doi:10.11887/j.cn.201804025 http://journal.nudt.edu.cn

多输入多输出雷达恒模稳健波形联合优化算法*

崔 琛,孙从易,郝天铎,龚 阳
(国防科技大学 电子对抗学院,安徽 合肥 230037)

摘 要:针对目标冲激响应及杂波冲激响应分布特性先验知识不准确导致的多输入多输出雷达检测性能下降的问题,提出恒模稳健波形与接收机滤波器联合优化算法。将目标冲激响应及杂波冲激响应分布特性先验知识不准确时的优化问题建模为一个极大极小化问题。运用迭代优化算法将联合优化问题分解为两个子优化步骤:将波形固定时的接收机滤波器权值优化问题建模为广义瑞利商模型,求解得到相应的接收机滤波器权值矢量;利用半正定松弛技术对权值固定时的波形优化问题进行求解,获得对应的波形矩阵,并根据得到的波形矩阵,通过高斯随机化的方法获得所需的恒模波形。对所提算法的收敛性进行了证明,仿真结果表明所提算法有效。

关键词:多输入多输出雷达;稳健波形设计;接收机滤波器;半正定松弛;联合优化
中图分类号:TN95 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2018)04-166-07

Joint optimization algorithm of constant modulus robust waveform for multi-input multiple-output radar

CUI Chen, *SUN Congyi*, *HAO Tianduo*, *GONG Yang*
(College of Electronic Countermeasure Institute, National University of Defense Technology, Hefei 230037, China)

Abstract: Aimed at the problem that the detection performance losses of multi-input multiple-output radar due to the inaccurate prior knowledge of the distribution characteristics of target impulse response and clutter impulse response, a joint optimization algorithm of constant modulus robust waveform and receiver filter was proposed. The optimization problem in which the prior knowledge of the distribution characteristics of target impulse response and clutter impulse response is not accurate was modeled as a maximum minimization problem. During the optimizations, the joint design problem was divided into two steps: the optimization problem of receiver filter weights when the waveform was fixed was modeled as the generalized Rayleigh quotient model, and the corresponding weight vector of the receiver filter was obtained; the waveform optimization problem of fixed weight was solved by using positive semi-definite relaxation technique to obtain the corresponding waveform matrix, and the constant modulus waveform was obtained by Gauss random method according to the waveform matrix obtained. The convergence of the proposed algorithm was proved, and the simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: multi-input multiple-output radar; robust waveform design; receiver filter; semi-definite relaxation; joint optimization

多输入多输出(Multiple-Input Multiple-Output,MIMO)雷达作为一种新体制雷达,近年来一直是国内外学者关注的热点之一[1-3]。不同于相控阵雷达,MIMO雷达的每个发射阵元可以发射任意波形,即所谓的波形分集,因此设计发射波形是MIMO雷达信息处理研究的主要内容之一[4]。

检测概率是衡量雷达性能的重要参数,国内外学者针对如何利用波形优化提高MIMO雷达目标检测性能的问题展开了深入的研究。文献[5-7]是在雷达先验知识准确的前提下研究改善目标检测性能的波形优化问题。然而在实际中有关目标和环境的确切特性不可能事先知道,只能估计得到,因而存在估计误差,在这种情况下前述文献设计的波形并不是最优波形。文献[8]在目标位置误差和信道误差有界的条件下,分别构造以信噪比和克拉美罗界为代价函数的优化模型,并转化为凸优化问题进行了求解,从而改善了MIMO雷达的检测和参数估计性能。文献[9]研究了在目标导向矢量先验知识不准确情况下的MIMO雷达稳健波形设计问题,提高了雷达在信号相关干扰背景下目标检测能力。文献[10]针对确定目标冲激响应(Target Impulse Response,TIR)先验知识的不准确性,提出了一种基于改进

* **收稿日期**:2017-06-1
基金项目:国家部委基金资助项目(KY16N161)
作者简介:崔琛(1962—),男,河北易县人,教授,硕士,博士生导师,E-mail:kycuichen@163.com

序列二次规划方法的恒模波形与接收滤波器联合设计方法,提高了宽带雷达在最差情况下的输出信杂噪比(Signal to Clutter and Noise Ratio, SCNR)。文献[11]在相关杂波背景下,针对目标方位角先验知识不准确性,提出了一种角度稳健的集中式 MIMO 雷达发射波形和接收滤波器联合设计方法,并采用循环迭代的方法进行求解。

文献[8-11]均在目标位置或者确定 TIR 先验知识不准确的前提下进行稳健波形设计。但研究随机 TIR 及杂波冲激响应(Clutter Impulse Response, CIR)分布特性先验知识不准确时,提高 MIMO 雷达的检测性能是在实际使用中必须解决的问题。

本文将 TIR 及 CIR 分布特性不准确时的联合优化问题建模为一个极大极小化问题,采用迭代优化的方法将该问题分解为两个子步骤,分别利用广义瑞利商模型的求解方法以及凸优化的方法对这两个子步骤进行求解,得到所需的恒模稳健波形及接收机滤波器权值。

1　问题建模

为方便分析,主要采用文献[12]所述的 MIMO 雷达信号模型。假设 MIMO 雷达的发射阵元和接收阵元个数分别为 P 和 Q,不失一般性,认为此模型为基带离散时间模型。对于一个距离扩展目标,用一个 v 阶的有限冲激响应(Finite Impulse Response, FIR)系统描述从第 p 个发射阵元到第 q 个接收阵元之间的信号传输,则第 q 个接收阵元的接收波形可以表示为:

$$y_q(k) = \sum_{p=1}^{P}\sum_{l=0}^{v}[g_{\mathrm{t}}^{(p,q)}(l) + g_{\mathrm{c}}^{(p,q)}(l)]x_p(k-l) + n_q(k) \quad (1)$$

式中:$x_p(\cdot)$ 表示第 p 个发射阵元的发射信号;$g_{\mathrm{t}}^{(p,q)}(\cdot)$ 及 $g_{\mathrm{c}}^{(p,q)}(\cdot)$ 分别表示第 p 个发射阵元到第 q 个接收阵元间的 TIR 及 CIR,为便于分析,假设杂波散射点的个数为 $v+1$,即令 TIR 与 CIR 长度相同,当两者长度不同时,则可以通过补零拓扑的方法使之相同;$n_q(\cdot)$ 表示第 q 个接收阵元的加性噪声。

令 L 表示发射信号长度,且 $L>v$,则式(1)可表示为以下矩阵-向量形式:

$$\boldsymbol{y}_q = \sum_{p=1}^{P}\boldsymbol{X}_p(\boldsymbol{g}_{\mathrm{t}}^{(p,q)} + \boldsymbol{g}_{\mathrm{c}}^{(p,q)}) + \boldsymbol{n}_q \quad (2)$$

式中,$\boldsymbol{g}_{\mathrm{t}}^{(p,q)} = [g_{\mathrm{t}}^{(p,q)}(0),\cdots,g_{\mathrm{t}}^{(p,q)}(v)]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{g}_{\mathrm{c}}^{(p,q)} = [g_{\mathrm{c}}^{(p,q)}(0),\cdots,g_{\mathrm{c}}^{(p,q)}(v)]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{y}_q = [y_q(k),\cdots,y_q(k+L-1)]^{T}$,$\boldsymbol{n}_q = [n_q(k),\cdots,n_q(k+L-1)]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{X}_p$ 为一个包含第 p 个发射阵元波形信息的 $L\times M(M=v+1)$ Toeplitz 矩阵,其矩阵结构为:

$$\boldsymbol{X}_p = \begin{bmatrix} x_p(k) & \cdots & x_p(k-v) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_p(k+L-1) & \cdots & x_p(k+L-1-v) \end{bmatrix}$$

定义 $\bar{\boldsymbol{X}} = [\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_P]$,$\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{t}q} = [(\boldsymbol{g}_{\mathrm{t}}^{(1,q)})^{\mathrm{T}},\cdots,(\boldsymbol{g}_{\mathrm{t}}^{(P,q)})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,$\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{c}q} = [(\boldsymbol{g}_{\mathrm{c}}^{(1,q)})^{\mathrm{T}},\cdots,(\boldsymbol{g}_{\mathrm{c}}^{(P,q)})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。令 $\bar{\boldsymbol{y}} = [y_1,\cdots,y_Q]$ 表示 Q 个接收阵元的接收信号,故而可以得到:

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \bar{\boldsymbol{X}}\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{t}} + \bar{\boldsymbol{X}}\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{c}} + \bar{\boldsymbol{n}}$$

式中,$\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{t}} = [\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{t}1},\cdots,\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{t}Q}]$ 表示 TIR,$\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{c}} = [\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{c}1},\cdots,\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{c}Q}]$ 表示 CIR,$\bar{\boldsymbol{n}} = [\boldsymbol{n}_1,\cdots,\boldsymbol{n}_Q]$ 表示加性噪声。

将回波矩阵 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 按列堆积成维数为 $LQ\times 1$ 的矢量 $\boldsymbol{y}$,并利用矩阵等式 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{AXB}) = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A})\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} &= \mathrm{vec}(\bar{\boldsymbol{y}}) = (\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{t}}\otimes\boldsymbol{I}_L)x + (\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{c}}\otimes\boldsymbol{I}_L)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n} \\ &= \boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{H}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}\end{aligned}$$

式中,$\boldsymbol{x} = \mathrm{vec}(\bar{\boldsymbol{X}})$,$\boldsymbol{n} = \mathrm{vec}(\bar{\boldsymbol{n}})$,$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}$ 及 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{c}}$ 分别为目标及杂波散射矩阵。

则系统输出 SCNR 为:

$$SCNR = \frac{\mathbb{E}[|\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}|^2]}{\mathbb{E}[|\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{H}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n})|^2]}$$

式中,$\boldsymbol{w}$ 表示接收机滤波器权值。

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{x} = (\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{t}}\otimes\boldsymbol{I}_L)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{G}_{\mathrm{t}}$$

以及

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{x} = (\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{c}}\otimes\boldsymbol{I}_L)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{G}_{\mathrm{c}}$$

其中,$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{I}_Q\otimes\bar{\boldsymbol{X}}$,$\boldsymbol{G}_{\mathrm{t}} = \mathrm{vec}(\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{t}})$,$\boldsymbol{G}_{\mathrm{c}} = \mathrm{vec}(\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{c}})$。

类似地,可得:

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{I}_{PM}\otimes\boldsymbol{W})\mathrm{vec}(\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{G}_{\mathrm{t}}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{I}_{PM}\otimes\boldsymbol{W})\mathrm{vec}(\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{G}_{\mathrm{c}}$$

其中,$\boldsymbol{w} = \mathrm{vec}(\boldsymbol{W})$,$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}_{PM}\otimes\boldsymbol{W}$,$\boldsymbol{K}_{(PM)}\mathrm{vec}(\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{c}}) = \mathrm{vec}(\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}})$,$\boldsymbol{K}_{(PM)Q}$ 为 $PMQ\times PMQ$ 交换矩阵[13]。

因此 SCNR 又可写为:

$$SCNR = \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\mathbb{E}[\boldsymbol{G}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}]\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\mathbb{E}[\boldsymbol{G}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}}]\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}} \quad (3)$$

式中,$\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}} = \mathbb{E}[\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathrm{H}}]$ 为噪声协方差矩阵,且为对角阵,对角元素为噪声功率谱密度(Power Spectral Density, PSD)采样。

对于随机信号模型,TIR 及 CIR 通常建模为服从复高斯分布的矢量[12],因此假设 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{t}} \sim \mathrm{CN}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}},\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}})$,$\boldsymbol{G}_{\mathrm{c}} \sim \mathrm{CN}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}},\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}})$。故而可以得到 $\mathbb{E}[\boldsymbol{G}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}] = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}$ 及 $\mathbb{E}[\boldsymbol{G}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}}] = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}} + \boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}}$,由此式(3)可以写为:

$$SCNR = \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}})\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}})\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}}$$

由于 SCNR 同时依赖于目标冲激响应均值矢量 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}$、协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}}$ 以及杂波冲激响应均值矢量 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$、协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}}$，$\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}$、$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}}$、$\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$、$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}}$ 的准确性将直接影响到系统输出 SCNR，从而影响目标的检测性能。针对 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}$、$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}}$、$\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$、$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}}$ 先验知识不准确的情况，通过设计稳健波形使在最差情况下输出 SCNR 最大。

令 $\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{t}}$ 及 $\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{c}}$ 分别表示 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}$ 及 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$ 的估计值，且均为无偏估计，即 $\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{t}}]=\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}$、$\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{c}}]=\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$，则均值矢量的估计误差可以建模为 $\mathbb{E}[(\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{t}}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}})(\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{t}}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}})^{\mathrm{H}}]=\boldsymbol{\Theta}_{\mathrm{t}}$ 及 $\mathbb{E}[(\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{c}}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}})(\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{c}}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}})^{\mathrm{H}}]=\boldsymbol{\Theta}_{\mathrm{c}}$，进一步可以得到 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}=\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{t}}]-\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Theta}_{\mathrm{t}})=\sigma_{\mathrm{t}}$，$\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}=\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{c}}]-\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Theta}_{\mathrm{c}})=\sigma_{\mathrm{c}}$，其中 $l_{u,\mathrm{t}}\leqslant\sigma_{\mathrm{t}}\leqslant u_{u,\mathrm{t}}$，$l_{u,\mathrm{c}}\leqslant\sigma_{\mathrm{c}}\leqslant u_{u,\mathrm{c}}$。同时，令 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}}$ 及 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}}$ 分别表示 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}}$ 及 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}}$ 的估计值，考虑目标及杂波不同散射区的冲激响应是相互独立的，因此 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}}$ 及 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}}$ 为对角阵，故而将协方差矩阵估计误差建模为：

$$l_{\Sigma,\mathrm{t}}\leqslant\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}}-\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}})\leqslant u_{\Sigma,\mathrm{t}}$$

$$l_{\Sigma,\mathrm{c}}\leqslant\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}}-\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}})\leqslant u_{\Sigma,\mathrm{c}}$$

其中，$u_{\Sigma,\mathrm{t}}$及 $u_{\Sigma,\mathrm{c}}$代表估计误差上界，$l_{\Sigma,\mathrm{t}}$及 $l_{\Sigma,\mathrm{c}}$代表估计误差的下界。

故在要求每一路发射波形都具有恒模特性的约束下，基于发射波形和接收机滤波器联合设计的优化问题可以写成以下极大极小化问题：

$$\begin{aligned}&\max_{X,\boldsymbol{w}}\min_{\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}},\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}}}\min_{\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}},\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}}} SCNR(\chi,\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}},\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}},\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}},\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}})\\ &\text{s.t. }\ |\boldsymbol{x}(k)|=\gamma,\ k=1,\cdots,LPM\\ &l_{u,\mathrm{t}}\leqslant\sigma_{\mathrm{t}}\leqslant u_{u,\mathrm{t}},\ l_{u,\mathrm{c}}\leqslant\sigma_{\mathrm{c}}\leqslant u_{u,\mathrm{c}}\\ &l_{\Sigma,\mathrm{t}}\leqslant\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}}-\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}})\leqslant u_{\Sigma,\mathrm{t}},\ l_{\Sigma,\mathrm{c}}\leqslant\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}}-\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}})\leqslant u_{\Sigma,\mathrm{c}}\end{aligned}\quad(4)$$

其中，$\gamma=\sqrt{E/LPM}$，E 为发射机总能量。

2 恒模稳健波形联合优化算法

为求解式(4)中的优化问题，可以采用循环优化算法，其中迭代过程涉及两个子优化问题：波形 χ 固定时对接收机滤波器权值 $\boldsymbol{w}$ 的优化以及固定 $\boldsymbol{w}$ 时对恒模发射波形 χ 的优化。以下依次求解这两个优化问题。

2.1 波形固定时的接收机滤波器权值优化

当发射波形 χ 已知时，为了优化接收机滤波器权值，需求解如下优化问题。

$$\begin{aligned}&\max_{\boldsymbol{w}}\min_{\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}},\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}}}\min_{\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}},\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}}}\frac{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}})\chi^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\chi(\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}})\chi^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{n}\boldsymbol{w}}\\ &\text{s.t. }\ l_{u,\mathrm{t}}\leqslant\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}\leqslant u_{u,\mathrm{t}},\ l_{u,\mathrm{c}}\leqslant\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\leqslant\boldsymbol{u}_{u,\mathrm{c}}\\ &l_{\Sigma,\mathrm{t}}\leqslant\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}}-\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}})\leqslant u_{\Sigma,\mathrm{t}},\ l_{\Sigma,\mathrm{c}}\leqslant\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}}-\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}})\leqslant u_{\Sigma,\mathrm{c}}\end{aligned}\quad(5)$$

由于 $\boldsymbol{w}$、$\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}$、$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}}$、$\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$、$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}}$ 之间的取值是相互独立的，优化问题中极大化极小化的位置可以互换，故而首先考虑以下优化问题。

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}},\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}}\frac{\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\Sigma}_{\chi}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}+\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}}\\ &\text{s.t. }\ l_{u,\mathrm{t}}\leqslant\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}\leqslant u_{u,\mathrm{t}},\ l_{u,\mathrm{c}}\leqslant\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\leqslant\boldsymbol{u}_{u,\mathrm{c}}\end{aligned}\quad(6)$$

在式(6)的优化问题中，$\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\Sigma}_{\chi}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}$、$\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}$ 以及 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}$ 为固定值，因此其最小值仅与 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}$ 及 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{H}\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$ 有关。由于 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}$ 与 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$ 相互独立，故而 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}$ 取最小值、$\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$ 取最大值时式(6)取得最小值。下面将 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{H}}\underline{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}}\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}$ 最小值建模为以下寻优问题。

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}\neq0}\frac{\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\chi,w}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}}{\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}\\ &\text{s.t. }\ l_{u,\mathrm{t}}\leqslant\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}\leqslant\boldsymbol{u}_{u,\mathrm{t}}\end{aligned}\quad(7)$$

其中，$\boldsymbol{R}_{\chi,w}=\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}$。

注意到 $\min_{\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}\neq0}\frac{\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\chi,w}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}}{\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}}$ 是一个典型的瑞利商优化问题，其最优值与 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}$ 取值无关；最优值为 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{R}_{\chi,w})$，最优解为 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}=\sqrt{\sigma_{\mathrm{t}}}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{R}_{\chi,w})$，其中 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{R}_{\chi,w})$为 $\boldsymbol{R}_{\chi,w}$最小特征值，$\boldsymbol{v}_{\min}(\boldsymbol{R}_{\chi,w})$为 $\boldsymbol{R}_{\chi,w}$最小特征值对应的单位特征矢量。故而可以得到式(7)的最优解为 $l_{u,\mathrm{t}}\lambda_{\min}(\boldsymbol{R}_{\chi,w})$。

类似地，可以得到 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{H}\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$ 的最大值为 $\boldsymbol{u}_{u,\mathrm{c}}\lambda_{\max}(\boldsymbol{R}_{\chi,w})$，其中 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{R}_{\chi,w})$为 $\boldsymbol{R}_{\chi,w}$最大特征值。同时，令 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}}-\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}}$，$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{c}}-\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}}$，则式(5)所示的优化问题可以写为：

$$\begin{aligned}&\max_{\boldsymbol{w}}\min_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}},\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}}}\\ &\frac{l_{u,\mathrm{t}}\lambda_{\min}(\boldsymbol{R}_{\chi,w})+\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{R}_{\chi,w})+\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{R}_{\chi,w})}{u_{u,\mathrm{c}}\lambda_{\max}(\boldsymbol{R}_{\chi,w})+\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{R}_{\chi,w})+\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{R}_{\chi,w})+\boldsymbol{R}_{\mathrm{n},w}}\\ &\text{s.t. }\ l_{\Sigma,\mathrm{t}}\leqslant\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}})\leqslant u_{\Sigma,\mathrm{t}},\ l_{\Sigma,\mathrm{c}}\leqslant\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}})\leqslant u_{\Sigma,\mathrm{c}}\end{aligned}\quad(8)$$

其中，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{n},w}=\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}$。

根据冯诺依曼迹不等式，优化问题 $\min_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}}}\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{R}_{\chi,w})$，s.t. $l_{\Sigma,\mathrm{t}}\leqslant\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}})\leqslant u_{\Sigma,\mathrm{t}}$可以取得最小值 $l_{\Sigma,\mathrm{t}}\lambda_{\min}(\boldsymbol{R}_{\chi,w})$，此时 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}}=l_{\Sigma,\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_{\min}(\boldsymbol{R}_{\chi,w})\boldsymbol{v}_{\min}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{R}_{\chi,w})$。同理，$\max_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}}}\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{R}_{\chi,w})$，s.t. $l_{\Sigma,\mathrm{c}}\leqslant\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}})\leqslant\boldsymbol{u}_{\Sigma,\mathrm{c}}$，可以取得最大值 $u_{\Sigma,\mathrm{c}}\lambda_{\max}(\boldsymbol{R}_{\chi,w})$，此时 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{u}_{\Sigma,\mathrm{c}}\boldsymbol{v}_{\max}(\boldsymbol{R}_{\chi,w})\boldsymbol{v}_{\max}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{R}_{\chi,w})$。$\boldsymbol{v}_{\min}(\boldsymbol{R}_{\chi,w})$及

$\boldsymbol{v}_{\max}(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},w})$分别为 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},w}$最小特征值及最大特征值对应的特征矢量,故而式(8)可以写为:

$$\max_{w}\frac{(l_{u,\mathrm{t}}+l_{\Sigma,\mathrm{t}})\lambda_{\min}(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},w})+\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},w})}{(u_{u,\mathrm{c}}+u_{\Sigma,\mathrm{c}})\lambda_{\max}(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},w})+\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},w})+\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}} \tag{9}$$

注意到

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},w})=[PQM\lambda_{\min}(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},w})]/(PQM)\leqslant\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},w})/(PQM)$$

$$\lambda_{\max}(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},w})=[PQM\lambda_{\max}(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},w})]/(PQM)\geqslant\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},w})/(PQM)$$

令

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{t}}=[(l_{u,\mathrm{t}}+l_{\Sigma,\mathrm{t}})/(PQM)]\boldsymbol{I}_{PQM}+\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}}$$

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{c}}=[(u_{u,\mathrm{c}}+u_{\Sigma,\mathrm{c}})/(PQM)]\boldsymbol{I}_{PQM}+\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}}$$

则式(9)可以化简为:

$$\max_{w}\frac{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},\mathrm{t}}\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},\mathrm{cn}}\boldsymbol{w}} \tag{10}$$

式中,$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},\mathrm{t}}=\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{P}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{H}}$,$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},\mathrm{cn}}=\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{P}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}$。

式(10)是一个广义瑞利商优化问题,其最优解为:

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},\mathrm{cn}}^{-1/2}\boldsymbol{v}_{\max}[(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},\mathrm{cn}}^{-1/2})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},\mathrm{t}}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\chi},\mathrm{cn}}^{-1/2}] \tag{11}$$

2.2　权值固定时的恒模波形优化

接下来计算接收机滤波器权值 $\boldsymbol{w}$ 已知时的恒模波形设计问题。相应的待求解问题可化简为:

$$\max_{\boldsymbol{F}}\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F})}{\mathrm{tr}[(\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}+(\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}/E)\boldsymbol{I}_{LPM})\boldsymbol{F}]}$$

$$\text{s. t. }\mathrm{diag}(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{\gamma}^{2},\ \boldsymbol{F}\succ\boldsymbol{0},\ \mathrm{rank}(\boldsymbol{F})=1 \tag{12}$$

其中,$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}$,$\mathrm{diag}(\cdot)$表示矩阵的对角元素,$\mathrm{rank}(\cdot)$表示矩阵的秩。

式(12)所示优化问题的目标函数及秩 1 约束均为非凸的,无法直接求解。半正定松弛(Semi-Definite Relaxation,SDR)是解决含秩 1 约束的优化问题的有效手段之一。SDR 首先求解不带秩 1 约束的波形优化问题,即对式(12)进行松弛处理:

$$\max_{\boldsymbol{F}}\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F})}{\mathrm{tr}[(\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}+(\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}/E)\boldsymbol{I}_{LPM})\boldsymbol{F}]}$$

$$\text{s. t. }\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{\gamma}^{2},\ \boldsymbol{F}\succ\boldsymbol{0} \tag{13}$$

显然式(13)的目标函数仍不是 $\boldsymbol{F}$ 的凸函数,因此依然不能通过内点法进行寻优。为解决此问题,引入引理 1。

引理 1　考虑如下优化问题:

$$\max_{\boldsymbol{F},\xi}\mathrm{tr}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F})$$

$$\text{s. t. }\ \mathrm{tr}\begin{cases}[(\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}+\\(\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}/E)\boldsymbol{I}_{LPM})\boldsymbol{F}]=1\\\mathrm{diag}(\boldsymbol{F})=\xi\boldsymbol{\gamma}^{2},\ \boldsymbol{F}\succ\boldsymbol{0},\ \xi>0\end{cases} \tag{14}$$

将其最优解记为$(\boldsymbol{F}^{*},\xi^{*})$,则式(13)的最优解为 $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}^{*}/\xi^{*}$。这里的最优解是指通过内点法所能寻到的最佳解。

证明:首先证明 $\boldsymbol{F}'$为式(13)的可行解,即证明 $\boldsymbol{F}'$满足式(13)的约束条件。由于$(\boldsymbol{F}^{*},\xi^{*})$满足式(14)约束条件,因此

$$\mathrm{diag}(\boldsymbol{F}^{*})=\mathrm{diag}(\boldsymbol{F}^{*}/\xi^{*})=\boldsymbol{\gamma}^{2},\ \boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}^{*}/\xi^{*}\succeq\boldsymbol{0}$$

故而 $\boldsymbol{F}'$是式(13)的可行解。

下面证明 $\boldsymbol{F}'$是式(13)的最优解。对于式(13)的任意可行解 $\boldsymbol{F}$,令

$$\mathrm{tr}[(\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}+(\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}/E)\boldsymbol{I}_{LPM})\boldsymbol{F}]=t$$

注意到

$$\mathrm{tr}[(\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}+(\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}/E)I_{LPM})\boldsymbol{F}/t]=1$$

$$\mathrm{diag}(\boldsymbol{F}/t)=\boldsymbol{\gamma}^{2}/t \tag{15}$$

由于 $\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}+(\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}/E)\boldsymbol{I}_{LPM}$及 $\boldsymbol{F}$ 均为正定阵,$t>0$,$\boldsymbol{F}/t$ 也是半正定阵,所以$(\boldsymbol{F}/t,1/t)$为式(14)的可行解。由于$(\boldsymbol{F}^{*},\xi^{*})$为式(14)的最优解,所以

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}/t)\leqslant\mathrm{tr}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}^{*})$$

考虑到

$$\mathrm{tr}[(\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}+(\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}/E)\boldsymbol{I}_{LPM})\boldsymbol{F}^{*}]=1$$

以及式(15),可以得到

$$\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}/t)}{\mathrm{tr}[(\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}+(\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}/E)\boldsymbol{I}_{LPM})\boldsymbol{F}/t]}$$

$$\leqslant\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}')}{\mathrm{tr}[(\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}+(\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}/E)\boldsymbol{I}_{LPM})\boldsymbol{F}']}$$

因此 $\boldsymbol{F}'$是式(13)的最优解。证毕。

式(14)是一个半正定规划问题,可在多项式时间内寻得最优解。假设其为$(\boldsymbol{F}^{*},\xi^{*})$,则式(13)的解为 $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}^{*}/\xi^{*}$。为获得相应的发射波形 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{opt}}$,则需进一步分析。

如果 $\boldsymbol{F}'$的秩为 1,则可取 $\boldsymbol{F}'$的第 1 列作为可行解 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{opt}}$。然而,一般情况下 $\boldsymbol{F}'$的秩并不为 1。当矩阵 $\boldsymbol{F}'$的秩大于 1 时,需要从 $\boldsymbol{F}'$中提取出 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{opt}}$,此时的 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{opt}}$通常只是近似解,而不会是全局最优解。通过高斯随机化的方法进行近似值的求解。具体流程见算法 1。

算法 1 恒模波形设计算法算法

Alg. 1 Design algorithm of constant modulus waveform

1. Input 本次循环得到的优化波形矩阵 $\boldsymbol{F}'$ 以及高斯随机化次数 N_{g}
2. 依次产生均值为 0，协方差矩阵为 $\boldsymbol{F}'$ 的高斯随机矢量 $\boldsymbol{f}_k, k=1,\cdots,N_{\mathrm{g}}$
3. 取 $\tilde{\boldsymbol{x}}_k=\sqrt{E}\exp(j\angle f_k)$ 保证波形恒定包，并以 $\tilde{\boldsymbol{x}}_k$ 计算式(13)的目标函数值 Obj_k，取令 Obj_k 最大的 $\tilde{\boldsymbol{x}}_k$，记为 $\tilde{\boldsymbol{x}}_1$
4. Output $\boldsymbol{x}_{\mathrm{opt}}=\tilde{\boldsymbol{x}}_1$

2.3 收敛性分析

将第 m 次迭代过程中得到的恒模波形记为 $\boldsymbol{x}^{(m)}$，接收机滤波器权值记为 $\boldsymbol{w}^{(m)}$。根据迭代优化过程，可以有

$$\begin{aligned}SCNR^{(m)}&\leqslant\frac{(\boldsymbol{x}^{(m)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{(m+1)}\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{V}^{(m+1)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}^{(m)}}{(\boldsymbol{x}^{(m)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{(m+1)}\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V}^{(m+1)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}^{(m)}+(\boldsymbol{w}^{(m+1)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}^{(m+1)}}\\&\leqslant\frac{(\boldsymbol{x}^{(m+1)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{(m+1)}\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{V}^{(m+1)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}^{(m+1)}}{(\boldsymbol{x}^{(m+1)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{(m+1)}\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V}^{(m+1)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}^{(m+1)}+(\boldsymbol{w}^{(m+1)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{w}^{(m+1)}}\\&=SCNR^{(m+1)}\end{aligned}\tag{16}$$

式中，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}$，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{K}_{(PM)Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{K}_{(PM)Q}^{\mathrm{H}}$。$\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}$ 及 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}$ 不随迭代过程而变化；因此在迭代过程中，系统在最差情况下的输出 SCNR 是非减的。

另外，对于第 m 次迭代，可以得到

$$\begin{aligned}SCNR^{(m)}&\leqslant\frac{\mathrm{tr}[\boldsymbol{V}^{(m)}\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{V}^{(m)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}'^{(m)}]}{\mathrm{tr}(\{\boldsymbol{V}^{(m)}\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V}^{(m)})^{\mathrm{H}}+[\sigma_{\min}^2\mathrm{tr}(T^{(m)})/E]\boldsymbol{I}_{LPM}\}\boldsymbol{F}'^{(m)})}\\&\leqslant\frac{\mathrm{tr}[\boldsymbol{V}^{(m)}\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{V}^{(m)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}'^{(m)}]E}{\sigma_{\min}^2\mathrm{tr}(T^{(m)})\mathrm{tr}(\boldsymbol{F}'^{(m)})}\end{aligned}$$

式中，$T^{(m)}=\boldsymbol{w}^{(m)}(\boldsymbol{w}^{(m)})^{\mathrm{H}}$，$\sigma_{\min}^2$ 表示噪声 PSD 的最小值。考虑 Cauchy-Schwartz 不等式，可以知道，对于给定的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\geqslant\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{0}\leqslant\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})\leqslant\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$，并且由于 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{F}'^{(m)})=E$，则

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{tr}[\boldsymbol{V}^{(m)}\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{V}^{(m)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}'^{(m)}]E}{\sigma_{\min}^2\mathrm{tr}(T^{(m)})\mathrm{tr}(\boldsymbol{F}'^{(m)})}\\&=\frac{\mathrm{tr}[\boldsymbol{V}^{(m)}\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{V}^{(m)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}'^{(m)}]}{\sigma_{\min}^2\mathrm{tr}(T^{(m)})}\\&\leqslant\frac{E\mathrm{tr}[\boldsymbol{V}^{(m)}\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{V}^{(m)})^{\mathrm{H}}]}{\sigma_{\min}^2\mathrm{tr}(T^{(m)})}\\&\leqslant\frac{E\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}})\mathrm{tr}[(\boldsymbol{V}^{(m)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{(m)}]}{\sigma_{\min}^2\mathrm{tr}(T^{(m)})}\\&=\frac{E\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}})PM\mathrm{tr}(T^{(m)})}{\sigma_{\min}^2\mathrm{tr}(T^{(m)})}=\frac{PME\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}})}{\sigma_{\min}^2}\end{aligned}$$

由此，可以得到

$$SCNR^{(m)}\leqslant\frac{PME\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}})}{\sigma_{\min}^2}\tag{17}$$

因此，在迭代过程中，系统的输出 SCNR 是有界的。综上，该联合优化算法是收敛的。

3 数值仿真与分析

本节主要对算法的有效性进行验证。假设发射阵元及接收阵元数分别为 $P=2$ 及 $Q=2$，发射信号长度 $L=10$，$M=5$，发射机总能量 $E=10$，$\zeta=10^{-3}$，$l_{u,\mathrm{t}}=l_{u,\mathrm{c}}=l_{\Sigma,\mathrm{t}}=l_{\Sigma,\mathrm{c}}=1$，$u_{u,\mathrm{t}}=u_{u,\mathrm{c}}=2$，$u_{\Sigma,\mathrm{t}}=u_{\Sigma,\mathrm{c}}=10$，目标协方差矩阵估计值 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{t}}$ 及杂波协方差矩阵估计值 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{c}}$ 采用随机的方式生成，噪声 PSD 采样如图 1 所示。

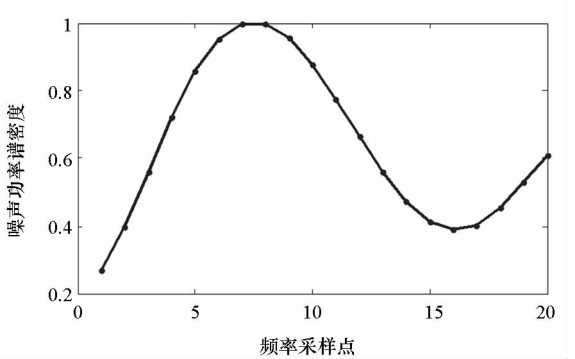


图 1 归一化噪声功率谱密度

Fig. 1 Normalized PSD of noise

考虑到发射波形及接收机滤波器权值初值对收敛速度的影响，对系统初始值进行分析。分别选取随机信号波形、随机相位编码波形、线性调频(Linear Frequency Modulated，LFM)信号、高斯包络波形以及恒包络波形作为发射波形初始值进行优化，对应的接收机滤波器权值初始值为初始发射波形矢量的前 LQ 项。仿真结果如图 2 所示。从图 2 可以看出虽然在初始情况下随机波形对应

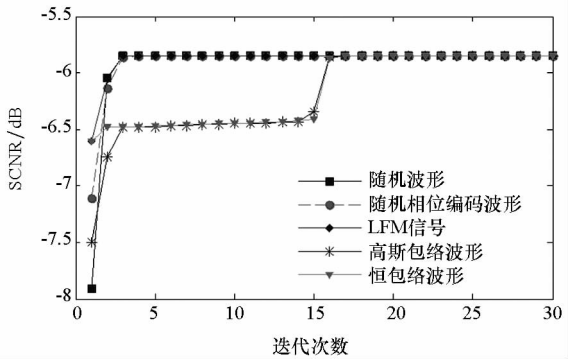


图 2 不同初始波形下 SCNR 随迭代次数的变化曲线

Fig. 2 SCNR versus the number of iterations for different initial waveforms

的系统输出 SCNR 最小,但是经过一次迭代后,随机波形对应的系统输出 SCNR 最大,且收敛速度较快,因此选择随机波形作为初始发射波形。

图 3 给出了不同设计波形在优化过程中 SCNR 随着迭代次数的变化曲线。图中非稳健波形对应的 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}$ 及 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$ 均为 1.5,目标及杂波协方差矩阵等于估计值。从图中可以看出,在 TIR 及 CIR 分布特性先验知识不准确的情况下,本文算法所设计的稳健波形在最差情况下的输出 SCNR 明显高于非稳健波形。同时,由于恒模约束是一个比能量约束更强的约束条件,可以看出与非恒模约束下的波形相比,恒模约束下的系统最差情况输出 SCNR 存在一定损失。但在迭代收敛时,所采用的恒模算法所造成的 SCNR 损失很小。此外,从图中可以看出,系统最差情况下输出 SCNR 是收敛的,从而验证了式(16)及式(17)中的分析。

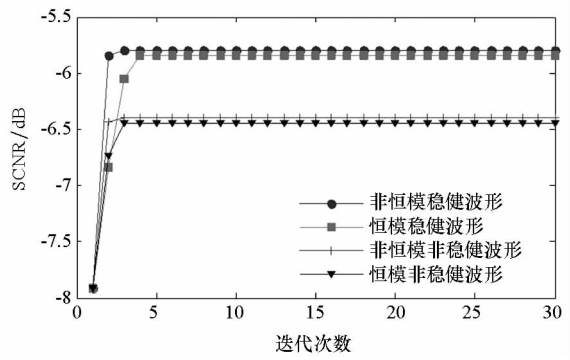


图 3　最差情况 SCNR 随迭代次数的变化曲线

Fig. 3　Worst-case SCNR versus the number of iterations

下面分析 TIR 及 CIR 分布特性先验知识不准确程度对系统输出 SCNR 的影响。由式(9)可以看出,系统输出 SCNR 仅与 $l_{u,\mathrm{t}}$,$l_{\Sigma,\mathrm{t}}$,$u_{u,\mathrm{c}}$ 及 $u_{\Sigma,\mathrm{c}}$ 有关,而与 $l_{u,\mathrm{c}}$,$l_{\Sigma,\mathrm{c}}$,$u_{u,\mathrm{t}}$ 及 $u_{\Sigma,\mathrm{t}}$ 的取值无关,且 $l_{u,\mathrm{t}}$ 和 $l_{\Sigma,\mathrm{t}}$ 以及 $u_{u,\mathrm{c}}$ 和 $u_{\Sigma,\mathrm{c}}$ 的取值对 SCNR 的影响相同,因此只需考虑 $l_{u,\mathrm{t}}$ 及 $u_{u,\mathrm{c}}$ 对系统输出 SCNR 的影响。

图 4 给出了在不同波形情况下,系统最差情况输出 SCNR 随 TIR 均值矢量均方下界 $l_{u,\mathrm{t}}$ 的变化曲线。在图 4 中,假定 $l_{u,\mathrm{t}}$ 从 1 到 20 变化,$l_{\Sigma,\mathrm{t}}=1$,$u_{u,\mathrm{c}}=2$,$u_{\Sigma,\mathrm{c}}=10$。从图 4 可以看出,随着 $l_{u,\mathrm{t}}$ 的增大,系统最差情况输出 SCNR 不断增大。原因是随着 $l_{u,\mathrm{t}}$ 的增大,TIR 的平均能量不断增大,所得到的回波信号的能量也因此增大,因此输出 SCNR 不断增大。另外,根据本文算法设计的稳健波形的输出 SCNR 明显高于非稳健波形,且增长幅度更大。此外,可以看出恒模波形相对于非恒模波形的 SCNR 损失非常小。

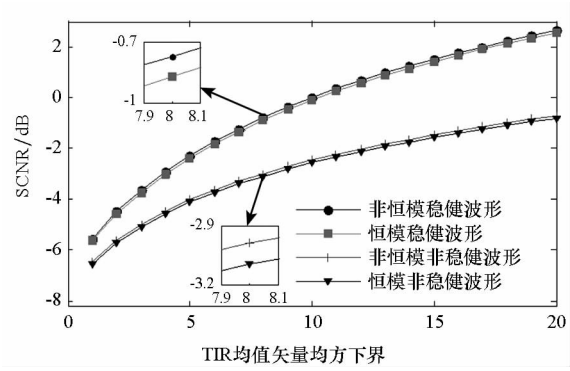


图 4　最差情况 SCNR 随 $l_{u,\mathrm{t}}$ 变化曲线

Fig. 4　Worst-case SCNR versus the $l_{u,\mathrm{t}}$

图 5 给出了在不同波形情况下,系统最差情况输出 SCNR 随 CIR 均值矢量均方上界 $u_{u,\mathrm{c}}$ 的变化曲线。在图 5 中,假定 $u_{u,\mathrm{c}}$ 从 2 到 22 变化,$l_{u,\mathrm{t}}=l_{\Sigma,\mathrm{t}}=1$。从图 5 可以看出,随着 $u_{u,\mathrm{c}}$ 的增大,系统最差情况输出 SCNR 不断减小,且根据本文算法设计的稳健波形的输出 SCNR 仍高于非稳健波形,且下降幅度更小。

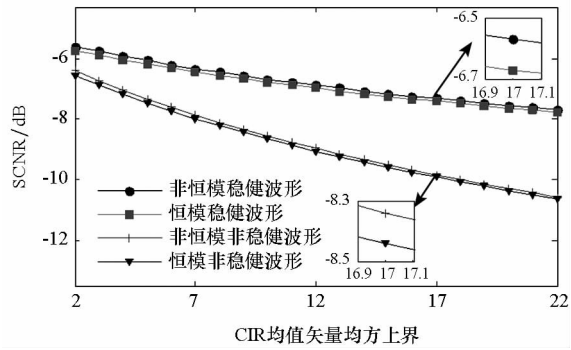


图 5　最差情况 SCNR 随 $u_{u,\mathrm{c}}$ 变化曲线

Fig. 5　Worst-case SCNR versus the $u_{u,\mathrm{c}}$

4　结论

与非稳健波形相比,所提算法设计的恒模稳健波形在 TIR 与 CIR 分布特性先验知识不准确的情况下输出 SCNR 更高,具有更好的目标检测性能;与非恒模稳健波形相比,所设计的恒模稳健波形的性能损失很小。当 TIR 与 CIR 分布特性先验知识不准确时,系统最差情况下的输出 SCNR 仅与 TIR 均值矢量均方下界、TIR 协方差矩阵估计误差下界、CIR 均值矢量均方上界以及 CIR 协方差矩阵估计误差上界有关,而与 TIR 均值矢量均方上界、TIR 协方差矩阵估计误差上界、CIR 均值矢量均方下界以及 CIR 协方差矩阵估计误差下界取值无关。

参考文献(References)

[1] Fishler E, Haimovich A, Blum R, et al. MIMO radar: an idea whose time has come[C]//Proceedings of IEEE Radar Conference, 2004: 71 – 78.

[2] 陈浩文, 黎湘, 庄钊文. 一种新兴的雷达体制——MIMO 雷达[J]. 电子学报, 2012, 40(6): 1190 – 1198.
CHEN Haowen, LI Xiang, ZHUANG Zhaowen. A rising radar system—MIMO radar[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(6): 1190 – 1198. (in Chinese)

[3] 许红波, 王怀军, 陆珉, 等. 一种新 MIMO 雷达 DOA 估计方法[J]. 国防科技大学学报, 2009, 31(3): 92 – 96.
XU Hongbo, WANG Huaijun, LU Min, et al. A new algorithm on estimation of DOA using MIMO radar[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2009, 31(3): 92 – 96. (in Chinese)

[4] Li J, Xu L Z, Stoica P, et al. Range compression and waveform optimization for MIMO radar: a cramer rao bound based study[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(1): 218 – 232.

[5] Cui G L, Li H B, Rangaswamy M. MIMO radar waveform design with constant modulus and similarity constraints[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(2): 343 – 353.

[6] 唐波, 张玉, 李科, 等. 杂波中 MIMO 雷达恒模波形及接收机联合优化算法研究[J]. 电子学报, 2014, 42(9): 1705 – 1711.
TANG Bo, ZHANG Yu, LI Ke, et al. Joint constant-envelope waveform and receiver design for MIMO radar in the presence of clutter[J]. Acta Electronica Sinica, 2014, 42(9): 1705 – 1711. (in Chinese)

[7] 申东, 张林让, 刘昕, 等. 用混沌序列提高 MIMO 雷达多目标检测性能[J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(6): 1188 – 1192.
SHEN Dong, ZHANG Linrang, LIU Xin, et al. Improvement on performance of MIMO radar for multiple targets detection with chaotic sequences[J]. System Engineering and Electronics, 2013, 35(6): 1188 – 1192. (in Chinese)

[8] 张向阳, 廖桂生, 许京伟, 等. 非完备目标先验知识多输入多输出雷达稳健波形设计[J]. 电波科学学报, 2014, 29(6): 1036 – 1044.
ZHANG Xiangyang, LIAO Guisheng, XU Jingwei, et al. Robust waveform design for MIMO radar with imperfect target prior knowledge[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2014, 29(6): 1036 – 1044. (in Chinese)

[9] Yu X X, Cui G L, Marco P, et al. Robust constrained waveform design for MIMO radar with uncertain steering vectors[J]. Eurasip Journal on Advances in Signal Processing, 2017, 2(1): 1856 – 1860.

[10] Jiu B, Liu H W, Feng D Z, et al. Minimax robust transmission waveform and receiving filter design for extended target detection with imprecise prior knowledge[J]. Signal Processing, 2012, 92(1): 210 – 218.

[11] Zhu W, Tang J. Robust design of transmit waveform and receive filter for colocated MIMO radar[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22(11): 2112 – 2116.

[12] Yang Y, Blum R S. MIMO radar waveform design based on mutual information and minimum mean-square error estimation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(1): 330 – 343.

[13] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2013: 74 – 76.
ZHANG Xianda. Matrix analysis and application[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2013: 74 – 76. (in Chinese)