doi:10.11887/j.cn.201803008 http://journal.nudt.edu.cn

评估航空重力系统误差及向下延拓的逆泊松半参数方法*

赵启龙[1,2],李建成[1],徐新禹[1],于 男[1]
(1. 武汉大学 测绘学院,湖北 武汉 430079;
2. 武汉大学 地球空间环境与大地测量教育部重点实验室,湖北 武汉 430079)

摘 要:常用航空重力系统误差事后处理方法需外部重力数据,但很多地区无外部重力数据。研究发现,半参数模型可在无外部数据时估计系统误差。先用自然样条函数为系统误差建模,后用补偿最小二乘法和光滑参数求解,最后用广义交叉核实法(不需要先验信息)选取光滑参数。将半参数模型用于向下延拓逆泊松积分,建立逆泊松半参数混合模型,既可无外部重力时估计系统误差,又可向下延拓。实验结果表明:无外部重力时逆泊松积分和最小二乘配置法受系统误差影响最大,向下延拓精度最差;正则化算法可减弱系统误差影响,向下延拓精度较好;逆泊松半参数混合模型可估计系统误差,向下延拓精度最好。

关键词:半参数模型;逆泊松积分;向下延拓;系统误差
中图分类号:P223 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2018)03-049-06

Inverse Poisson integral semi-parametric approach of estimating airborne gravity systematic error and downward continuation

ZHAO Qilong[1,2], *LI Jiancheng*[1], *XU Xinyu*[1], *YU Nan*[1]
(1. School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China;
2. Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy of Ministry of Education, Wuhan University, Wuhan 430079, China)

Abstract: The existing systematic errors processing method of airborne gravity demands external gravity data, but many areas do not have external gravity data. However, semi-parameter model can estimate the systematic errors without external data. Firstly, the systematic errors were modeled by using natural spline function. Then the compensation least squares method was used to estimate the parameter and the natural spline function. The smooth parameter was used to balance them. More importantly, the generalized cross validation method to determine the smooth parameter does not need prior information. Therefore, the semi-parameter model was applied in the inverse Poisson integral to estimate systematic errors and downward continuation in one step. The numerical test results show that the inverse Poisson integral and least square collocation cannot estimate the systematic errors. The regularization method based on the inverse Poisson integral can reduce systematic error effect. The semi-parameter combine inverse Poisson integral model can estimate the systematic errors and improve downward continuation accuracy at the same time without external gravity data.

Key words: semi-parametric model; inverse Poisson integral; downward continuation; systematic errors

航空重力系统误差按照成因大致分为三类:第一类为观测误差(停机坪基准值相关的联测误差、与比力初值相关的观测误差),第二类是标定误差(格值、交叉耦合系数、摆杆尺度因子的标定误差),第三类是其他改正过程中的模型化误差[1]。数值上可分成恒值系统误差(偏差)和变值系统误差(漂移)[2-6]。而系统误差会随着仪器、观测方法、基准等发生变化,需事后处理[7-8]。事后处理方法有交叉测线平差、重复测线和相邻测线比较等,先用外部重力异常确定交叉测线、重复测线和相邻测线的精度,后比较它们与正常测线之间的差值,再改正正常测线系统误差,本质需要外部重力数据[4-5,7]。比如美国 Alabama 和 Louisiana 航空重力项目,由于其本身不含有重复测线和相邻测线,且交叉测线精度较差,使得数据含有系统误差,考虑北美地区有较高精度的外部重力数据,便直接用外部重力数据来改正偏差[3]。但是,极区或者高山地区进行航空重力测量时,并没有高精度的外部重力异常,系统误差改

* **收稿日期**:2017-04-26
基金项目:国家重点基础研究发展计划资助项目(2013CB733301);国家高技术研究发展计划资助项目(2013AA122502);国家自然科学基金资助项目(41374022);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2015214020202)
作者简介:赵启龙(1988—),男,河南平顶山人,博士研究生,E-mail:zhaoqilong@whu.edu.cn;
李建成(通信作者),男,教授,博士,中国工程院院士,E-mail:jcli@sgg.whu.edu.cn

正甚至发现是个难题。

Moritz 曾将重力测量中的系统误差作为随机变量研究[9]。孙中苗根据分析实验,利用较优的水平加速度改正方法减小系统误差。通过查阅资料发现,近年来半参数模型已成为处理系统误差的有效手段:王振杰等利用半参数模型分析 GPS 基线中的系统误差;赵建虎等将半参数模型用于海洋测绘,研究多波束测量系统误差削弱方法;丁士俊等使用基于自然样条函数的半参数模型估计系统误差;Fessler 曾提出"不使用先验信息"估计系统误差方法,即半参数模型[10-11]。本文拟将半参数模型应用于逆泊松积分[6,9,12-18],建立逆泊松半参数混合模型,在无外部重力时估计系统误差。

1 模型

将半参数模型应用于逆泊松积分,建立逆泊松半参数混合模型,可将估计系统误差及向下延拓一步完成。

1.1 逆泊松积分

向下延拓可被认为是泊松积分的逆运算,球坐标下的泊松积分方程为:

$$\Delta g^{\mathrm{air}}(r,\varphi,\lambda) = \frac{R^2(r^2-R^2)}{4\pi r}\cdot \int_{\varphi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\lambda'=0}^{2\pi}\frac{\Delta g^{\mathrm{land}}(R,\varphi',\lambda')}{l^3(r,\varphi,\lambda;R,\varphi',\lambda')}\cos\varphi'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}\lambda' \quad (1)$$

式中:$\Delta g^{\mathrm{air}}(r,\varphi,\lambda)$,$\Delta g^{\mathrm{land}}(R,\varphi',\lambda')$分别为飞行点和地面点的重力异常值;$R$ 是地球平均半径;$r=R+h$,即地球平均半径和飞行高度之和;φ,λ 和 φ',λ'分别是飞行点和地面点的纬度和经度;l 为距离。

$$l=\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\psi} \quad (2)$$

式中,ψ 为球面角度。

$$\cos\psi=\sin\varphi\sin\varphi'+\cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda-\lambda') \quad (3)$$

逆泊松积分模型可表示为:

$$\Delta g^{\mathrm{air}}(r,\varphi,\lambda)=\sum_{j=1}^{N}B_{ij}\Delta g^{\mathrm{land}}(R,\varphi',\lambda') \quad (4)$$

式中,B_{ij} 是逆泊松积分设计矩阵元素[13,14,16,19-21],$i=1,2,\cdots,M$(M 为空中点数),N 是地面点数。

$$B_{ii}=\frac{R}{4\pi r_i}\left\{2\pi\left[\frac{r_i+R}{r_i}\left(1-\frac{r_i-R}{l(r_i,\psi_0,R)}\right)\right]-\sum_{j=1}^{i-1}R\frac{r^2-R^2}{l^3(r,\psi,R)}\Delta\sigma_j-\sum_{j=i-1}^{N_c}R\frac{r^2-R^2}{l^3(r,\psi,R)}\Delta\sigma_j\right\} \quad (5)$$

$$B_{ij}=\begin{cases}\dfrac{R^2}{4\pi r_i}\cdot\dfrac{r^2-R^2}{l^3(r,\psi,R)}\Delta\sigma_j & \psi_{ij}\leqslant\psi_0\\ 0 & \psi_{ij}>\psi_0\end{cases} \quad (6)$$

其中:$\Delta\sigma_j$ 为网格面积;ψ_0 为内区范围,取值为1°。

由于实际航空重力数据有限,计算时需将球面积分计算分为远区和近区,近区是以积分点为中心、半径为 ψ_0 的球冠区域,根据经验,近区为1°,远区为近似球的剩余部分 $\sigma-\sigma_0$。将空中重力异常减去远区影响得到空中重力异常残差,平差计算得到地面重力异常。

1.2 逆泊松半参数混合模型

影响观测量的因素可分为两部分:一部分因素与观测量的关系是已知的,可通过经验或数学关系式用参数表达;另一部分看成对观测量的某种干扰,如系统误差,没有理由将其归入偶然误差项。半参数模型的提出正是为了解决此类问题。其模型形式为:

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{BX}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{\Delta} \quad (7)$$

式中:$\boldsymbol{L}$ 为观测向量;$\boldsymbol{X}$ 为参数向量;$\boldsymbol{\Delta}$ 为 n 维偶然误差向量;$\boldsymbol{S}=[s_1\quad s_2\quad\cdots\quad s_n]^{\mathrm{T}}$ 是系统误差向量,s_i 是某些特定量 t_i 的函数。

设 $s(t)$ 为区间 $[t_1,t_n]$ 上的自然样条函数[22-26]。$t_i(i=1,\cdots,n)$ 为节点,且 $t_1<t_i<t_n$。满足插值条件:

$$s(t_i)=s_i \quad (8)$$

航空重力系统误差近似光滑曲线,而自然样条函数可较好拟合曲线函数。

半参数模型应用于逆泊松积分时,系数矩阵即为逆泊松积分的设计矩阵。采用补偿最小二乘法,可表示为:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n}[L_i-\boldsymbol{BX}-s(t_i)]^2+\alpha_S\int_{t_1}^{t_n}[s''(t)]^2\mathrm{d}t\right\} \quad (9)$$

式中:第一项是残差平方和。光滑参数 $\alpha_S>0$;α_S 较小时,主要贡献是残差平方和,系统误差估计值接近于观测量,极限情况下,当 $\alpha_S\to0$ 时,$\hat{\boldsymbol{s}}$ 趋近于观测量的直线内插;如果 α_S 较大,自然样条补偿项在式(9)中起主要作用,这时 $\hat{\boldsymbol{s}}$ 有较小的曲率。第二项代表系统误差补偿项,可表达为:

$$\alpha_S\int_{t_1}^{t_n}[s''(t)]^2\mathrm{d}t=\alpha_S\hat{\boldsymbol{s}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{FG}^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}s \quad (10)$$

式中,$\boldsymbol{F}$(元素为 f_{ij})和 $\boldsymbol{G}$(元素为 g_{ij})分别是 $n\times(n-2)$ 和 $(n-2)\times(n-2)$ 阶矩阵,矩阵中的元素值由 t_i 之间的间隔决定,设 $h_i=t_{i+1}-t_i(i=1,2,\cdots,n-1)$,则

$$f_{ij}=\begin{cases}h_j^{-1} & i=j\\ -(h_j^{-1}+h_{j+1}^{-1}) & i=j+1\\ h_{j+1}^{-1} & i=j+2\\ 0 & \text{others}\end{cases} \quad (11)$$

$$g_{ij}=\begin{cases}(h_{i-1}+h_i)/3 & i=j,j=2\cdots n-1\\ h_{i+1}/6 & i=j-1,j=2\cdots n-2\\ h_i/6 & i=j+1,j=1\cdots n-3\\ 0 & \text{others}\end{cases} \tag{12}$$

α_S 是大于零的光滑参数,在参数和自然样条函数补偿项之间起平衡作用,采用广义交叉核实法[25-26],进而得到向下延拓值和系统误差估值。

$$\hat{\boldsymbol{X}}=[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})\boldsymbol{B}]^{-1}[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})\boldsymbol{L}] \tag{13}$$

$$\hat{\boldsymbol{s}}=(\boldsymbol{P}+\alpha_S\boldsymbol{K})^{-1}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{X}}) \tag{14}$$

估计系统误差时分以下两种情况:

有外部重力异常时(通常由地面或海面重力异常向上延拓得到,或者实验区域内重力场模型得到),传统方法利用外部重力异常求测线偏差;逆泊松半参数混合模型可利用外部重力异常更精确地估计系统误差,详细参见实验步骤。

无外部重力异常时,传统方法不能估计系统误差,但逆泊松半参数混合模型可以。它利用自然样条函数表示系统误差,再用补偿最小二乘法和光滑参数的优化算法,估计系统误差和向下延拓一步完成,详细参见 2.2 节实验步骤。

2　数值实验

2.1　数据说明

实验区域是中外专家研究航空重力向下延拓的重要实验地区,它处于陆海交界处,涵盖多种分布类型的重力异常,对研究航空重力向下延拓具有代表性。为全面验证方法在山区的有效性,另随机选取某山区进行实验。

飞行高度为 6.3 km,格网大小为 6′,向下延拓高度差为 6.3 km。数据选用 EGM2008 全球重力位模型(2160 阶次)生成[2, 26],模型生成空中重力异常后,加入偶然误差和系统误差,形成仿真空中重力异常值 Δg_{h}。偶然误差标准差为 2 mGal,系统误差 s_{simu}(实验中称为系统误差真值)的计算方法参考文献[5],统计信息见表 1。检核值用 EGM2008 模型生成的地面重力异常。

2.2　实验目的和步骤

实验目的为:在无外部重力时,验证逆泊松半参数混合模型一步估计系统误差和向下延拓的可行性;将逆泊松半参数混合模型与传统航空重力系统误差处理方法比较;将逆泊松半参数混合模型与其他向下延拓方法比较。

表 1　仿真重力异常统计情况

Tab. 1　Statistics of simulation gravity anomalies　mGal

	最大值	最小值	平均值	标准差
仿真空中重力异常值 Δg_{h}	40.727	−80.192	−9.575	24.212
地面重力异常值 Δg_0	34.913	−101.751	−29.056	32.644
模型空中重力异常值(未加入误差)	35.037	−84.010	−15.232	24.117

步骤 1:利用移去恢复理论,取 EGM2008 重力场模型的 360 阶作为参考模型,得到参考重力异常值 $\Delta g_{\mathrm{h_rcr}}$,从仿真空中重力异常值 Δg_{h} 中移去 $\Delta g_{\mathrm{h_rcr}}$,得到残差空中重力异常值 $\delta\Delta g_{\mathrm{h}}$。

步骤 2:有外部重力异常时,将仿真重力异常值 Δg_{h} 减去外部重力异常数据(采用 EGM2008 模型计算的空中重力异常值)得到 $\Delta g_{\mathrm{h_res}}$,将 $\Delta g_{\mathrm{h_res}}$ 代替逆泊松半参数混合模型中的观测值,将得到的系统误差与传统方法的进行比较(见表 2)。

表 2　系统误差估计值和系统误差真值统计情况(有外部重力)

Tab. 2　Statistics of systematic errors estimated values and true values (with external gravity)　mGal

	最大值	最小值	平均值	标准差
s_{simu}	7.882	3.360	5.621	1.306
系统误差估计值(半参数模型)	8.066	3.530	5.636	1.314
系统误差估计值(半参数模型)减去 s_{simu}	0.196 4	−0.135	0.015	0.108
系统误差估计值(传统方法)	3.000	3.000	3.000	0.000
系统误差估计值(传统方法)减去 s_{simu}	−0.360	−4.881	−2.620	1.306

步骤 3:无外部重力异常时,将残差空中重力异常值 $\delta\Delta g_{\mathrm{h}}$ 作为逆泊松半参数混合模型观测值,估计系统误差并向下延拓,得到残差地面重力异常值 $\delta\Delta g_{0_\text{半参}}$,利用广义交叉核实法搜索平滑参数(见表 3),并将得到的系统误差估值与系统误差真值 s_{simu} 进行比较(见表 4)。

表 3 向下延拓值与地面重力异常值的差值统计(无外部重力)

Tab. 3 Statistics of differences between downward continuation values and ground gravity anomalies (without external gravity) mGal

方法	平均值	标准差	均方根	平滑参数	正则化参数
方法 1	5.619	6.531	8.620		
方法 2	2.009	6.333	7.027		3.184
方法 3	5.485	6.412	8.087		
方法 4	0.006	6.252	6.255	1.201	

步骤 4:无外部重力异常时,使用基于逆泊松积分的正则化算法对残差空中重力异常值 $\delta\Delta g_h$ 向下延拓,得到残差地面重力异常值 $\delta\Delta g_{0_正则}$。利用最小二乘配置对残差空中重力异常值 $\delta\Delta g_h$ 向下延拓,得到残差地面重力异常值 $\delta\Delta g_{0_配置}$。在四种方法得到残差地面重力异常值的基础上分别恢复 Δg_{0_rcr},得到向下延拓地面重力异常值 $\Delta g_{0_泊松}$、$\Delta g_{0_正则}$、$\Delta g_{0_配置}$ 和 $\Delta g_{0_半参}$。

步骤 5:将向下延拓重力异常值 $\Delta g_{0_泊松}$、$\Delta g_{0_正则}$、$\Delta g_{0_配置}$ 和 $\Delta g_{0_半参}$ 与地面重力异常值 Δg_0 求差(见表 3)。

表 4 系统误差估计值和系统误差真值统计情况(无外部重力)

Tab. 4 Statistics of systematic errors estimated values and true values (without external gravity) mGal

	最大值	最小值	平均值	标准差
s_{simu}	7.882	3.360	5.621	1.306
系统误差估计值(半参数模型)	7.628	3.220	5.637	1.408
系统误差估计值(半参数模型)减去 s_{simu}	0.747	−0.815	0.016	0.364

步骤 6:随机选取某山区(向下延拓高度为 10 km,其他参数与实验区域一致)重复实验(见表 5)。

2.3 估计系统误差

有外部重力时,传统方法可估计偏差,也就是恒值系统误差,即图 1 中的使用外部数据的传统模型曲线;逆泊松半参数混合模型可精确地估计系统误差,图 1 中不使用外部数据的半参数模型曲线即为系统误差估值,接近真值 s_{simu}。在数据统计上,两者差值的均值和标准差相差不超过 0.1 mGal(见表 2)。

表 5 某山区向下延拓值与地面重力异常值的差值统计(无外部重力)

Tab. 5 Statistics of differences between downward continuation values of and ground gravity anomalies in test mountain area (without external gravity) mGal

方法	平均值	标准差	均方根	平滑参数	正则化参数
方法 1	6.102	34.473	35.010		
方法 2	4.817	29.017	29.415		0.126
方法 3	6.174	31.921	32.513		
方法 4	−0.550	28.969	28.974	0.003	

而无外部重力时,由于无法判定交叉测线、重复测线和相邻测线精度,导致传统方法无法进行系统误差改正。但逆泊松半参数混合模型可以,它首先用自然样条函数为系统误差建模,再利用补偿最小二乘法同时求解参数和系统误差,最后选择无须先验信息的广义交叉核实法确定光滑参数,可较精确地估计系统误差(见图 1 和表 4)。

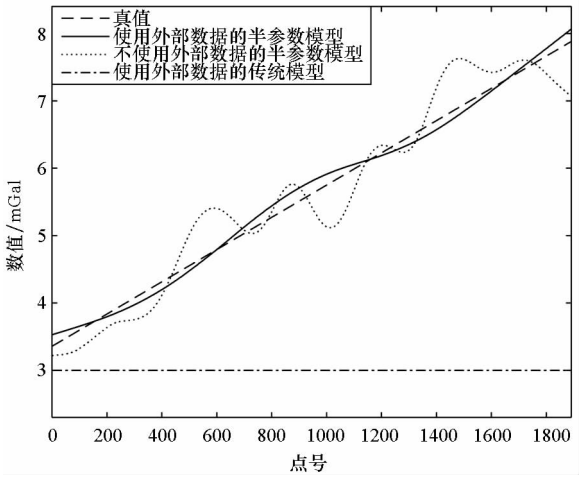


图 1 系统误差估计值和系统误差真值

Fig. 1 Systematic errors estimated values and true values

2.4 向下延拓结果比较和分析

无外部重力时,进行向下延拓实验,并将不同方法的向下延拓值与地面重力异常值求差,直观比较逆泊松半参数混合模型与其他向下延拓方法。

为了验证本方法的效果,设计了 4 个计算方法。

方法 1:逆泊松积分向下延拓。

方法 2:Tikhonov 正则化向下延拓。

方法 3:最小二乘配置向下延拓。

方法 4:逆泊松半参数混合模型向下延拓。

比较结果参照表 3 和表 5。

由表 3 可知,就差值平均值而言,方法 1 和方

法 3 受系统误差影响较大,方法 2 受影响较小,方法 4 受系统误差影响最小。就差值均方根而言,方法 4 最优,说明减小系统误差影响,可提高向下延拓结果精度。需要补充的是,实验结果说明方法 2 也可以减弱系统误差影响,但并不能完全剔除。

由表 5 可知,就差值平均值而言,方法 1、方法 3 受系统误差影响最为严重,方法 2 可减弱系统误差影响,方法 4 受系统误差影响最小。就差值均方根而言,方法 4 相比方法 1 和方法 3 已显著改善。

总的来说,在两个地区的实验中。方法 4 的差值平均值最小,相比其他方法,系统误差影响改善明显,这验证了方法 4 可估计系统误差并提高向下延拓精度。表 5 中向下延拓精度较差的原因是地形影响,当测区为山区时,地形影响增大,向下延拓精度降低;另山区地形起伏大,测量时飞行高度升高,向下延拓高度随之增加,降低了向下延拓精度。需要补充的是,在不同地区的实验中,所应用的逆泊松半参数方法有效估计了系统误差并提高了向下延拓精度,说明本文方法在不同类型地区均有效。

3　结论

针对现有的航空重力系统误差事后处理方法的缺陷,将半参数模型应用于逆泊松积分,建立逆泊松半参数混合模型,进行仿真实验。

1)无外部重力异常时,逆泊松半参数混合模型可利用自然样条函数为系统误差建模,估计系统误差并向下延拓。

2)系统误差估计实验结果表明:有外部重力时,逆泊松半参数混合模型较传统方法可更精确估计系统误差;无外部重力时,逆泊松半参数混合模型可估计出系统误差,传统方法不可。

3)向下延拓方法比较实验结果表明:逆泊松半参数混合模型不受系统误差影响,向下延拓精度较高;而最小二乘配置和逆泊松积分精度较差;正则化算法可提高向下延拓精度,但无法完全剔除系统误差影响。

随着发展,航空重力测量会大量应用于无外部重力异常地区,使用逆泊松半参数混合模型,可较好处理系统误差,逆泊松半参数混合模型中的系统误差建模方法仍值得进一步研究。

参考文献(References)

[1] 孙中苗, 翟振和, 肖云, 等. 航空重力测量的系统误差补偿[J]. 地球物理学报, 2013, 56(1): 47 - 52.
SUN Zhongmiao, ZHAI Zhenhe, XIAO Yun, et al. Systematic error compensation for airborne gravimetry [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2013, 56(1): 47 - 52. (in Chinese)

[2] Pavlis N K, Holmes S A, Kenyon S C, et al. The development and evaluation of the earth gravitational model 2008 (EGM2008) [J]. Journal of Geophysical Research-Solid Earth, 2012, 117: B04406.

[3] Damiani T M. NGS_GRAV - D_Data_Block_CS01_User Manual[Z/OL]. (2015 - 04 - 06) [2017 - 01 - 12]. ftp://ftp.ngs.noaa.gov/pub/grav - d/CS01/.

[4] Hwang C, Hsiao Y S, Shih H C, et al. Geodetic and geophysical results from a Taiwan airborne gravity survey: data reduction and accuracy assessment [J]. Journal of Geophysical Research-Solid Earth, 2007, 112: B04407B4.

[5] 孙中苗. 航空重力测量理论、方法及应用研究[D]. 郑州: 解放军信息工程大学, 2004.
SUN Zhongmiao. Theory, methods and applications of airborne gravimetry [D]. Zhengzhou: the PLA Information Engineering University, 2004. (in Chinese)

[6] Kern M. An analysis of the combination and downward continuation of satellite, airborne and terrestrial gravity data[M]. Canada: National Library of Canada, 2004.

[7] Becker D, Nielsen J E, Ayres-Sampaio D, et al. Drift reduction in strapdown airborne gravimetry using a simple thermal correction[J]. Journal of Geodesy, 2015, 89(11): 1133 - 1144.

[8] Fessler J A. Nonparametric fixed-interval smoothing with vector splines[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(4): 852 - 859.

[9] Hofmann-Wellenhof B, Moritz H. Physical geodesy [M]. Vienna: Springer Science, 2006.

[10] 李建成. 最新中国陆地数字高程基准模型: 重力似大地水准面 CNGG2011 [J]. 测绘学报, 2012, 41(5): 651 - 660.
LI Jiancheng. The recent Chinese terrestrial digital height datum model: gravimetric quasi-geoid CNGG2011 [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2012, 41(5): 651 - 660. (in Chinese)

[11] Fessler J A. Nonparametric fixed-interval smoothing of nonlinear vector-valued measurements[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(4): 907 - 913.

[12] 王兴涛, 石磐, 朱非洲. 航空重力测量数据向下延拓的正则化算法及其谱分解[J]. 测绘学报, 2004, 33(1): 33 - 38.
WANG Xingtao, SHI Pan, ZHU Feizhou. Regularization methods and spectral decomposition for the downward continuation of airborne gravity data[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2004, 33(1): 33 - 38. (in Chinese)

[13] 王兴涛, 夏哲仁, 石磐, 等. 航空重力测量数据向下延拓方法比较[J]. 地球物理学报, 2004, 47(6): 1017 - 1022.
WANG Xingtao, XIA Zheren, SHI Pan, et al. A comparison of different downward continuation methods for airborne gravity data[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2004, 47(6): 1017 - 1022. (in Chinese)

[14] Alberts B, Klees R. A comparison of methods for the inversion of airborne gravity data[J]. Journal of Geodesy, 2004, 78(1/2): 55 - 65.

[15] Martinec Z. Stability investigations of a discrete downward

continuation problem for geoid determination in the Canadian Rocky Mountains[J]. Journal of Geodesy, 1996, 70(11): 805 – 828.

[16] 石磐, 王兴涛. 空中测量地面平均重力异常的频域分析[J]. 测绘学报, 1995(4): 301 – 308.
SHI Pan, WANG Xingtao. The frequence domain analysis for the determination of terrestrial mean gravity anomaly using airborne gravimetry[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1995(4): 301 – 308. (in Chinese)

[17] Keller W, Hirsch M. Downward continuation versus free-air reduction in airborne gravimetry [C]//Proceedings of International Association of Geodesy Symposia, 1993: 266 – 270.

[18] 邓凯亮, 黄谟涛, 暴景阳, 等. 向下延拓航空重力数据的Tikhonov双参数正则化法[J]. 测绘学报, 2011, 40(6): 690 – 696.
DENG Kailiang, HUANG Motao, BAO Jingyang, et al. Tikhonov two-parameter regulation algorithm in downward continuation of airborne gravity data[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2011, 40(6): 690 – 696. (in Chinese)

[19] 吴太旗, 邓凯亮, 黄谟涛, 等. 一种改进的不适定问题奇异值分解法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2011, 36(8): 900 – 903.
WU Taiqi, DENG Kailiang, HUANG Motao, et al. An improved singular values decomposition method for ill-posed problem[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2011, 36(8): 900 – 903. (in Chinese)

[20] 蒋涛, 李建成, 王正涛, 等. 航空重力向下延拓病态问题的求解[J]. 测绘学报, 2011, 40(6): 684 – 689.
JIANG Tao, LI Jiancheng, WANG Zhengtao, et al. Solution of ill-posed problem in downward continuation of airborne gravity[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2011, 40(6): 684 – 689. (in Chinese)

[21] 王振杰, 卢秀山. 利用半参数模型分离GPS基线中的系统误差[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2007, 32(4): 316 – 318.
WANG Zhenjie, LU Xiushan. Separating systematical errors in GPS baselines using semi-parametric model[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2007, 32(4): 316 – 318. (in Chinese)

[22] 赵建虎, 刘经南, 阳凡林. 多波束测深数据系统误差的削弱方法研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2004, 29(5): 394 – 397.
ZHAO Jianhu, LIU Jingnan, YANG Fanlin. Weaken systematic error in depth data of MES[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2004, 29(5): 394 – 397. (in Chinese)

[23] 丁士俊, 陶本藻. 自然样条半参数模型与系统误差估计[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2004, 29(11): 964 – 967.
DING Shijun, TAO Benzao. Semiparametric regression model with natural spline and systematic error estimation[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2004, 29(11): 964 – 967. (in Chinese)

[24] 丁士俊. 测量数据的建模与半参数估计[D]. 武汉: 武汉大学, 2005.
DING Shijun. Survey data modeling and semiparametric estmating[D]. Wuhan: Wuhan University, 2005. (in Chinese)

[25] 吴云, 孙海燕, 马学忠. 半参数估计的自然样条函数法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2004, 29(5): 398 – 401.
WU Yun, SUN Haiyan, MA Xuezhong. Semiparametric regression with cubic spline[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2004, 29(5): 398 – 401. (in Chinese)

[26] 章传银, 郭春喜, 陈俊勇, 等. EGM2008地球重力场模型在中国大陆适用性分析[J]. 测绘学报, 2009, 38(4): 283 – 289.
ZHANG Chuanyin, GUO Chunxi, CHEN Junyong, et al. EGM2008 and its application analysis in Chinese mainland[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2009, 38(4): 283 – 289. (in Chinese)