i=\frac{u_i'}{V_i} \quad i=\{A,T,D\} \quad (7)$$

为了简化模型,在初始视线进行线性化。$y_{AT}$ 为导弹和目标垂直于初始视线 $LOS_{AT_0}$ 的相对位移。$y_{AD}$ 为导弹和护卫弹垂直于初始视线 $LOS_{AD_0}$ 的相对位移。导弹垂直于初始视线 $LOS_{AT_0}$ 的加速度为 $u_{AL}$,目标垂直于 $LOS_{AT_0}$ 的加速度为 $u_{TL}$,护卫弹垂直于 $LOS_{AD_0}$ 的加速度为 $u_{DL}$,它们分别满足:

$$\begin{cases}u_{AL}=u_A'\cos(\gamma_{A_0}-\lambda_{AT_0})\\ u_{TL}=u_T'\cos(\gamma_{T_0}+\lambda_{AT_0})\\ u_{DL}=u_D'\cos(\gamma_{D_0}+\lambda_{AD_0})\end{cases} \quad (8)$$

式(8)中的下标 0 表示对应的初始状态,且后文中下标 0 具有同样的意义。定义 $u_A'\cos(\gamma_{A_0}-\lambda_{AT_0})$ 为 $u_A$,$u_T'\cos(\gamma_{T_0}+\lambda_{AT_0})$ 为 $u_T$,$u_D'\cos(\gamma_{D_0}+\lambda_{AD_0})$ 为 $u_D$,且 $u_i\leqslant u_i^{\max}(i=\{A,T,D\})$。

选取状态变量:

$$\boldsymbol{x}=[y_{AT}\quad \dot{y}_{AT}\quad y_{AD}\quad \dot{y}_{AD}]^T \quad (9)$$

状态方程为:

$$\dot{x}=\begin{cases}\dot{y}_{AT}=x_2\\ \ddot{y}_{AT}=u_T-u_A\\ \dot{y}_{AD}=x_4\\ \ddot{y}_{AD}=u_D1(t)-u_Ab\end{cases} \quad (10)$$

其中,$b=\cos(\gamma_{A_0}-\lambda_{AD_0})/\cos(\gamma_{A_0}-\lambda_{AT_0})$。假设导弹和护卫弹相遇后,护卫弹消失。用 $1(t)$ 表示护卫弹的消失函数,$1(t)$ 表达式为:

$$1(t)=\begin{cases}1 & t<t_f^{AD}\\ 0 & t\geqslant t_f^{AD}\end{cases} \quad (11)$$

式中,$t_f^{AD}$ 是导弹和护卫弹的相遇时间。

状态方程可以表示为:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}[u_T\quad u_D]^T+\boldsymbol{C}u_A \quad (12)$$

式中:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1(t)\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\-b\end{bmatrix}$$

由于在视线角方向进行了线性化,可以认为碰撞时间是固定的。导弹和目标的碰撞时间以及导弹和护卫弹的碰撞时间是 $t_f^{\mathrm{AT}}$ 和 $t_f^{\mathrm{AD}}$,二者满足:

$$t_f^{\mathrm{AT}}=\begin{cases}R_{\mathrm{AT}_0}/\dot{R}_{\mathrm{AT}_0}\\ t_f^{\mathrm{AD}}=R_{\mathrm{AD}_0}/\dot{R}_{\mathrm{AD}_0}\end{cases}\tag{13}$$

导弹和目标以及导弹和护卫弹的剩余相遇时间为 $t_{\mathrm{go}}^{\mathrm{AT}}$ 和 $t_{\mathrm{go}}^{\mathrm{AD}}$,二者满足:

$$t_{\mathrm{go}}^{i}=t_f^{i}-t\quad i=\{\mathrm{AT},\mathrm{AD}\}\tag{14}$$

## 2　一对一微分对策制导律

### 2.1　零控脱靶量

导弹和目标之间的零控脱靶量(Zero Effort Miss, ZEM)以及导弹和护卫弹之间的零控脱靶量为 $Z_{\mathrm{AT}}(t)$ 和 $Z_{\mathrm{AD}}(t)$,二者分别满足:

$$\begin{cases}Z_{\mathrm{AT}}(t)=\boldsymbol{D}_{\mathrm{AT}}\boldsymbol{\Phi}(t_f^{\mathrm{AT}},t)\boldsymbol{x}\\ Z_{\mathrm{AD}}(t)=\boldsymbol{D}_{\mathrm{AD}}\boldsymbol{\Phi}(t_f^{\mathrm{AD}},t)\boldsymbol{x}\end{cases}\tag{15}$$

其中,$\boldsymbol{\Phi}(t_f^{\mathrm{AT}},t)$ 和 $\boldsymbol{\Phi}(t_f^{\mathrm{AD}},t)$ 是式(12)对应的状态转移矩阵,满足:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t_f^{\mathrm{AD}},t)=-\boldsymbol{\Phi}(t_f^{\mathrm{AD}},t)\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{\Phi}(t_f^{\mathrm{AD}},t_f^{\mathrm{AD}})=\boldsymbol{I}\\ \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t_f^{\mathrm{AT}},t)=-\boldsymbol{\Phi}(t_f^{\mathrm{AT}},t)\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{\Phi}(t_f^{\mathrm{AT}},t_f^{\mathrm{AT}})=\boldsymbol{I}\end{cases}\tag{16}$$

矩阵 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{AD}}$ 和 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{AT}}$ 满足:

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}_{\mathrm{AD}}=[0\quad 0\quad 1\quad 0]\\ \boldsymbol{D}_{\mathrm{AT}}=[1\quad 0\quad 0\quad 0]\end{cases}$$

结合式(16),式(15)可写成:

$$\begin{cases}Z_{\mathrm{AD}}(t)=y_{\mathrm{AD}}+\dot{y}_{\mathrm{AD}}(t_f^{\mathrm{AD}}-t)\\ Z_{\mathrm{AT}}(t)=y_{\mathrm{AT}}+\dot{y}_{\mathrm{AT}}(t_f^{\mathrm{AT}}-t)\end{cases}\tag{17}$$

### 2.2　一对一最优制导律

对式(17)求导,可以得到:

$$\begin{cases}\dot{Z}_{\mathrm{AD}}(t)=(t_f^{\mathrm{AD}}-t)[-bu_{\mathrm{A}}+1(t)u_{\mathrm{D}}]\\ \dot{Z}_{\mathrm{AT}}(t)=(t_f^{\mathrm{AT}}-t)(-u_{\mathrm{A}}+u_{\mathrm{T}})\end{cases}\tag{18}$$

如果是导弹和护卫弹之间一对一问题,导弹将努力增大 $|Z_{\mathrm{AD}}(t)|$ 进行逃脱,而护卫弹努力减小 $|Z_{\mathrm{AD}}(t)|$ 进行追捕,导弹和护卫弹之间的各自最优策略为:

$$\begin{cases}u_{\mathrm{A}}^{\Theta}=-\mathrm{sign}[Z_{\mathrm{AD}}(t)b]u_{\mathrm{A}}^{\max}\\ u_{\mathrm{D}}^{\Theta}=-\mathrm{sign}[Z_{\mathrm{AD}}(t)]u_{\mathrm{D}}^{\max}\end{cases}\tag{19}$$

如果是导弹和目标之间的一对一问题,导弹将努力减下 $|Z_{\mathrm{AT}}(t)|$,而目标努力增大 $|Z_{\mathrm{AT}}(t)|$,导弹和目标之间的各自最优策略为:

$$\begin{cases}u_{\mathrm{A}}^{\Theta}=\mathrm{sign}[Z_{\mathrm{AT}}(t)]u_{\mathrm{A}}^{\max}\\ u_{\mathrm{T}}^{\Theta}=\mathrm{sign}[Z_{\mathrm{AT}}(t)]u_{\mathrm{T}}^{\max}\end{cases}\tag{20}$$

## 3　导弹 – 护卫弹 – 目标制导律

### 3.1　传统制导律

导弹在整个任务过程中需要躲避护卫弹并且追击目标,因此导弹需要使 $Z_{\mathrm{AD}}(t_f^{\mathrm{AD}})$ 尽量增大并且 $Z_{\mathrm{AT}}(t_f^{\mathrm{AT}})$ 尽量减小。传统的性能指标为:

$$J=-\frac{1}{2}\alpha[Z_{\mathrm{AD}}(t_f^{\mathrm{AD}})]^2+\frac{1}{2}\beta[Z_{\mathrm{AT}}(t_f^{\mathrm{AT}})]^2\tag{21}$$

式中,$\alpha$ 和 $\beta$ 是大于 0 的权重系数。

哈密顿函数为:

$$H=\lambda_1\dot{Z}_{\mathrm{AD}}(t)+\lambda_2\dot{Z}_{\mathrm{AT}}(t)\tag{22}$$

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-\dfrac{\partial H}{\partial Z_{\mathrm{AD}}}=0\\ \lambda_1(t_f^{\mathrm{AD}})=\dfrac{\partial J}{\partial Z_{\mathrm{AD}}(t_f^{\mathrm{AD}})}=-\alpha Z_{\mathrm{AD}}(t_f^{\mathrm{AD}})\\ \dot{\lambda}_2=-\dfrac{\partial H}{\partial Z_{\mathrm{AT}}}=0\\ \lambda_2(t_f^{\mathrm{AT}})=\dfrac{\partial J}{\partial Z_{\mathrm{AT}}(t_f^{\mathrm{AT}})}=\beta Z_{\mathrm{AT}}(t_f^{\mathrm{AT}})\end{cases}\tag{23}$$

式(22)可以改写为:

$$H=[\alpha Z_{\mathrm{AD}}(t_f^{\mathrm{AD}})1(t)t_{\mathrm{go}}^{\mathrm{AD}}b-\beta Z_{\mathrm{AT}}(t_f^{\mathrm{AT}})t_{\mathrm{go}}^{\mathrm{AT}}]\cdot u_{\mathrm{A}}-\alpha Z_{\mathrm{AD}}(t_f^{\mathrm{AD}})1(t)t_{\mathrm{go}}^{\mathrm{AD}}u_{\mathrm{D}}+\beta Z_{\mathrm{AT}}(t_f^{\mathrm{AT}})t_{\mathrm{go}}^{\mathrm{AT}}u_{\mathrm{T}}\tag{24}$$

假设护卫弹和目标之间没有合作,只是采用各自对攻击导弹的最优机动策略,因此闭环的最优制导律为:

$$\begin{cases}u_{\mathrm{A}}^{\Theta}=-\mathrm{sign}[\alpha Z_{\mathrm{AD}}(t)1(t)bt_{\mathrm{go}}^{\mathrm{AD}}-t_{\mathrm{go}}^{\mathrm{AT}}\beta Z_{\mathrm{AT}}(t)]u_{\mathrm{A}}^{\max}\\ u_{\mathrm{T}}^{\Theta}=\mathrm{sign}[Z_{\mathrm{AT}}(t)\beta]u_{\mathrm{T}}^{\max}\\ u_{\mathrm{D}}^{\Theta}=-\mathrm{sign}[Z_{\mathrm{AD}}(t)\alpha 1(t)]u_{\mathrm{D}}^{\max}\end{cases}\tag{25}$$

分析式(25),可以得到:在 $t<t_f^{\mathrm{AD}}$ 时,当 $\alpha\gg\beta$ 时,$u_{\mathrm{A}}^{\Theta}$ 的制导策略就是一对一的最优逃避策略,与式(19)是一样的;此种情况就是导弹先用式(19)的最优逃避策略一直到 $t_f^{\mathrm{AD}}$,然后转为与式(20)一样的最优追赶策略;定义此策略为逃脱 – 追赶制导律(Evasion-Pursuit Guidance Law, EPGL);整个过程目标和护卫弹的制导律是一对一的最优制导律。当 $\beta\gg\alpha$ 时,此时整个过程导弹采取的都是一对一的最优追赶目标策略,此时导弹是忽略护卫弹的存在的;定义这一种策略为最优追赶制导律(Optimal-Pursuit Guidance Law, OPGL)。当 $\alpha,\beta$ 相差不是很大时,得到同时衡量

$Z_{AT}(t)$ 和 $Z_{AD}(t)$ 的制导律，定义为复合制导律（Composite Guidance Law, CGL）；由于同时衡量两个指标，很难选取合适的权重系数，使 $Z_{AD}(t_f^{AD})$ 达到合适的值；因此导弹和护卫弹的脱靶量很难得到保证。进一步分析发现，当 $Z_{AD}(t)$ 和 $Z_{AT}(t)$ 异号时，导弹不管采用上述何种策略都能同时满足躲避护卫弹和攻击目标，示意图如图 2 所示。图中横线代表零轴线，此线在后面的图中具有相同含义。鉴于此种情况非常简单，因此接下来主要讨论 $Z_{AD}(t)$ 和 $Z_{AT}(t)$ 同号的情况。

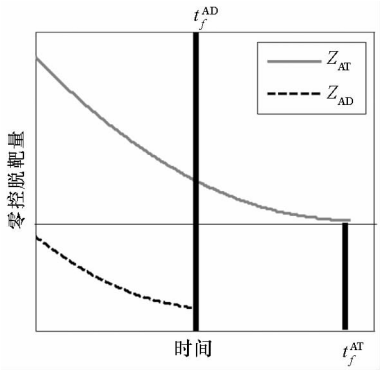



图 2 $Z_{AD}(t)$ 和 $Z_{AT}(t)$ 异号时 ZEM 变化示意图

Fig. 2 Time evolution of ZEM with the signs of $Z_{AD}(t)$ and $Z_{AT}(t)$ being opposite

$Z_{AD}(t)$ 和 $Z_{AT}(t)$ 同号，采用 EPGL 策略时，导弹在逃避护卫弹的同时也会造成对目标脱靶距离的增大，示意图如图 3 所示。同样的导弹采用 OPGL 策略时，导弹在追赶目标的同时，会造成对护卫弹脱靶距离的减小，示意图如图 4 所示。当采用 CGL 策略时，由于涉及权重系数的选取，该制导律将在后续的非线性仿真中进行研究。

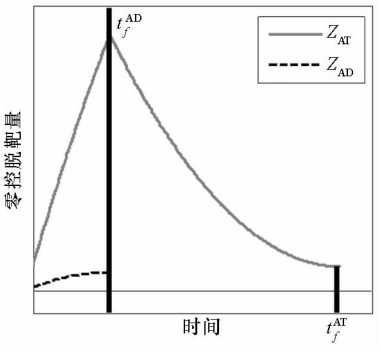



图 3 $Z_{AD}(t)$ 和 $Z_{AT}(t)$ 同号时导弹采用 EPGL 策略 ZEM 变化示意图

Fig. 3 Time evolution of ZEM for using EPGL with the signs of $Z_{AD}(t)$ and $Z_{AT}(t)$ being same

### 3.2 改进型制导律

当 $Z_{AD}(t=0)$ 和 $Z_{AT}(t=0)$ 同号时，鉴于采用 EPGL 策略时会导致 $Z_{AT}(t)$ 在 $t<t_f^{AD}$ 的时间段内急剧增加，致使 $t\geqslant t_f^{AD}$ 时，采用最优追赶策略无法满足导弹和目标的最终脱靶量；采用 OPGL 策略时，导弹忽略了护卫弹，只是对目标运用单一的追赶策略，因此容易被护卫弹拦截；而采用 CGL 策略时很难选取合适的权重系数，使 $Z_{AD}(t_f^{AD})$ 达到合适的值，因此当 $Z_{AD}(t=0)$ 和 $Z_{AT}(t=0)$ 同号时，设计一种新的性能指标：

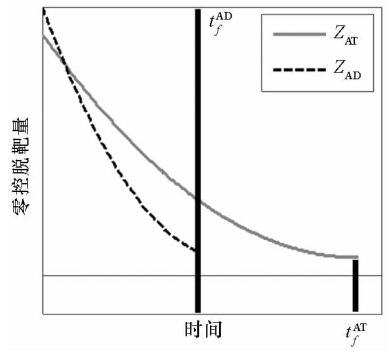



图 4 $Z_{AD}(t)$ 和 $Z_{AT}(t)$ 同号时导弹采用 OPGL 策略 ZEM 变化示意图

Fig. 4 Time evolution of ZEM for using OPGL with the signs of $Z_{AD}(t)$ and $Z_{AT}(t)$ being same

$$J=\begin{cases}\dfrac{\{Z_{AD}(t_f^{AD})-\mathrm{sign}[Z_{AD}(t=0)](R+\delta)\}^2}{2} & t<t_f^{AD}\\ \dfrac{1}{2}[Z_{AT}(t_f^{AT})]^2 & t\geqslant t_f^{AD}\end{cases} \tag{26}$$

其中：$R$ 为护卫弹的杀伤半径，如果导弹和护卫弹的最终脱靶量小于等于 $R$，认为导弹被拦截，反之导弹逃脱。$\delta$ 为一个正值，它的作用是保证导弹和护卫弹的脱靶距离大于 $R$。

$t<t_f^{AD}$ 时，哈密顿函数为：

$$H=\lambda_1\dot{Z}_{AD}(t) \tag{27}$$

同样可以得到：

$$\lambda_1=Z_{AD}(t_f^{AD})-\mathrm{sign}[Z_{AD}(t=0)](R+\delta) \tag{28}$$

式(27)可以改写为：

$$H=\{Z_{AD}(t_f^{AD})-\mathrm{sign}[Z_{AD}(t=0)](R+\delta)\}\cdot t_{go}^{AD}[-bu_A+1(t)u_D] \tag{29}$$

在性能指标中，假设护卫弹和目标使用一对一的最优制导律，即式(19)、式(20)中的制导律。在此前提下，设计攻击者的最优制导律满足使式(26)最小。通过式(29)可以求得导弹的最优闭环制导律为：

$$u_A^{\Theta}=\begin{cases}\mathrm{sign}(b\{Z_{AD}(t)-\mathrm{sign}[Z_{AD}(t=0)](R+\delta)\})\,u_A^{\max}, & t<t_f^{AD}\\ \mathrm{sign}[Z_{AT}(t)]u_A^{\max}, & t\geqslant t_f^{AD}\end{cases} \tag{30}$$

一般此制导律适应于 $Z_{AD}(t=0)$ 和 $Z_{AT}(t=0)$ 同号且 $|Z_{AD}(t=0)|$ 较大的值。这是因为在 $|Z_{AD}(t=0)|$ 较大的前提下,$Z_{AD}(t)$ 达到边界值 $\mathrm{sign}[Z_{AD}(t=0)](R+\delta)$ 更易完成任务。这一点在后面的非线性仿真中会得到验证。此制导律定义为同号边界制导律(Same Sign Boundary Guidance Law, SSBGL)。导弹对应该制导律的示意图如图 5 所示。

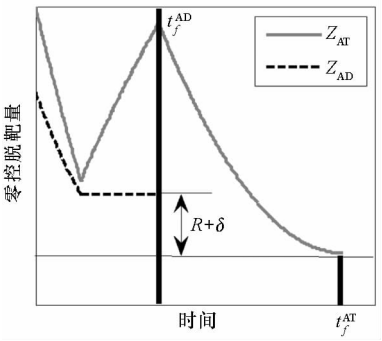



图 5　导弹采用 SSBGL 策略 ZEM 变化示意图

Fig. 5　Time evolution of ZEM for using SSBGL

当 $Z_{AD}(t=0)$ 和 $Z_{AT}(t=0)$ 同号且 $|Z_{AD}(t=0)|$ 是较小的值时,$Z_{AD}(t)$ 达到边界值 $-\mathrm{sign}[Z_{AD}(t_f^{AD})](R+\delta)$ 相对于达到边界值 $\mathrm{sign}[Z_{AD}(t)](R+\delta)$ 对碰撞三角形破坏很小,能更快地完成攻击任务;这一点在后面的非线性仿真中会得到验证。此时设计另外一个新的性能指标:

$$J=\begin{cases}\dfrac{\{Z_{AD}(t_f^{AD})+\mathrm{sign}[Z_{AD}(t=0)](R+\delta)\}^2}{2} & t<t_f^{AD}\\ \dfrac{1}{2}[Z_{AT}(t_f^{AT})]^2 & t\geqslant t_f^{AD}\end{cases} \tag{31}$$

同样地,在性能指标中,假设护卫弹和目标使用一对一的最优制导律;在此前提下,设计攻击者的最优制导律满足使式(31)最小。通过式(31),利用前面相似的步骤,可以求得导弹的最优闭环制导律为:

$$u_A^{\Theta}=\begin{cases}\mathrm{sign}(b\{Z_{AD}(t)+\mathrm{sign}[Z_{AD}(t=0)](R+\delta)\})u_A^{\max} & t<t_f^{AD}\\ \mathrm{sign}[Z_{AT}(t)]u_A^{\max} & t\geqslant t_f^{AD}\end{cases} \tag{32}$$

此制导律定义为异号边界制导律(Opposite Sign Boundary Guidance Law, OSBGL)。导弹对应该制导律的示意图如图 6 所示。

## 4　仿真及分析

本节用非线性仿真实验对推导的制导律进行验证。设定护卫弹的杀伤半径是 80 m;导弹与目标的脱靶距离小于 1 m 视为攻击成功。同时为了保证导弹对护卫弹的逃避距离,取 $\delta$ 为 10 m。初始的仿真参数见表 1。

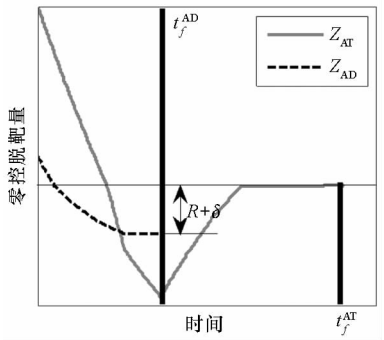



图 6　导弹采用 OSBGL 策略 ZEM 变化示意图

Fig. 6　Time evolution of ZEM for using OSBGL

**表 1　初始仿真参数**

Tab. 1　Initial parameters

| 参数 | 目标 | 导弹 | 护卫弹 |
|---|---|---|---|
| 起始位置 $X_0, Y_0$/km | (9, 0.2) | (0, 0) | (9, 0.2) |
| 初始航向角/(°) | 55 | 0 | 24 |
| 最大加速度/(m/s$^2$) | 40 | 180 | 80 |
| 速度/(m/s) | 300 | 700 | 800 |

### 4.1　OPGL

在表 1 的初始参数下,选取 $\beta\to\infty$, $\alpha=1$,验证 OPGL。图 7 是用 OPGL 进行非线性仿真的三个参与者的运动轨迹示意图。图 8 是采用 OPGL 的剩余时间示意图。用此制导律的交汇时间 $t_f^{AD}$ 和 $t_f^{AT}$ 分别是 6.426 1 s 和12.096 5 s。导弹和护卫弹的脱靶距离是 0.121 m,导弹和目标的脱靶距离是 0.132 m;显然,导弹被护卫弹拦截。由图 8 可以看到两个剩余时间与时间基本是近似线性的关系;但是 $t_{go}^{AT}$ 有一个转折点,此转折点发生在 $Z_{AT}(t)$ 非常接近 0 的地方,转折点之后,导弹和目标的加速度将会出现 bang-bang 现象。因此用该制导律在追击目标的过程中容易被护卫弹拦截。

### 4.2　EPGL

选取 $\beta=2$, $\alpha\to\infty$,验证 EPGL。图 9 是用 EPGL 进行非线性仿真的三个参与者的运动轨迹示意图。很明显,虽然导弹躲避了护卫弹,但是却无法击中目标;这是因为导弹一直用最大加速度躲避护卫弹,导致导弹和目标之间的零控脱靶量急剧增大而难以追赶目标。因此在给定的初始参

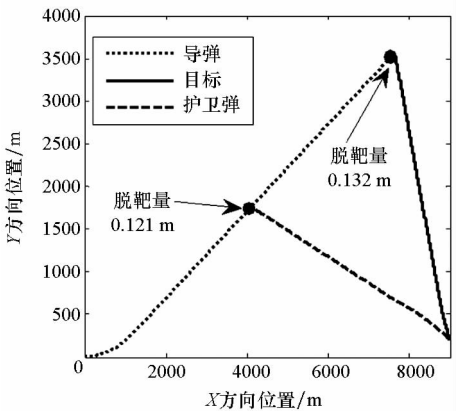



图 7 导弹采用 OPGL 的轨迹

Fig. 7 Trajectories of the three players for using OPGL

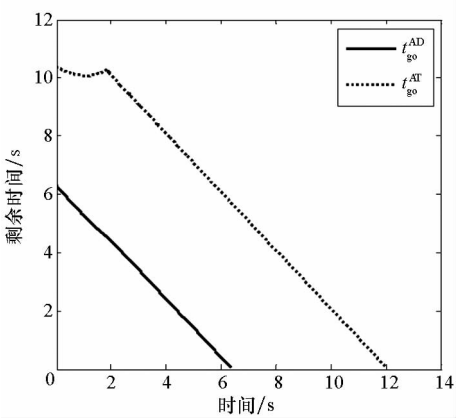



图 8 导弹采用 OPGL 的剩余时间

Fig. 8 Time evolution of time-to-go for using OPGL

数下,EPGL 无法完成攻击任务。

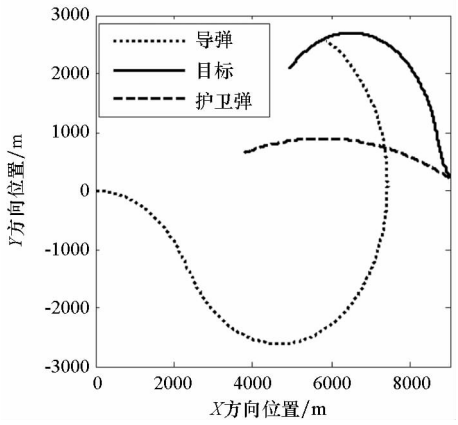



图 9 导弹采用 EPGL 的轨迹

Fig. 9 Trajectories of the three players for using EPGL

### 4.3 CGL

在表 1 给定的参数下,针对 CGL,先选取 $\alpha=8,\beta=2$,图 10 是此种情况下的轨迹示意图。此时脱靶量分别为 0.697 m 和 0.136 m;交汇时间 $t_f^{AD}$ 和 $t_f^{AT}$ 分别是 6.301 2 s 和 13.279 1 s;显然导弹被护卫弹拦截。

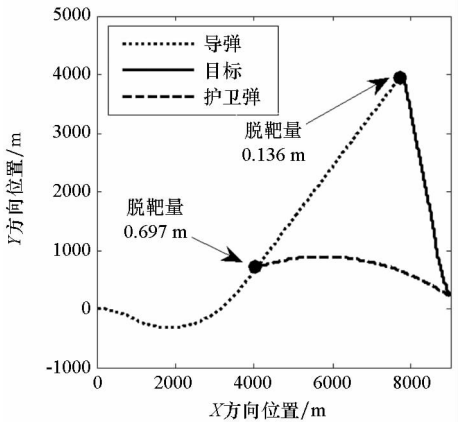



图 10 $\alpha=8,\beta=2$ 时的轨迹

Fig. 10 Trajectories for $\alpha=8,\beta=2$

选取 $\alpha=20,\beta=2$,图 11 是此种情况下的轨迹示意图。虽然导弹躲避了护卫弹,但是很明显导弹攻击目标失败。

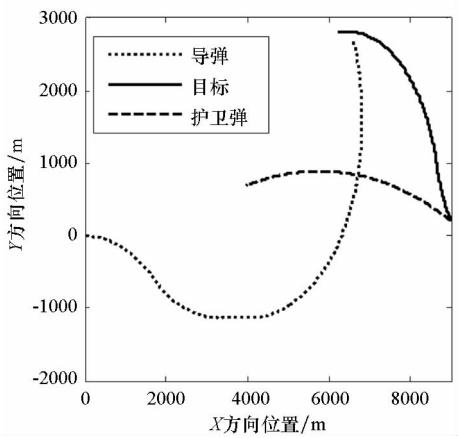



图 11 $\alpha=20,\beta=2$ 时的轨迹

Fig. 11 Trajectories for $\alpha=20,\beta=2$

选取 $\alpha=15,\beta=2$,图 12 是此种情况下的轨迹示意图。此时发现导弹和护卫弹的脱靶量已经远远大于 80 m,导弹和目标的脱靶量为 0.506 m;交汇时间 $t_f^{AT}$ 为 13.478 s;因此导弹可以避开护卫

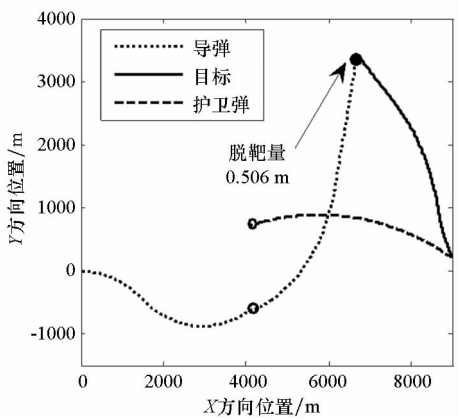



图 12 $\alpha=15,\beta=2$ 时的轨迹

Fig. 12 Trajectories for $\alpha=15,\beta=2$

弹拦截目标。图 13 是剩余时间随时间变化图。由图 13 可知,$t_{go}^{AT}$和时间已经完全不是线性关系。这是因为在此参数条件下,使用 CGL 碰撞三角形破坏严重,攻击时间长,过渡一段时间后新的碰撞三角形建立以后才有近似线性的关系。

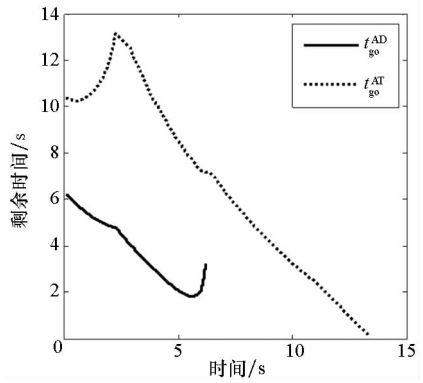



图 13　$\alpha=15,\beta=2$ 时的剩余时间变化

Fig. 13　Time evolution of time-to-go for $\alpha=15,\beta=2$

## 4.4　SSBGL

在表 1 给定的参数下,$Z_{AD}(t=0)$ 为 2258.677 m,$Z_{AT}(t=0)$ 为 2754.075 m。此时 $|Z_{AD}(t=0)|$并不是一个较小的值,适合 SSBGL。图 14 是用 SSBGL 的三个参与者的轨迹示意图;图 15 是用此制导律的剩余时间示意图。用此制导律的交汇时间 $t_f^{AD}$ 和 $t_f^{AT}$ 分别是6.131 1 s和 12.812 0 s。导弹和护卫弹的脱靶距离是 83.081 m,导弹和目标的脱靶距离是 0.402 m;显然,导弹可以躲过护卫弹拦截目标。攻击弹和护卫弹最终脱靶量与 $R$ 存在一定偏差,这是因为制导律是用线性模型推导的,与实际的非线性运动存在误差,但是通过选取合适的 $\delta$ 值,攻击导弹可以完成躲避护卫弹的任务。由图 15 可知,$t_{go}^{AT}$和时间已经不是线性关系;这是因为使用 SSBGL 在躲避护卫弹时导致导弹和目标的碰撞三角形被破坏,经过一段时间过渡后才建立起新的碰撞三角形。但是此方法目的性强,不存在选参数的困扰,而且能够有效地完成攻击任务。

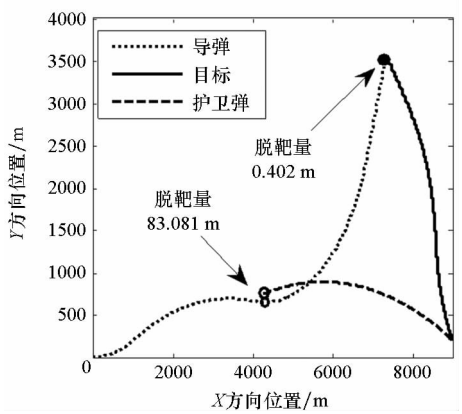



图 14　导弹采用 SSBGL 的轨迹

Fig. 14　Trajectories of the three players for using SSBGL

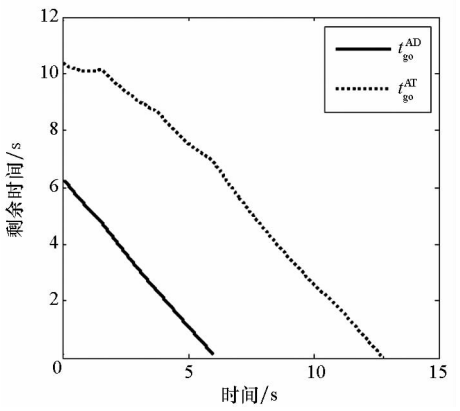



图 15　导弹采用 SSBGL 的剩余时间

Fig. 15　Time evolution of time-to-go for using SSBGL

## 4.5　OSBGL

为了验证 OSBGL 在$|Z_{AD}(t=0)|$较小时对于导弹来说是可行的,将表 1 中的护卫弹航向角变为 8°。此时 $Z_{AD}(t=0)$为 873.179 m,$Z_{AT}(t=0)$为 2754.075 m。

图 16 是用 OSBGL 的三个参与者的轨迹示意图;图 17 是用此制导律的剩余时间示意图。在给定的此组参数下用 OSBGL,导弹和护卫弹的脱靶距离是 84.012 m,导弹和目标的脱靶距离是 0.415 m;交汇时间 $t_f^{AD}$ 和 $t_f^{AT}$ 分别是 6.750 2 s 和 11.593 1 s,因此导弹攻击目标成功。

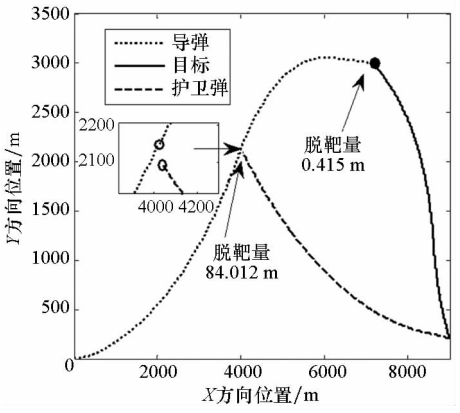



图 16　导弹采用 OSBGL 的轨迹

Fig. 16　Trajectories of the three players for using OSBGL

用非线性模型验证线性模型推导的制导律时往往存在误差,这是因为时间估计是存在误差的。仿真时用 $t_{go}^{AD}$和 $t_{go}^{AT}$替代 $t_f^{AD}$ 和 $t_f^{AT}$,因此 $t_f^{AD}$、$t_f^{AT}$ 是时时更新的;同时初始视线也是实时更新的。当碰撞三角形破坏严重时,时间估计误差相对较大;虽然时间估计存在误差,但通过仿真发现本文制

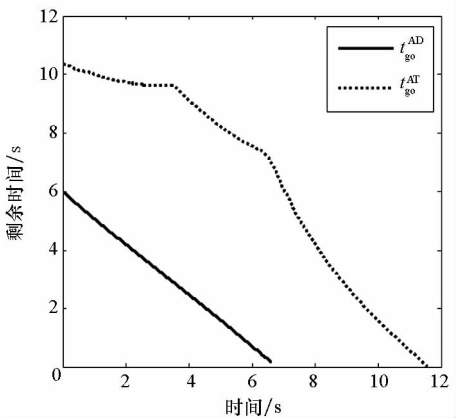



图17 导弹采用OSBGL的剩余时间

Fig. 17 Time evolution of time-to-go for using OSBGL

导律是可以实现规避护卫弹且攻击目标的。

## 5 结论

本文研究了导弹攻击主动防御飞行器的策略,根据传统的性能指标推导了三种制导律,通过仿真实验证明OPGL忽略了护卫弹,导弹容易被拦截;EPGL容易导致导弹和目标的零控脱靶量在导弹和护卫弹相遇之前急剧上升而使攻击失败;CGL由于很难选择合适的权重系数,导致导弹被拦截。鉴于以上制导律的缺陷基于微分对策理论以零控脱靶量为指标,推导了两种新的制导律SSBGL和OSBGL;虽然制导律是在线性模型下推导的,但是通过仿真证明该两种制导律是切实可行的。SSBGL和OSBGL目的性强,攻击导弹可以直接规避护卫弹到安全距离。因此导弹根据初始情况选择两制导律中的其一可以有效规避护卫弹拦截飞行器。

## 参考文献(References)


[1] 雷虎民, 张旭, 董飞垚, 等. 零控脱靶量有限时间收敛制导律[J]. 国防科技大学学报, 2015, 37(3): 136 – 141.
LEI Humin, ZHANG Xu, DONG Feiyao, et al. Finite time convergent zero-effort miss guidance law [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2015, 37(3): 136 – 141. (in Chinese)

[2] 刘延芳, 齐乃明, 夏齐, 等. 基于非线性模型的大气层内拦截弹微分对策制导律[J]. 航空学报, 2011, 32(7): 1171 – 1179.
LIU Yanfang, QI Naiming, XIA Qi, et al. Differential game guidance law for endoatmospheric interceptor missiles based on nonlinear model [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(7): 1171 – 1179. (in Chinese)

[3] Zhao S Y, Zhou R. Cooperative guidance for multimissile salvo attack [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008, 21(6): 533 – 539.

[4] 赵世钰, 周锐. 基于协调变量的多导弹协同制导[J]. 航空学报, 2008, 29(6): 1605 – 1611.
ZHAO Shiyu, ZHOU Rui. Cooperative guidance for multimissiles using cooperative variables[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2008, 29(6): 1605 – 1611. (in Chinese)

[5] Huang H M, Zhang W, Ding J, et al. Guaranteed decentralized pursuit-evasion in the plane with multiple pursuers [C]//Proceedings of 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, 2011: 4835 – 4840.

[6] Liu Y F, Qi N M, Tang Z W. Linear quadratic differential game strategies with two-pursuit versus single-evader [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2012, 25(6): 896 – 905.

[7] Kumkov S S, Ménec S L, Patsko V S. Solvability sets in pursuit problem with two pursuers and one evader[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2014, 47(3): 1543 – 1549.

[8] Ratnoo A, Shima T. Line-of-sight interceptor guidance for defending an aircraft[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2011, 34(2): 522 – 532.

[9] Yamasaki T, Balakrishnan S N, Takano H. Modified command to line-of-sight intercept guidance for aircraft defense[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2013, 36(3): 898 – 902.

[10] Shaferman V, Shima T. Cooperative multiple-model adaptive guidance for an aircraft defending missile [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2010, 33(6): 1801 – 1813.

[11] Perelman A, Shima T, Rusnak I. Cooperative differential game strategies for active aircraft protection from a homing missile[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2011, 34(3): 761 – 773.

[12] Shima T. Optimal cooperative pursuit and evasion strategies against a homing missile[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2011, 34(2): 414 – 425.

[13] Prokopov O, Shima T. Linear quadratic optimal cooperative strategies for active aircraft protection [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2013, 36(3): 753 – 764.

[14] Garcia E, Casbeer D W, Pham K, et al. Cooperative aircraft defense from an attacking missile[C]// Proceedings of 53rd IEEE Conference Decision and Control, 2014: 2926 – 2931.

[15] Garcia E, Casbeer D W, Pachter M. Active target defense differential game with a fast defender[C]//Proceedings of American Control Conference, 2015: 3752 – 3757.

[16] Garcia E, Casbeer D W, Pachter M. Cooperative strategies for optimal aircraft defense from an attacking missile [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2015, 38(8): 1510 – 1520.

[17] Kumar S R, Shima T. Cooperative nonlinear guidance strategies for aircraft defense [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2017, 40(1): 124 – 138.

[18] Ratnoo A, Shima T. Guidance strategies against defended aerial targets [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2012, 35(4): 1059 – 1068.

[19] Rubinsky S, Gutman S. Three player pursuit and evasion conflict[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 37(1): 98 – 110.

[20] Rubinsky S, Gutman S. Three body guaranteed pursuit and evasion[C]//Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 2012.