doi:10.11887/j.cn.201803016 http://journal.nudt.edu.cn

# 载体感应磁场的改进积分方程法*

朱武兵,庄劲武,赵文春,刘胜道,周国华
(海军工程大学 电气工程学院,湖北 武汉 430033)

**摘 要**:针对几何结构复杂的载体感应磁场计算问题,提出采用面单元和体单元分别对铁磁物体薄壳体结构、非薄壳体结构剖分,并实现了感应磁场的积分方程法计算。球-球体模型解析算例表明,所提方法数值精度可靠,其平均相对误差不超过0.27%;船舶模型仿真算例表明,该方法在单元量规模较小时计算精度较好,体现了方法在载体感应磁场建模方面的优势。将该方法分别应用于潜艇主舱段-设备模型和潜艇主舱段模型磁场计算时,数值结果与实验结果平均相对误差均小于2%,数值和实验结果比较表明,铁磁设备对模型磁场影响显著。仿真和实验算例均表明所提方法可有效应用于载体的感应磁场计算,具有一定的工程实用价值。

**关键词**:混合网格;磁场积分方程法;载体;感应磁场
**中图分类号**:TM153 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2018)03-101-06

# Modified integral equation method for carrier's induced magnetic field solving

*ZHU Wubing*, *ZHUANG Jinwu*, *ZHAO Wenchun*, *LIU Shengdao*, *ZHOU Guohua*
(College of Electrical Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

**Abstract**: Aimed at meshing the ferromagnetic objects with both surface elements and volume elements, a magnetic integral equation method was proposed to solve the induced magnetic field of complex-geometry carriers. Numerical results of the shell sphere and solid sphere model obtained by the proposed method can match its analytical solution well, and the ARE (average relative error) is less than 0.27%; the induced magnetic field of the ship model can be modeled well with few hybrid elements, which demonstrates the advantage of the proposed method. Based on the proposed method, the AREs between numerical and experimental results of the simple submarine-equipment mockup model and the submarine mockup model are both less than 2%. Magnetism deviations caused by the equipment model are displayed by the comparison between computational results of the simple submarine-equipment mockup model and the simple submarine mockup model. Thus carrier's induced magnetic field can be calculated by the proposed method effectively, which is practically valuable.

**Key words**: hybrid mesh elements; magnetic integral equation method; carrier; induced magnetic field

由铁磁材料构成的载体(如舰艇、飞机等)在地磁场中因磁化引起的感应磁场(感应磁场属于静磁场范畴)已成为威胁舰艇航行安全[1-2]及制约磁传感器载体高精度测磁技术[3]发展的关键因素。在舰艇消磁领域[4-5],精确掌握舰艇感应磁场特征是实现高精度补偿的关键;在船载磁传感器海洋磁力测量或航空磁探测时,感应磁场是测磁过程中主要干扰源之一[6-7]。由于载体几何特征的复杂性,有限元法[8-9]、边界元法[10]、积分方程法[11-13]等数值计算方法已成为精确掌握载体感应磁场的有效手段。在载体感应磁场数值方面,法国海军舰艇磁隐身技术实验室与CEDRAT公司联手开发了适用于舰艇感应磁场的有限元软件Flux3D[9],有限元方法因需对整个计算区域剖分而网格量巨大;而积分方程法只需对磁性区建模,建模高效、简单且计算效率高;此外积分方程法比较适用于载体感应磁场逆问题的研究[14-16]。因而,积分方程法在感应磁场计算方面具有明显的优势。

积分方程法在载体感应磁场计算方面已经取得一系列的研究进展。文献[17]采用面积分计算方法有效地避免了单元耦合系数矩阵计算时的奇异现象,法国学者Chadebec[16]和郭成豹[18]等后续分别研究了快速多极子算法[16]、自适应交叉

* **收稿日期**:2017-03-23
**基金项目**:国家自然科学基金资助项目(51377165,41476087)
**作者简介**:朱武兵(1989—),男,江西吉安人,博士研究生,E-mail:beonlyzwb@163.com;
赵文春(通信作者),男,副教授,博士,硕士生导师,E-mail:zhaowenchun1973@hotmail.com

近似算法[18]、并行加速算法等使得磁场积分方程法应用于感应磁场大规模计算成为可能。文献[16,18]针对舰艇壳体薄的特点,采用三角形壳单元对舰艇壳体剖分时感应磁场求解效率和精度优势明显。然而仅对载体壳体磁场建模时计算精度有限,因此应进一步考虑载体内部铁磁结构对载体感应磁场的影响。由于载体内部多数铁磁设备不能等效为薄壳体结构(只能采用体网格对多数铁磁设备研究),本文研究基于体 - 面混合网格的磁场积分方程法,以更适用于载体感应磁场数值计算。

## 1 三维静磁场体积分方程法

如图 1 所示,铁磁物体(如舰艇、飞机等)受外界磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 作用且空间不存在自由电流时,场点 $P$ 的磁感应强度可表示为[19]

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_P) = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r}_P) \tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r}_P) = -\dfrac{\mu_0}{4\pi}\nabla_P\int_{V_m}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}_Q)\cdot\nabla_Q\left(\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}_{PQ}|}\right)\mathrm{d}v_Q$;其中 $\nabla_P$、$\nabla_Q$ 分别为对场点、源点坐标的梯度计算,$V_m$ 为铁磁物体所占体积,$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}_Q)$ 为源点 $Q$ 处的磁化强度,$\boldsymbol{r}_P$、$\boldsymbol{r}_Q$ 分别为场点和源点矢径,$\boldsymbol{r}_{PQ} = \boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_Q$ 为源点 $Q$ 指向场点 $P$ 的矢径。

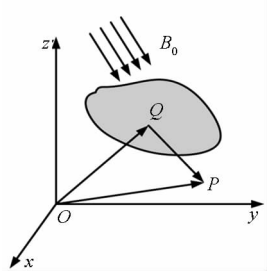



图 1 均匀磁化场中的铁磁物体

Fig. 1 Sketch map of magnetostatic computation

对于均匀磁化体,式(1)中的体积分可转化为面积分[19],即

$$\boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r}_P) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla_P\int_S[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}_Q)\cdot\boldsymbol{n}]/|\boldsymbol{r}_{PQ}|\mathrm{d}S_Q \tag{2}$$

式中,$S$ 为均匀磁化体表面积,$\boldsymbol{n}$ 为均匀磁化体表面的单位外法线方向矢量。感应磁场计算时,通常将铁磁物体离散为若干个足够小的均匀磁化体。以每个离散单元重心点为匹配点,可建立以单元内部磁感应强度为未知量的代数方程组

$$\frac{\mu_{rj}}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\frac{\mu_{ri}-1}{\mu_{ri}}\oint_{s_i}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_{Q_i})\cdot\boldsymbol{n}_i]\frac{\boldsymbol{r}_{PQ_i}}{|\boldsymbol{r}_{PQ_i}|^3}\mathrm{d}s_Q - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_{P_j}) = -\mu_{rj}\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_{P_j}) \tag{3}$$

式中,$N$ 为铁磁区离散体单元数;$i$、$j$ 为离散单元编号,$\mu_{ri}$、$\mu_{rj}$ 分别为相应单元的相对磁导率;$\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_{P_j})$ 的物理意义为外加磁感应强度在第 $j$ 个单元重心投影,可直接由外加磁感应强度获得。将面积分中矢量展开成分量形式,可得

$$\frac{\mu_{rj}}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\frac{\mu_{ri}-1}{\mu_{ri}}\boldsymbol{S}_{P_jQ_i}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_{Q_i}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_{P_j}) = -\mu_{rj}\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_{P_j}) \tag{4}$$

式中,$\boldsymbol{S}_{P_jQ_i} = \begin{bmatrix} s_{P_{jx}Q_{ix}} & s_{P_{jx}Q_{iy}} & s_{P_{jx}Q_{iz}} \\ s_{P_{jy}Q_{ix}} & s_{P_{jy}Q_{iy}} & s_{P_{jy}Q_{iz}} \\ s_{P_{jz}Q_{ix}} & s_{P_{jz}Q_{iy}} & s_{P_{jz}Q_{iz}} \end{bmatrix}$ 的物理意义为第 $i$ 个单元对第 $j$ 个单元的贡献系数矩阵。求解各系数矩阵后,求解方程组(3)可求得各单元的未知量,再通过式(1)可求得磁性区外任意场点磁感应强度。

## 2 基于体 - 面混合剖分的磁场积分方程法

### 2.1 静磁场面积分方程法

针对薄壳体(舰艇、飞机外壳属于薄壳体范畴)静磁场建模问题,文献[16,18]采用壳单元建模,将磁介质区域分解为 $N'$ 个多边形壳体单元,可建立如下方程

$$\frac{\mu_{rj}}{4\pi}\sum_{i=1}^{N'}\frac{\mu_{ri}-1}{\mu_{ri}}\int_L e_{hi}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_{Q_i})\cdot\boldsymbol{n}_i]\frac{\boldsymbol{r}_{PQ_i}}{|\boldsymbol{r}_{PQ_i}|^3}dl_Q - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_{P_j}) = \mu_{rj}\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_{P_j}) \tag{5}$$

式中,$N'$ 为铁磁区离散单元数;$i$、$j$ 为离散单元编号;$\mu_{ri}$、$\mu_{rj}$ 为单元内部的相对磁导率;$e_{hi}$ 为壳体单元厚度;$L$ 为壳体单元线积分区域。进一步可写为

$$\frac{\mu_{rj}}{4\pi}\sum_{i=1}^{N'}\frac{\mu_{ri}-1}{\mu_{ri}}\boldsymbol{L}_{P_jQ_i}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_{Q_i}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_{P_j}) = -\mu_{rj}\boldsymbol{B}_0(r_{P_j}) \tag{6}$$

式中,$\boldsymbol{L}_{P_jQ_i} = e_{hi}\begin{bmatrix} L_{P_{jx}Q_{ix}} & L_{P_{jx}Q_{iy}} & L_{P_{jx}Q_{iz}} \\ L_{P_{jy}Q_{ix}} & L_{P_{jy}Q_{iy}} & L_{P_{jy}Q_{iz}} \\ L_{P_{jz}Q_{ix}} & L_{P_{jz}Q_{iy}} & L_{P_{jz}Q_{iz}} \end{bmatrix}$。

### 2.2 体 - 面混合网格剖分的磁场积分方程法

对于结构复杂的三维载体,采用壳单元和体单元对磁性区剖分可使得建模简单、高效。建模后采用点匹配法且以匹配点(匹配点为体单元或壳单元重心)的磁感应强度矢量为未知量建立离散方程组

$$\frac{\mu_{rj}}{4\pi}\sum_{i=1}^{N+N'}\frac{\mu_{ri}-1}{\mu_{ri}}\boldsymbol{C}_{P_jQ_i}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_{Q_i}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_{P_j}) = -\mu_{rj}\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_{P_j}) \tag{7}$$

式中,$N$ 为体单元数目,$N'$ 为壳单元数目;$i$、$j$ 为离

散单元编号;$\mu_{ri}$、$\mu_{rj}$为单元内部的相对磁导率;当单元为体单元时,$\boldsymbol{C}_{P_jQ_i}$即 $\boldsymbol{S}_{P_jQ_i}$;当单元为壳单元时,$\boldsymbol{C}_{P_jQ_i}$即 $\boldsymbol{L}_{P_jQ_i}$。

2.2.1　耦合系数矩阵的计算

由式(7)可知,求解未知量的关键是求解单元间耦合系数矩阵。本文考虑四面体和三角形单元建模情形,匹配点选在各单元重心后体单元以及壳单元对其他单元的贡献系数矩阵转化为单元对被作用单元重心的积分求解。

1)四面体单元耦合系数矩阵求解

借鉴文献[17]六面体单元间耦合系数矩阵求解方法,四面体单元(如图 2 所示)对任意单元的耦合系数矩阵求解方法如下

$$\boldsymbol{C}_{P_jQ_i} = \boldsymbol{S}_{P_jQ_i} = \sum_{l=1}^{4} \boldsymbol{R}_l \boldsymbol{K}_l \boldsymbol{n}_l \tag{8}$$

式中,$\boldsymbol{R}_l$ 为局部坐标系到全局坐标系的转化矩阵;$\boldsymbol{n}_l$ 表示第 $l$ 个表面的外法线在全局坐标系下的方向余弦;$\boldsymbol{K}_l = [S_{lx} \quad S_{ly} \quad S_{lz}]^{\mathrm{T}}$ 表示局部坐标系第 $l$ 个表面积分贡献矢量,式中各项可按 $s_{lm} = \oint_{s_l} (m_P - m_{Q_l})/|\boldsymbol{r}_{PQ_l}|^3 \mathrm{d}s_Q (m = x,y,z)$ 求解;$(x_P, y_P, z_p)$ 为匹配点坐标,$(x_{Q_l}, y_{Q_l}, z_{Q_l})$ 为积分表面积分点坐标,$\boldsymbol{r}_{PQ_l}$ 为匹配点指向积分点的矢径。由于面积分不存在奇异点,因而解析积分和高斯数值积分均可取得较好的积分精度。

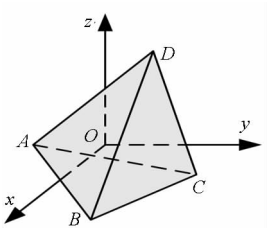



图 2　四面体单元示意图

Fig. 2　Sketch map of a tetrahedron element

2)三角形单元耦合系数矩阵求解

用三角形单元对壳体部分剖分后,对任意三角形单元可建立如图 3 所示的局部坐标系,同样通过矢量恒等式及高斯定理可消除耦合系数矩阵计算时奇异积分,此时

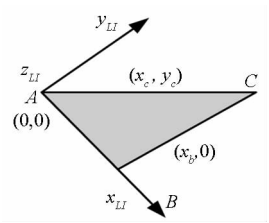



图 3　三角形单元示意图

Fig. 3　Sketch map of a triangular element

$$\boldsymbol{C}_{P_jQ_i} = \boldsymbol{L}_{P_jQ_i} = \sum_{l=1}^{3} \boldsymbol{R}_l \boldsymbol{T}_l \boldsymbol{n}_l \tag{9}$$

式中,$\boldsymbol{R}_l$ 为局部坐标系到全局坐标系的转化矩阵;$\boldsymbol{n}_l$ 表示三角形第 $l$ 条边线外法线在全局坐标系下的方向余弦;$\boldsymbol{T}_l = [L_{lx} \quad L_{ly} \quad L_{lz}]^{\mathrm{T}}$ 表示局部坐标系下第 $l$ 条边对匹配点积分贡献矢量,$L_{lm} = \int_l (m_P - m_{Q_l})/|\boldsymbol{r}_{PQ_l}|^3 \mathrm{d}l_Q (m = x,y,z)$ 求解。式中各变量含义与 $\boldsymbol{S}_{lm}$ 具有一致性,不同之处在于此处为线积分。

2.2.2　任意场点的磁场计算

耦合系数矩阵求解后,由式(7)可求解得各匹配点未知磁感应强度矢量。磁性区外场点的感应磁感应强度(Induced Magnetic flux density, IM)可按式(10)求解

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N+N'} \frac{\mu_{ri} - 1}{\mu_{ri}} \boldsymbol{C}_{PQ_i} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_{Q_i}) \tag{10}$$

式中,$\boldsymbol{C}_{PQ_i}$ 为编号 $i$ 单元对场点 $P$ 的贡献系数矩阵。

## 3　算例分析

首先,采用解析解算例(球 - 球壳体模型,模型 1)验证数值算法的准确性;接着,通过船舶模型(模型 2)说明该方法对于复杂模型分析的适用性及优势;最后,通过实验算例潜艇主舱段 - 设备模型,简称模型 3)进一步验证算法的准确性。为验证设备模型对模型 3 感应磁场的影响,同时对潜艇主舱段(不包含长方体设备模型,模型 4)感应磁场进行数值计算与测量。为达到更好的表述效果,模型均用半剖分示意图展示。

### 3.1　解析算例

模型 1 的坐标系及尺寸(尺寸单位为 m,无特别说明时本文其他长度单位均为 m)如图 4 所示,实心球体和球壳均匀介质的相对磁导率均为 140,球壳厚度 1 mm,模型 1 置于垂向分量为 $B_z$ = 34 500 nT 的激励中。首先,通过求解拉普拉斯边值问题推导了球壳外场点 $P(x,y,z)$ 磁感应强度解析解如下

$$\begin{cases} B_x = A_6 3xz/(x^2+y^2+z^2)^{5/2} \\ B_y = A_6 3yz/(x^2+y^2+z^2)^{5/2} \\ B_z = -A_6 (x^2+y^2-2z^2)/(x^2+y^2+z^2)^{5/2} \end{cases} \tag{11}$$

式中,$A_6 = [-3\alpha\mu_{r2}A_3 - (1-\mu_{r2})c^3 B_z]/(\mu_{r2}+2)$,

$$A_3 = \frac{3b^3c^3(\mu_{r2}-1)B_z}{c^3(\mu_{r2}+2)(2\alpha\mu_{r2}+\alpha+3) - 2\alpha b^3(\mu_{r2}-1)^2},$$

$$\alpha=\frac{b^3(1-\mu_{r2})(\mu_{r1}+2)-a^3(1-\mu_{r1})(2+\mu_{r2})}{3\mu_{r2}a^3(1-\mu_{r1})},$$

$a$、$b$、$c$ 依次为球体半径、球壳体内半径和外半径，$\mu_{r1}$、$\mu_{r2}$ 分别为球体和球壳体材料相对磁导率，$B_z$ 为外加垂向磁感应强度幅值。接着，采用商业软件 Hypermesh 建模，网格模型包含节点 818 个，四面体单元 1090 个，三角形壳单元 961 个；同时采用解析方法和本文方法计算测线 $A(-1,0,2)$、$B(1,0,2)$ 上等间距分布的 41 个场点的 IM 三分量，两种方法的求解结果如图 5 所示。以平均相对误差（Average Relative Error，ARE，定义见式(12)）为评估指标、且以解析解作为参考时，$X_{iz}$（垂向激励时 IM 的 $x$ 分量，$Y_{iz}$、$Z_{iz}$ 含义类似）、$Y_{iz}$（$Y_{iz}$ 解析解为 0，以最大绝对误差考察 $Y_{iz}$ 数值误差）、$Z_{iz}$ 误差依次为 0.12%、0.116 nT、0.27%。

$$ARE=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|\text{理论值}-\text{计算值}|/\max|\text{理论值}| \tag{12}$$

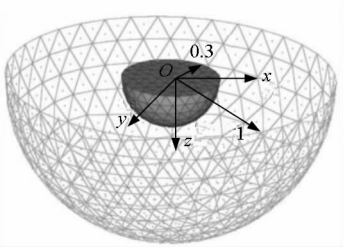



图 4 模型 1 剖分图

Fig. 4 Mesh of model 1

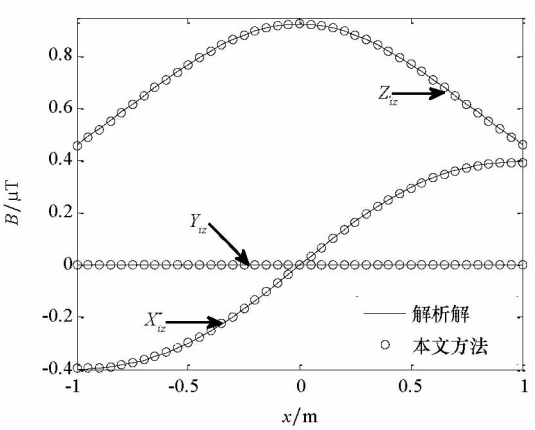



图 5 两种方法测线 $AB$ 上场点的 IM

Fig. 5 IM of measure line $AB$ with two methods

## 3.2 仿真算例

图 6 所示为某船舶模型的半剖图，外壳的主要几何尺寸长 67.6 m、宽 10 m、高 10.2 m，壳体厚度 14 mm，吃水线为 2 m；模型内部包含厚度为 20 mm 的长方壳体模型、柱锥体模型；长方壳体及柱锥体在船壳体中的分布关于 $x$ 轴对称，二者左视图是边长为 2 m 的方形面；舰艇外壳、内部长方形壳体、柱锥实体材料的相对磁导率分别为 200、60、140，模型置于 $B_x=34\ 500$ nT 激励中。外壳模型及内部长方壳体模型分别采用 1556、208 个三角形单元建模，柱椎体采用 356 个四面体单元建模。采用本文方法计算了水线下方 1 倍船宽深度（即水线下方 10 m 深度，简称 1B 深度）测线 $C(-50.7,0,10.5)$、$D(50.7,0,10.5)$ 上等间距分布 34 个场点的 IM 三分量。

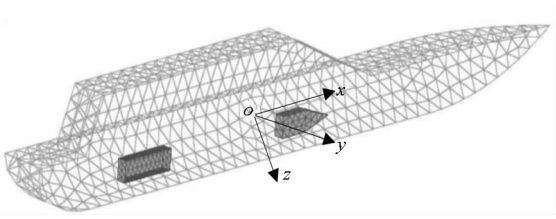



图 6 模型 2 剖分示意图

Fig. 6 Mesh of model 2

为验证计算结果的准确性，同时采用有限元方法（网格模型单元量约为 148 万）计算了 $CD$ 上各场点的 IM 三分量，两种方法计算结果如图 7 所示。以有限元计算结果为参照对各分量的数值误差进行分析，$X_{ix}$、$Y_{ix}$ 及 $Z_{ix}$ 的误差依次为 1.01%、3.92 nT 及 0.71%。

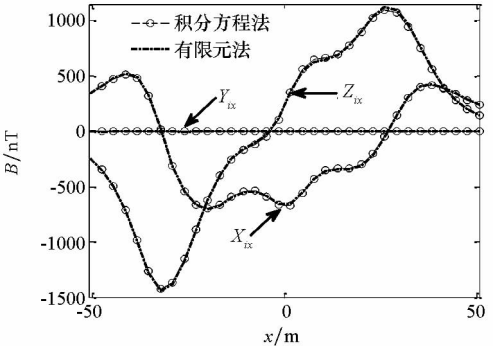



图 7 模型 2 磁场计算结果

Fig. 7 Numerical results of model 2

## 3.3 实验算例

图 8 所示为模型 3 的坐标系及部分尺寸示意图；同时给出了该模型的左视图，圆柱壳体横截面外半径为 0.153 m，内半径为 0.15 m，长方体（设备简化模型）的方形横截面边长为 0.1 m；模型 3 置于 $B_x=34\ 500$ nT 的激励中，材料相对磁导率均为 155。计算时，体面网格模型包含节点 1177 个，四面体单元 1495 个，三角形壳单元 1448 个；同时在无磁实验室通过两航向测量法获取模型 4 正下方测线 $E(-0.12,0,0.3)$、$F(0.12,0,0.3)$ 上等间距分布 31 个场点上的 IM 三分量。

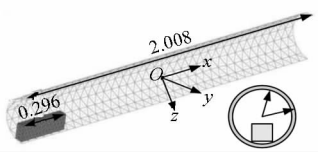



图 8　模型 3 剖分示意图

Fig. 8　Mesh of model 3

为对比设备模型对模型 3 磁场的影响,计算并测量了模型 4(模型 4 采用三角形壳单元剖分,该剖分与模型 3 圆柱壳体剖分相同)测线 3 场点 IM 三分量。图 9 所示为模型 3、模型 4 的计算与实验测量结果,以测量值为参考,对数值计算误差进行了分析,结果见表 1。同样地,可用平均相对误差作为指标评估模型 3 和模型 4 感应磁场的偏差并以模型 3 计算结果作为参考值,$Z_{ix}$平均相对误差为 9.44%,且部分场点 IM 三分量变化较大,偏差较大场点离长方体设备模型距离较近,这表明设备模型对模型磁场具有明显的影响。

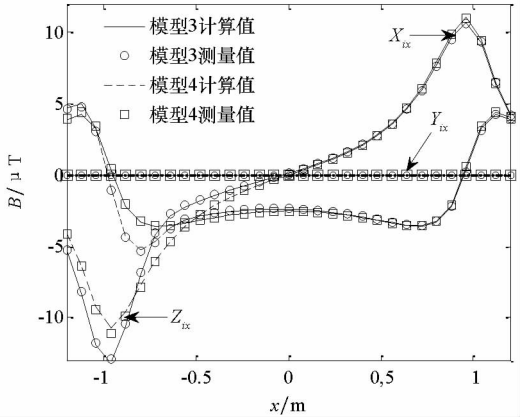



图 9　模型 3、模型 4 磁场计算结果及比较

Fig. 9　Computational results and comparison of model 3 and model 4

**表 1　实验算例误差分析**

Tab. 1　Error analysis of the experimental examples

| 误差 | $X_{ix}$/% | $Y_{ix}$/nT | $Z_{ix}$/% |
|---|---|---|---|
| 模型 3 | 1.73 | 23.88 | 1.28 |
| 模型 4 | 1.19 | 25.48 | 1.69 |

## 4　结论与讨论

本文提出了基于四面体单元和三角形壳单元混合网格的感应磁场积分方程法,并编写了相应的程序包,该方法结合了两种不同网格在静磁场建模方面的优势。三个算例表明:

1)解析算例的平均相对误差不超过 0.27%,表明算法精度可靠;数值误差来源于磁性物体离散化误差。

2)仿真算例的平均相对误差在 2% 以内,计算结果表明,对于几何尺寸、型线与实际舰船相当的模型,只需 2000 多个混合单元就可达到较好的计算精度,在普通的 64 位机上编写的 MATLAB 程序包约 40 min 可完成计算;采用专门的数值计算语言 Fortran 可进一步提高计算效率。值得说明的是,误差分析以有限元计算结果为参照,有限元计算同样存在一定的数值误差。

3)实验算例进一步表明了方法的计算精度;模型 3 与模型 4 结果比较表明,设备模型对模型 3 的 IM 影响显著,从而表明该方法可有效应用于载体的感应磁场计算。

舰艇感应磁场一般考察 1B 深度平面场点 IM,大型舰艇感应磁场建模在数万单元时仍有望通过本文研究方法的 Fortran 程序高效地实现计算。实际中载体的几何结构更为复杂且有时所需考察场点离载体本身较近,建模所需单元量进一步加大,因而需进一步研究快速多极子等算法以实现磁场积分方程法的大规模快速计算,使其应用前景更为广阔。

## 参考文献(References)

[1] Holmes J J. Exploitation of a ship's magnetic field signatures (synthesis lectures on computational electromagnetics) [M]. USA: Morgan and Claypool Publishers, 2006.

[2] Holmes J J. Reduction of a ship's magnetic field signatures (synthesis lectures on computational electromagnetics) [M]. USA: Morgan and Claypool Publishers, 2008.

[3] Pang H F, Zhang Q, Li J, et al. Improvement of vector compensation method for vehicle magnetic distortion field[J]. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 2014, 353: 1 - 5.

[4] Kildishev A V, Nyenhuis J A. External magnetic characterization of marine vehicles [C]// Proceedings of OCEANS 2000 MTS/IEEE Conference and Exhibition, 2000: 1145 - 1147.

[5] Kildishev A V, Kamondetdacha R, Nyenhuis J A. Prediction of the magnetic field below an axisymmetrical planar sensor array with a magnetic source located above the measurement plane [C]//Proceedings of IEEE International Magnetics Conference (INTERMAG), 2002: DT08 - DT09.

[6] Gao J J, Zhu X L, Zhu W B. Accurate calculating method of marine three-component geomagnetic field in shipboard measurement [C]//Proceedings of Chinese Automation Congress, 2015: 1504 - 1507.

[7] Woloszyn M. Analysis of aircraft magnetic interference [J]. International Joural of Applied Electromagnetics and Mechanics, 2012, 39(1): 129 - 136.

[8] Brunotte X, Meunier G, Bongiraud J. Ship magnetizations modeling by the finite element method [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1993, 29(2): 1970 - 1976.

[9] 姜智鹏, 庄飚, 关涛, 等. 基于 FLUX 软件的舰船磁场计

算[J]. 船电技术, 2010, 30(12): 17 – 20.
JIANG Zhipeng, ZHUANG Biao, GUAN Tao, et al. Calculation of ship magnetic fields based on the software FLUX[J]. Marine Electric & Electronic Engineering, 2010, 30(12): 17 – 20. (in Chinese)

[10] Damidau F, Bandelier B, Penven P. A fast and precise determination of the static magnetic field in the presence of thin iron shells [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1995, 31(6): 3491 – 3493.

[11] Chadebec O, Coulomb J L, Cauffet G, et al. How to well pose a magnetization identification problem [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2003, 39(3): 1634 – 1637.

[12] Chadebec O, Coulomb J L, Leconte V, et al. Modeling of static magnetic anomaly created by iron plates [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2000, 36(4): 667 – 671.

[13] Chadebec O, Coulomb J L, Janet F. A review of magnetostatic moment method [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2006, 42(4): 515 – 520.

[14] 周国华, 肖昌汉, 闫辉, 等. 一种弱磁作用下铁磁物体感应磁场的计算方法[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2009, 30(1): 91 – 95.
ZHOU Guohua, XIAO Changhan, YAN Hui, et al. A method to calculate the induced magnetic field of ferromagnetic objects in a weak magnetic field [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2009, 30(1): 91 – 95. (in Chinese)

[15] Chadebec O, Coulomb J L, Bongiraud J, et al. Recent improvements for solving inverse magnetostatic problem applied to thin shells [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2002, 38(2): 1005 – 1008.

[16] Nguyen T S, Guichon J M, Chadebec O, et al. Ships magnetic anomaly computation with integral equation and fast multipole method [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2011, 47 (5): 1414 – 1417.

[17] 周国华, 肖昌汉, 刘胜道, 等. 基于六面体单元表面磁场积分法求解三维静磁场[J]. 电工技术学报, 2009, 24(3): 1 – 7.
ZHOU Guohua, XIAO Changhan, LIU Shengdao, et al. 3D magnetostatic field computation with hexahedral surface integral equation method [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2009, 24(3): 1 – 7. (in Chinese)

[18] 郭成豹, 刘大明. 舰船磁特征磁矩量法的图形处理单元加速计算研究[J]. 兵工学报, 2014, 35(10): 1638 – 1643.
GUO Chengbao, LIU Daming. GPU-accelerated magnetic moment method for magnetic signatures of ship [J]. Acta Armamentarii, 2014, 35 (10): 1638 – 1643. (in Chinese)

[19] 樊明武, 颜威利. 电磁场积分方程法[M]. 北京机械工业出版社, 1988: 11 – 19.
FAN Mingwu, YAN Weili. Integral equation method of the electromagnetics field [M]. Beijing: Press of Mechanical Industry, 1988: 11 – 19. (in Chinese)