doi:10.11887/j.cn.201806001 http://journal.nudt.edu.cn

J_2 摄动下卫星编队重构的多脉冲轨迹优化*

王有亮[1,2,3],郑建华[1,2,3],李明涛[1,2,3]

(1. 中国科学院 国家空间科学中心,北京 100190;
2. 中国科学院 复杂航天系统电子信息技术重点实验室,北京 100190;3. 中国科学院大学,北京 100049)

摘 要:针对考虑 J_2 摄动的椭圆参考轨道的编队重构问题,以消耗燃料最少为目标函数,基于高斯变分方程研究编队重构的多脉冲轨迹优化方法。推导考虑 J_2 摄动和轨道面内外耦合的轨道要素偏差线性动力学方程,采用遗传算法和序列二次规划结合的混合算法对总的速度增量进行优化。数值仿真表明该混合算法有效,可以高效地得到可行解。由于考虑了 J_2 摄动和椭圆参考轨道,该算法对航天任务中的轨迹优化具有一定的参考意义。

关键词:椭圆参考轨道;编队重构;多脉冲轨迹优化;J_2 摄动;高斯变分方程

中图分类号:V412 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2018)06-001-08

Multiple impulsive trajectory optimization of satellite formation reconfiguration under J_2 perturbation

WANG Youliang[1,2,3], *ZHENG Jianhua*[1,2,3], *LI Mingtao*[1,2,3]

(1. National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;
2. Key Laboratory of Electronics and Information Technology for Space Systems, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;
3. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Arming at the formation reconfiguration problem for the elliptic reference orbit under J_2 perturbation, a multiple impulsive trajectory optimization strategy was developed on the basis of the Gauss variation equation and with the objective function of minimal fuel consumption. A relative dynamics equation using the orbital element difference was derived, in which the J_2 perturbation and the coupling effects between in-plane and out-of-plane relative movements were considered. The hybrid approach of the genetic algorithm and the sequence quadratic programming was proposed to optimize the total velocity increment. The simulation results show that the hybrid approach is effective, and can obtain the feasible solution efficiently. Since the J_2 perturbation and elliptic reference orbit are considered in the study, the approach has some reference significance for the trajectory optimization of space mission.

Key words: elliptic reference orbit; formation reconfiguration; multiple impulsive trajectory optimization; J_2 perturbation; Gauss variation equation

近年来,微纳卫星技术不断取得进步,使得编队飞行技术得到快速发展,逐步从理论研究走向工程应用。编队卫星的功能多样、性能优异,可以通过星间协同实现空间数据的获取、处理、分析,在空间科学、对地观测等领域具有广阔的应用前景[1-2]。

卫星在轨运行期间,由于空间任务的切换等原因,要求卫星改变相对运动构型,这种相对轨道转移问题称为编队重构[3],其中构型初始化和分离部署可以看作是编队重构的一种特殊形式。编队重构是卫星编队飞行中的关键技术之一。为了降低重构过程的燃料消耗,国内外很多学者针对多脉冲燃料最优编队重构问题进行了研究。这些方法按照状态变量的不同大致分为两类:一类是以相对位置速度为状态变量,采用状态转移矩阵(例如 Hill 方程[4]或 Lawden 方程)推导多脉冲变轨的状态转移方程,称为动力学方法[3,5-8];另一类是以相对轨道根数为变量,利用高斯变分方程进行求解,称为运动学方法[9-13]。基于 Hill 方程,罗成等[5]推导了四种典型编队重构的双脉冲控制算法,孟云鹤等[6]提出了三次迹向脉冲和一次法向脉冲的编队重构解析控制方法。李保军

* **收稿日期**:2017-09-15
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11672293)
作者简介:王有亮(1990—),男,河南济源人,博士研究生,E-mail:wangyouliang13@mails.ucas.ac.cn;
郑建华(通信作者),女,研究员,博士,博士生导师,E-mail:zhengjianhua@nssc.ac.cn

等[7]基于 Lawden 方程的解析解,推导了多脉冲机动的数学模型,并利用遗传算法求解了该问题。Tillerson 等[8]基于线性化的动力学方程采用凸优化方法求解了编队重构问题。高斯变分方程(Gauss Variation Equation, GVE)是描述轨道根数和控制加速度之间关系的微分方程,近年来,基于高斯变分方程的控制方法,包括解析法和数值法两种,因其便利性得到了广泛的应用。Vadali 等[9]针对圆参考轨道采用无奇异轨道根数推导了两脉冲燃料最优的解析解。Schaub 等[10]采用平均轨道根数推导了 J_2 摄动下构型建立的解析反馈控制策略,得到了近似燃料最优解。针对近圆轨道的编队重构问题,基于相对偏心率和倾角矢量描述的高斯变分方程,胡敏等[11]设计了三次迹向和一次法向脉冲的控制方法,贺东雷等[12]和 Wang 等[13]证明了该方法最优性,Yin 和 Han[14]则推导了 J_2 摄动下该方法的最优解。

解析法简单可行,但是该方法一方面将平面内和平面外解耦进行分析无法严格保证燃料最优性,另一方面该方法主要针对忽略摄动力的近圆轨道。因此,数值法被广泛应用在轨迹优化中。针对考虑摄动和有约束的近圆轨道航天器交会问题,Luo 等[15]提出首先采用解析的 J_2 摄动方程通过遗传算法求解全局最优化问题,然后以该解为初始解采用序列二次规划(Sequential Quadratic Programming,SQP)算法和 Cowell 积分模型进行局部优化得到燃料最优解,Zhang 等推导了 J_2 摄动下的近圆偏差线性动力学方程,然后分别采用基于 SQP 的分支定界算法[16]与遗传算法[17]进行优化求得近似解,最后通过打靶迭代算法求得高精度解。针对平面绕飞椭圆构型初始化问题,雷博持和李明涛等基于高斯变分方程建立了多脉冲构型初始化模型,并分别采用遗传算法[18]和微分修正算法[19]进行了求解。

为了克服近圆轨道的局限性并考虑转移过程中的多圈问题,本文针对 J_2 摄动下椭圆参考轨道下的编队重构问题,基于高斯变分方程和广义逆理论,推导了脉冲作用点固定的多冲量最优变轨的线性化方程,然后通过遗传算法得到平均轨道根数模型下的最优脉冲编队重构的可行解,最后以该解为初值采用 SQP 算法求解了积分模型下的编队重构问题。

1　理论基础

1.1　常用坐标系定义

在编队飞行控制中,常采用当地垂直水平(Local-Vertical Local-Horizontal,LVLH)坐标系描述星间的相对运动。如图 1 所示,Ref 为主星,Sat 为从星。

建立以主星质心为原点 O 的 LVLH 空间直角坐标系:OX 轴为径向,沿地心与主星质心连线方向远离地心;OZ 轴指向轨道面法向;OY 轴由右手定则确定,称为迹向,与径向、法向构成右手正交直角坐标系。特殊地,当主星为圆轨道时,OY 在轨道面内与主星速度方向一致。该坐标系也被称作 RSW(其中 R 轴表示径向,S 轴表示迹向,W 轴表示法向)坐标系,常用于描述轨道摄动。

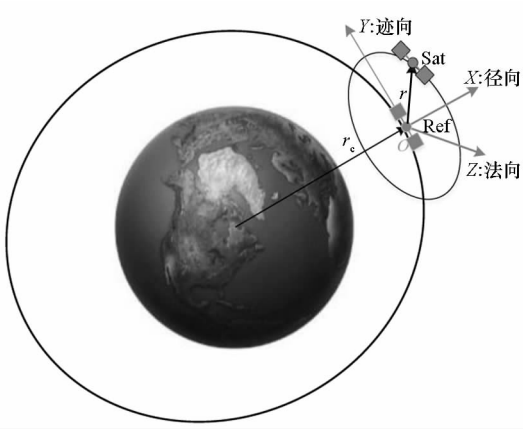


图 1　LVLH 坐标系示意图

Fig. 1　Schematic diagram of LVLH coordinate system

1.2　编队重构原理

编队重构是指根据空间任务的变化,通过一系列轨道机动控制,改变从星相对主星的轨道根数,从而改变相对轨道根数差,形成新的编队构型,其本质是轨道机动问题。

假设摄动力或控制力矢量 $\boldsymbol{u}=[u_\theta,u_r,u_h]^{\mathrm{T}}$,$u_\theta$、$u_r$ 和 u_h 分别表示控制力沿迹向、径向和法向的分量,则 $\boldsymbol{u}$ 对轨道根数 $[a,e,i,\Omega,\omega,M]$ 的影响可用高斯变分方程[1,20-21]来描述:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2a^2}{h}\left(u_r e\sin f+u_\theta\dfrac{p}{r}\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{h}\{u_r p\sin f+u_\theta[(p+r)\cos f+re]\}\\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=u_h\dfrac{r\cos\theta}{h}\\ \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=u_h\dfrac{r\sin\theta}{h\sin i}\\ \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{he}[-u_r p\cos f+u_\theta(p+r)\sin f]-\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n+\dfrac{\eta}{he}[u_r(p\cos f-2re)-u_\theta(p+r)\sin f]\end{cases}\tag{1}$$

式中:a,e,i,Ω,ω,M 分别表示轨道半长轴、偏心

率、轨道倾角、升交点赤经、近地点幅角、平近点角;f 表示真近点角,$p=a(1-e^2)$ 表示轨道的半通径,$n=\sqrt{\mu/a^3}$ 表示轨道角速度,$r=p/(1+e\cos f)$ 表示卫星到地心的距离大小,$h=\sqrt{\mu p}$ 表示轨道角动量矢量的大小,$\theta=\omega+f$ 表示纬度幅角,$\eta=\sqrt{1-e^2}$,$\mu=398\ 600.441\ 8\ \mathrm{km^3/s^2}$ 为地球中心引力常数。

高斯变分方程描述了存在摄动或控制力时轨道根数的导数随时间的变化,提供了一个求解脉冲变轨的简单模型。令 $\boldsymbol{\sigma}=[a,e,i,\Omega,\omega,M]^{\mathrm{T}}$,则式(1)可用矩阵的形式表示:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{u} \tag{2}$$

其中:

$$\boldsymbol{A}=[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad n]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2a^2p/(hr) & 2a^2e\sin f/h & 0\\ [(p+r)\cos f+re]/h & p\sin f/h & 0\\ 0 & 0 & r\cos\theta/h\\ 0 & 0 & r\sin\theta/(h\sin i)\\ (p+r)\sin f/(he) & -p\cos f/(he) & -r\cos i\sin\theta/(h\sin i)\\ -\eta(p+r)\sin f/(he) & \eta(p\cos f-2re)/(he) & 0 \end{bmatrix}$$

假设脉冲推力可以等效为作用时间 $\Delta t\to 0$ 时的有限推力,即 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}t}=\frac{\Delta\boldsymbol{\sigma}}{\Delta t}$,再将脉冲速度 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\Delta t$ 代入式(2),方程左右两端乘以 Δt,可得脉冲推力下的高斯摄动方程为:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{G}}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\sigma})\Delta\boldsymbol{v} \tag{3}$$

由高斯变分方程可知,轨道根数的改变量和脉冲速度呈线性关系。通过施加法向脉冲机动,可以改变轨道倾角和升交点赤经,完成轨道平面外的编队重构,但是轨道平面内的编队重构比较复杂,一方面需要在保持轨道半长轴不变的前提下,改变相对偏心率、相对近地点幅角和相对平近点角,另一方面需要消除由于升交点赤经改变引起的近地点幅角变化。

对于近地轨道卫星,非球形引力摄动中影响最主要的是 J_2 摄动。此时,常常忽略长短周期项,仅考虑长期项,采用平均轨道根数来描述 J_2 摄动下卫星轨道长期演化趋势。其中,长期漂移项可由线性微分方程式(4)求得[1]。

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\bar{a}}{\mathrm{d}t}=0\\ \frac{\mathrm{d}\bar{e}}{\mathrm{d}t}=0\\ \frac{\mathrm{d}\bar{i}}{\mathrm{d}t}=0\\ \frac{\mathrm{d}\bar{\Omega}}{\mathrm{d}t}=n_{\Omega}=-C_r\cos\bar{i}\\ \frac{\mathrm{d}\bar{\omega}}{\mathrm{d}t}=n_{\omega}=\frac{C_r}{2}(5\cos^2\bar{i}-1)\\ \frac{\mathrm{d}\bar{M}}{\mathrm{d}t}=\bar{n}+n_M=\bar{n}+\frac{C_r}{2}\sqrt{1-\bar{e}^2}(3\cos^2\bar{i}-1) \end{cases} \tag{4}$$

其中:

$$C_r=\frac{3J_2R_{\mathrm{e}}^2\bar{n}}{2\bar{p}^2}=\frac{3J_2R_{\mathrm{e}}^2}{2(1-\bar{e}^2)^2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^7}}$$

$\bar{p}=\bar{a}(1-\bar{e}^2)$ 为轨道平均半通径,$\bar{a}$ 为轨道平均半长轴,$\bar{e}$ 为平均偏心率;$\bar{n}=\sqrt{\mu/\bar{a}^3}$ 为轨道平均角速度;$R_{\mathrm{e}}=6378.137\ \mathrm{km}$ 为地球平均半径;$J_2=1.082\ 63\times10^{-3}$ 为地球二阶带状谐系数;$\bar{\boldsymbol{\sigma}}=[\bar{a},\bar{e},\bar{i},\bar{\Omega},\bar{\omega},\bar{M}]$ 为平均轨道根数,$\bar{i}$ 为平均轨道倾角,$\bar{\Omega}$ 为平均升交点赤经,$\bar{\omega}$ 为平均近地点幅角,$\bar{M}$ 为平均平近点角。

当只考虑长期项,忽略长周期项和短周期项,即假设 $\boldsymbol{\sigma}=\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 时,J_2 摄动的长期项用矩阵形式可表示为:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\sigma})\Delta t \tag{5}$$

其中:$\boldsymbol{D}=[0\quad 0\quad 0\quad n_{\Omega}\quad n_{\omega}\quad n+n_M]^{\mathrm{T}}$。

由 J_2 摄动的长期漂移公式可知,J_2 摄动下轨道的半长轴、偏心率和倾角不存在长期漂移,轨道的升交点赤经、近地点幅角、平近点角存在长期项。因此,如果能够充分利用 J_2 摄动下轨道的长期进动效应,则可以有效降低编队重构过程中所需的燃料消耗。

2　脉冲作用点固定的编队重构策略

根据式(3)和式(5),对于 N 脉冲轨道机动有:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{k,0}=\boldsymbol{\sigma}_{k-1}+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\sigma}_{k-1})\Delta t_k\\ \boldsymbol{\sigma}_k=\boldsymbol{\sigma}_{k,0}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\sigma}_{k,0})\Delta\boldsymbol{v}_k \end{cases}\quad k=1,2,\cdots,N \tag{6}$$

其中:$\boldsymbol{\sigma}_{k,0}$ 表示第 k 次轨道机动前的轨道根数,$\boldsymbol{\sigma}_k$ 表示第 k 次轨道机动后的轨道根数。

所以,对于 N 脉冲有:

$$\boldsymbol{\sigma}_N=\boldsymbol{\sigma}_0+\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\sigma}_{k-1})\Delta t_k+\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\sigma}_{k,0})\Delta\boldsymbol{v}_k \tag{7}$$

其中:$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}=(u_k-u_{k-1}+2\pi\Delta N_k)/n_{J_2}$ 表

示相邻两个脉冲作用点的时间间隔，$u=\omega+M$ 表示纬度平角，$n_{J_2}=n+n_\omega+n_M$ 表示 J_2 摄动长期影响下纬度平角的平均进动角速度。

由式(7)可得，当确定脉冲作用点的纬度平角 u_k、相邻两次脉冲之间的转移圈数 ΔN_k 和每次脉冲的速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}_k$ 时，即可确定每次脉冲作用点的时间 t_k 和轨道根数 $\boldsymbol{\sigma}_{k,0}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}_k$。

$$\boldsymbol{M}_{3\times3}=\begin{bmatrix}\dfrac{7C_r}{2a}\cos i & -\dfrac{4eC_r\cos i}{1-e^2} & C_r\sin i\\ -\dfrac{7C_r}{2a}\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right) & \dfrac{4eC_r}{1-e^2}\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right) & -5C_r\sin i\cos i\\ -\dfrac{3n}{2a}-\dfrac{7C_r\eta}{2a}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right) & \dfrac{3eC_r}{\eta}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right) & -3C_r\eta\sin i\cos i\end{bmatrix}$$

将式(8)代入式(7)，可得：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}_N=\boldsymbol{\sigma}_0+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\sigma}_0)t_N+\sum\limits_{k=1}^{N}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\sigma}_{k-1})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\sigma}_{k,0})\Delta\boldsymbol{v}_k\\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\sigma}_{k-1})=\boldsymbol{I}_3+\mathrm{d}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\sigma}_{k-1})(t_N-t_k)\end{cases}\tag{9}$$

同时，由于主星不进行轨道机动，因此有：

$$\boldsymbol{\sigma}_{RN}=\boldsymbol{\sigma}_{R0}+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\sigma}_{R0})t_N\tag{10}$$

其中：$\boldsymbol{\sigma}_{RN}$ 表示 t_N 时刻主星的轨道根数；$\boldsymbol{\sigma}_{R0}$ 表示初始时刻主星的轨道根数。

式(9)和式(10)相减可得：

$$\begin{cases}\Delta\boldsymbol{\sigma}_N=\Delta\boldsymbol{\sigma}_0+[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\sigma}_0)-\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\sigma}_{R0})]t_N+\\ \qquad\sum\limits_{k=1}^{N}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\sigma}_{k-1})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\sigma}_{k,0})\Delta\boldsymbol{v}_k\\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\sigma}_{k-1})=\boldsymbol{I}_3+\mathrm{d}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\sigma}_{k-1})(t_N-t_k)\end{cases}\tag{11}$$

用矩阵的形式表达，可得：

$$\boldsymbol{F}\Delta\boldsymbol{X}=\Delta\boldsymbol{Y}\tag{12}$$

其中：

$$\boldsymbol{F}=[\boldsymbol{F}_1\quad\boldsymbol{F}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{F}_N]$$

$$\boldsymbol{F}_k=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\sigma}_{k-1})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\sigma}_{k,0})$$

$$\Delta\boldsymbol{X}=[(\Delta\boldsymbol{v}_1)^{\mathrm{T}},(\Delta\boldsymbol{v}_2)^{\mathrm{T}},\cdots,(\Delta\boldsymbol{v}_N)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

$$\Delta\boldsymbol{Y}=\Delta\boldsymbol{\sigma}_N-\Delta\boldsymbol{\sigma}_0-[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\sigma}_0)-\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\sigma}_{R0})]t_N$$

当 $\boldsymbol{\sigma}_{k,0}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}_k$ 确定以后，$\boldsymbol{F}$ 为常值矩阵，由式(12)可知，$\Delta\boldsymbol{Y}$ 和 $\Delta\boldsymbol{X}$ 呈线性关系。由式(12)和广义逆理论可知，当 $N=2$ 时，满足 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{F})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{F}\mid\Delta\boldsymbol{Y})=6$，如果 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 存在，方程组存在唯一解 $\Delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}^{-1}\Delta\boldsymbol{Y}$，否则只能求解最小二乘解 $\Delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})^{-1}\Delta\boldsymbol{Y}$；当 $N>2$ 时，如果满足 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{F})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{F}\mid\Delta\boldsymbol{Y})=6$，方程组有多解，其通解形式为：

$$\Delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}^{+}\Delta\boldsymbol{Y}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}^{+}\boldsymbol{F})\boldsymbol{\xi}\tag{13}$$

其中：$\boldsymbol{F}^{+}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的广义逆矩阵，即若 $\boldsymbol{F}$ 的满秩分解为 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}$，则 $\boldsymbol{F}^{+}=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\xi}$ 为 $3N\times1$ 的任意向量。

此时，取最小范数解

将 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\sigma})$ 关于 $\boldsymbol{\sigma}$ 进行一阶线性化近似，可得：

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\sigma}_{k+1})=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\sigma}_k)+\mathrm{d}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\sigma}_k)\Delta\boldsymbol{\sigma}_k\tag{8}$$

其中：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3}\\ \boldsymbol{M}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3}\end{bmatrix}$$

$$\Delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}^{+}\Delta\boldsymbol{Y}\tag{14}$$

求得施加 N 脉冲所需的速度增量。需要注意的是，最小范数解和最省燃料解之间存在一定的差异，若要求得最省燃料的最优解，可以最小范数解为初始解，对通解形式中的 $\boldsymbol{\xi}$ 进行寻优[22]。

另外，当 N 脉冲的速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}_k$ 确定，根据式(6)，每次机动时刻的 $\boldsymbol{\sigma}_{k,0}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}_k$ 也就确定了。因此，采用迭代算法可以在保证精度的前提下快速求解脉冲作用点固定的 N 脉冲编队重构所需的速度增量。

3　脉冲作用点不固定的编队重构策略

当 $N>2$ 时，脉冲作用点不固定的多脉冲编队重构问题是一个典型的混合整数非线性规划(Mixed Integer Non-Linear Programming，MINLP)问题。MINLP 问题一般难以通过解析法求解，为了保证全局最优性，通常采用遗传算法、粒子群算法、模拟退火算法等智能优化算法求解。其问题描述为：给定初始时刻和终端时刻及这两个时刻的飞行状态，求 N 次脉冲施加时刻及对应的速度增量，使得卫星在终端时刻到达终端状态且消耗的燃料最少：

$$\begin{cases}\min\quad J=\sum\limits_{k=1}^{N}\|\Delta\boldsymbol{v}_k\|\\ \text{s.t.}\quad\boldsymbol{F}\Delta\boldsymbol{X}=\Delta\boldsymbol{Y}\end{cases}\tag{15}$$

其中，优化变量包括 N 脉冲作用点的纬度平角 $u_k\in[0,2\pi]$ 及相邻脉冲之间的转移圈数 ΔN_k，总共 $2N$ 个变量，要求 ΔN_k 为非负的整数。

此外，由于 J_2 平均化模型和 Cowell 积分模型之间有误差，因此首先采用全局收敛性较好的遗传算法获得一个较优的解，然后以该解为初值，采用 SQP 算法和考虑 J_2 摄动的多圈 Lambert 算法[23]求解数值积分高精度模型下的最终解。

对于最优轨道转移编队重构,尽管所需脉冲的最大数目 N_{max} 预先未知,但肯定不会超过 6 个(轨道要素的数量),通常 2 ~ 4 个脉冲对大部分轨道机动是足够的[1]。

4　仿真验证

以某对地观测任务为例,根据任务要求可以确定初始时刻的主星轨道根数和期望构型。根据编队构型设计方法和 J_2 构型稳定条件[24-25],得到期望构型对应的相对轨道根数,结果如表 1 所示,其中,任务目标是 N_{max} = 14 个轨道周期(约 1 d)之内通过编队重构从半径为2 km的空间圆(General Circular Orbit, GCO)构型转变为半径为 8 km 平面投影圆(Projected Circular Orbit, PCO)。

表 1　主星轨道根数与相对轨道根数

Tab. 1　Chief Orbital elements and the relative orbital element differences

轨道根数	主星	初始相对轨道根数	期望相对轨道根数
a/km	7378.137	4.094 0E-4	-1.638 9E-4
e	0.067 8	-1.388 8E-4	5.559 7E-4
i/(°)	63.434 9	-1.083 1E-3	4.336 1E-3
Ω/(°)	112	1.540 9E-2	7.122 8E-2
ω/(°)	0	-1.613 4E-2	-6.357 2E-2
M/(°)	0	9.242 8E-3	3.171 8E-2

下面针对第 2、第 3 节得到的多脉冲编队重构轨迹优化方法进行仿真验证,解算出多脉冲施加时刻和对应的速度增量,并绘制相对运动轨迹。

以 3 脉冲编队重构为例,对脉冲作用点的纬度幅角和转移圈数进行优化,利用本文所提算法求解该问题,所得结果如图 2 ~ 4 和表 2 所示。

由图2 可以看出,通过遗传算法对脉冲作用点优化后,平根数模型下 3 脉冲编队重构经过 20 代后收敛,所需要的速度增量大小约为 8.220 m/s。

表 2 给出了以图 2 遗传算法得到的解为初值、经过 SQP 优化后的最终解。由此可知,积分模型下 3 脉冲所需要的速度增量大小为 8.220 m/s。采用最终结果进行仿真分析,结果如图 3 所示,其中图 3(a)是相对轨迹的三维示意图,图 3(b)是相对轨迹 XY 和 YZ 平面的投影图。

图 4 给出了径向、迹向和法向三个方向的相对位置随时间的变化,由图可知,相较于径向和法向的相对距离变化,迹向的相对距离变化幅度较大,这主要是脉冲机动引起的平均相对半长轴不一致引起的迹向漂移。此外,图 3 和图 4 仿真结

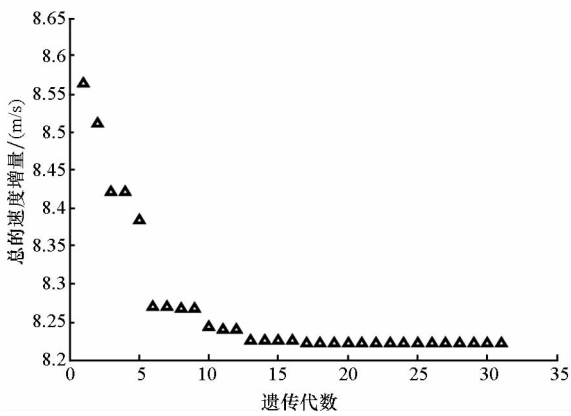
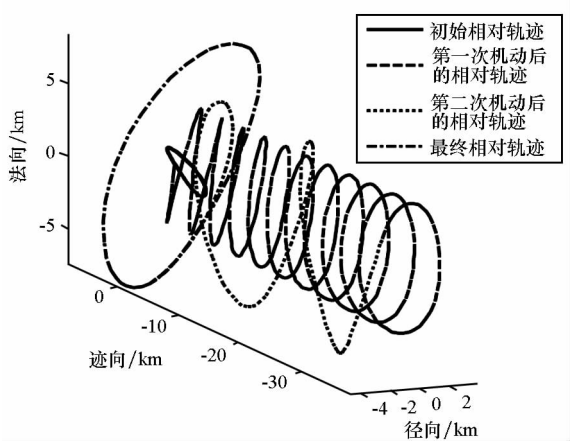


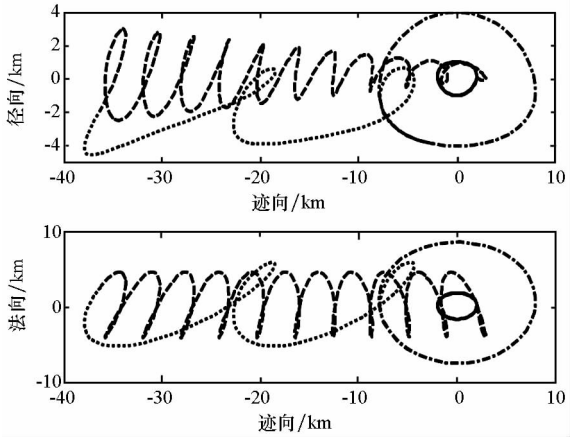
图 2　3 脉冲遗传算法优化结果

Fig. 2　Optimization results of three impulses using genetic algorithm



(a) 三维相对轨迹示意图

(a) Three dimensional relative trajectory



(b) 相对轨迹平面投影图

(b) Planar projection of relative trajectory

图 3　3 脉冲编队重构示意图

Fig. 3　Formation reconfiguration based on three impulses maneuver

果表明,该算法可以实现 J_2 摄动下的编队重构,而且能够稳定保持。

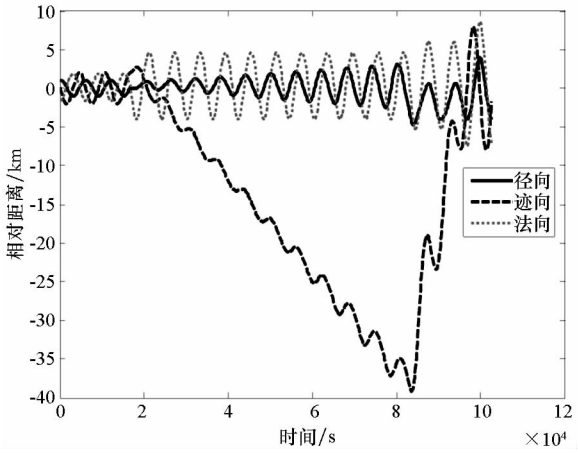


图4　星间的相对位置变化

Fig. 4　Evolvement of relative position between satellites

针对不同最大转移圈数的3脉冲轨迹优化各做了一次仿真,图5给出了随着最大转移圈数的变化,3脉冲变轨所需速度增量的变化。结果表明,转移时间的增加可以降低总的速度增量消耗,但不显著。

针对不同的脉冲数目,均做了10次试验,表3列举了不同脉冲数目和轨道类型对应的统计结果。由表3可知,所提混合算法以100%概率获得了该问题的可行解,解的最优性有一定的保证。通过二体模型求得的脉冲解采用 J_2 模型进行仿真,终端位置偏差较大,而基于轨道要素偏差动力学方程、采用遗传算法求出来的脉冲解终端位置误差相对较小。因此,以基于轨道要素偏差动力学方程得到的脉冲解为初始解,采用SQP和Lambert算法进行优化,可以在保证精度的前提下实现快速收敛。

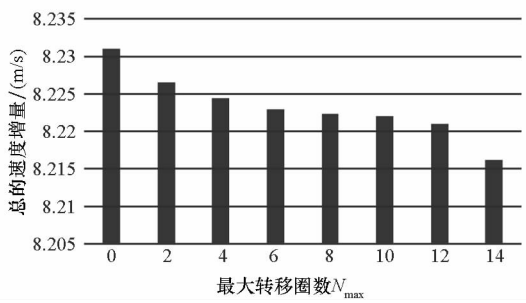


图5　总的速度增量随最大转移圈数的变化

Fig. 5　Total velocity increment over maximum transfer period

表4和表5分别给出了一组2脉冲和4脉冲优化的可行解。由表2、表4和表5可知,3脉冲相比于2脉冲,可以降低燃料消耗,但不显著,4脉冲和3脉冲燃料消耗基本相等。对于该仿真算例所示的编队重构,主要的消耗燃料是法向机动调整轨道倾角和升交点赤经,2脉冲和3脉冲的法向机动的燃料差别不大,4脉冲解的4个脉冲速度增量大小相差较小,即对发动机性能的要求相对较低。

表2　3脉冲优化求解结果

Tab. 2　Optimization solutions of three impulses

次序 k	时刻 t_k/s	脉冲作用点 u_k/(°)	转移圈数 ΔN_k	速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}_k$/(m/s)	总速度增量/(m/s)
1	16 718.356	274.155	2	[-1.372,0.106,2.484]	
2	82 723.319	238.864	10	[-0.881,-1.127,1.478]	8.220
3	95 614.302	285.649	2	[-1.576,0.719,-2.836]	

表3　J_2 摄动下多脉冲最优编队重构的结果统计

Tab. 3　Statistical results of fuel-optimal multiple-impulse formation reconfigurations under J_2 perturbation

脉冲数目	所需速度增量大小 Δv/(m/s)				收敛概率/%
	最小	最大	平均值	均方差	
2	8.239 22	8.240 57	8.239 56	0.000 40	100
3	8.213 64	8.224 87	8.221 53	0.003 45	100
4	8.161 53	8.219 30	8.208 05	0.018 46	100

表 4　2 脉冲优化求解结果

Tab. 4　Optimization solutions of two impulses

次序 k	时刻 t_k/s	脉冲作用点 u_k/(°)	转移圈数 ΔN_k	速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}_k$/(m/s)	总速度增量/(m/s)
1	89 376.765	274.787	14	[-4.123, 0.263, -6.180]	8.240
2	5199.311	223.964	0	[-0.291, 0.589, -0.466]	

表 5　4 脉冲优化求解结果

Tab. 5　Optimization solutions of four impulses

次序 k	时刻 t_k/s	脉冲作用点 u_k/(°)	转移圈数 ΔN_k	速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}_k$/(m/s)	总速度增量/(m/s)
1	16 592.786	259.004	2	[-0.141, -0.971, -1.780]	8.219
2	41 054.099	273.606	4	[0.349, -1.034, -1.886]	
3	76 629.552	230.339	5	[-1.053, -0.695, -1.207]	
4	89 593.915	280.045	2	[0.547, -1.049, -1.905]	

由于轨道倾角对构型的稳定性有较大影响,本文在构型保持不变的前提下给出了倾角为 10° 时编队重构所需的速度增量大小,结果如表 6 所示。由表 6 可知,当倾角为 10°时,脉冲数目的增加降低了燃料消耗,但不显著;相比倾角为 63.434 9°时,转移时间的增加可以较大程度地降低燃料消耗,主要原因是,对于临界倾角轨道,构型相对比较稳定[1],而由式(4)可知近地点幅角的进动速率为 0,升交点赤经的进动速率也较低。

表 6　10°轨道倾角的多脉冲优化求解结果

Tab. 6　Optimization solutions of multiple impulses with the orbital inclination of 10°

脉冲数目	最大转移圈数 $N_{\max}$	所需速度增量大小 Δv/(m/s)
2	14	8.786
3	14	8.751
4	14	8.743
3	0	8.913
3	6	8.832

5　结论

针对椭圆参考轨道下考虑 J_2 摄动的卫星编队重构问题,推导了多脉冲编队重构的轨道要素偏差动力学方程,并采用遗传算法求解了该问题的全局优化解,最后以该解为初值通过 SQP 和考虑 J_2 摄动的多圈 Lambert 算法求得最终解。仿真结果表明:

1)该算法对于求解 J_2 摄动下长时间的编队重构是有效的,即结合轨道要素偏差动力学方程的迭代算法和遗传算法的全局优化算法,可以为求解高精度的可行解提供较好的初值,加快收敛速度。

2)对于空间三维立体编队重构,3 脉冲比 2 脉冲燃料消耗低,4 脉冲和 3 脉冲燃料消耗基本相等;法向机动消耗占主要的燃料,转移时间的增加可以减少燃料消耗,但减少的显著程度和轨道倾角有较大关系。

该方法不仅可以应用于编队重构,还可进一步应用于航天器交会、轨道转移等问题的研究。[26]

参考文献(References)

[1] Alfriend K T, Vadali S R, Gurfil P. Spacecraft formation flying: dynamics, control and navigation[M]. USA: Oxford University Press, 2010: 6 - 7, 155 - 157, 182 - 184.

[2] 曹喜滨, 张锦绣, 王峰. 航天器编队动力学与控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 2013: 1 - 4.
CAO Xibin, ZHANG Jinxiu, WANG Feng. The dynamics and control of spacecraft formation flying[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2013: 1 - 4. (in Chinese)

[3] 刘鲁华, 孟云鹤, 安雪滢. 航天器相对运动轨道动力学与控制[M]. 北京: 中国宇航出版社, 2013: 93 - 94.
LIU Luhua, MENG Yunhe, AN Xueying. Orbit dynamics and control of spacecraft relative motion[M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 2013: 93 - 94. (in Chinese)

[4] Clohessy W H, Wiltshire R S. Terminal guidance system for satellite rendezvous[J]. Journal of the Aerospace Sciences, 1960, 27(9): 653 - 658.

[5] 罗成, 高大远, 沈辉, 等. 编队重构的双脉冲燃料最优控制[J]. 宇航学报, 2006, 27(6): 1211 - 1215.
LUO Cheng, GAO Dayuan, SHEN Hui, et al. Double impulse fuel-optimal control for formation reconfiguration[J]. Journal of Astronautics, 2006, 27(6): 1211 - 1215. (in Chinese)

[6] 孟云鹤, 韩宏伟, 戴金海. 近地轨道航天器编队构形重构的一种四冲量控制方法[J]. 宇航学报, 2008, 29(2): 505 - 510.

MENG Yunhe, HAN Hongwei, DAI Jinhai. A four-impulses control method for reconfiguration of LEO spacecraft formation flying[J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(2): 505 – 510. (in Chinese)

[7] 李保军, 师鹏, 张皓, 等. 卫星编队的多脉冲队形重构方法[J]. 北京航空航天大学学报, 2009, 35(8): 950 – 952, 961.
LI Baojun, SHI Peng, ZHANG Hao, et al. Satellites formation reconfiguration with multiple impulses[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2009, 35(8): 950 – 952, 961. (in Chinese)

[8] Tillerson M, Inalhan G, How J P. Co-ordination and control of distributed spacecraft systems using convex optimization techniques[J]. International Journal of Robust & Nonlinear Control, 2002, 12(2/3): 207 – 242.

[9] Vaddi S S, Alfriend K T, Vadali S R, et al. Formation establishment and reconfiguration using impulsive control[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2005, 28(2): 262 – 268.

[10] Schaub H, Alfriend K T. Impulsive feedback control to establish specific mean orbit elements of spacecraft formations[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2001, 24(4): 739 – 745.

[11] 胡敏, 曾国强, 姚红. 基于相对轨道根数的卫星编队重构控制研究[J]. 装备指挥技术学院学报, 2010, 21(1): 74 – 77.
HU Min, ZENG Guoqiang, YAO Hong. Research on satellite formation reconfiguration control based on relative orbit elements[J]. Journal of Academy of Equipment Command & Technology, 2010, 21(1): 74 – 77. (in Chinese)

[12] 贺东雷, 曹喜滨, 马骏, 等. 基于相对偏心率/倾角矢量的编队控制方法[J]. 系统工程与电子技术, 2011(4): 833 – 837.
HE Donglei, CAO Xibin, MA Jun, et al. Formation control approach based on relative eccentricity/inclination vector[J]. Systems Engineering and Electronics, 2011(4): 833 – 837. (in Chinese)

[13] Wang J H, Zhang J X, Cao X B, et al. Optimal satellite formation reconfiguration strategy based on relative orbital elements[J]. Acta Astronautica, 2012, 76: 99 – 114.

[14] Yin J F, Han C. Optimal impulsive maneuvers for formation reconfiguration using relative orbit elements[C]//Proceedings of IEEE International Conference on Control Science and Systems Engineering, 2014.

[15] Luo Y Z, Tang G J, Wang Z G, et al. Optimization of perturbed and constrained fuel-optimal impulsive rendezvous using a hybrid approach [J]. Engineering Optimization, 2006, 38(8): 959 – 973.

[16] Zhang J, Wang X, Ma X B, et al. Spacecraft long-duration phasing maneuver optimization using hybrid approach [J]. Acta Astronautica, 2012, 72: 132 – 142.

[17] Zhang J, Tang G J, Luo Y Z. Optimization of an orbital long-duration rendezvous mission [J]. Aerospace Science Technology, 2016, 58: 482 – 489.

[18] 雷博持, 郑建华, 李明涛. 椭圆轨道编队构型的初始化控制研究[J]. 空间科学学报, 2015, 35(1): 86 – 93.
LEI Bochi, ZHENG Jianhua, LI Mingtao. Research on formation initialization control for elliptic reference orbit [J]. Chinese Journal of Space Science, 2015, 35(1): 86 – 93. (in Chinese)

[19] 李明涛, 郑建华. 编队构型燃料最优可重构部署轨迹规划方法研究[C]//空天资源的可持续发展——第一届中国空天安全会议, 2015.
LI Mingtao, ZHENG Jianhua. Research on fuel optimal and reconfigurable formation initialization method [C]// Proceedings of the Sustainable Development of Space Resources—1st Chinese Space Safety Conference, 2015. (in Chinese)

[20] Vallado A D. Fundamentals of astrodynamics and applications[M]. 4th ed. USA: Microcosm, 2013: 628 – 636.

[21] Breger L, How J P. Gauss′s variational equation-based dynamics and control for formation flying spacecraft [J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2007, 30(2): 437 – 448.

[22] 向开恒, 肖业伦. 空间交会中脉冲变轨燃料消耗研究[J]. 中国空间科学技术, 1999(3): 48 – 54.
XIANG Kaiheng, XIAO Yelun. A study of propellant consumption of impulsive maneuvers in space rendezvous[J]. Chinese Space Science and Technology, 1999(3): 48 – 54. (in Chinese)

[23] Gooding R H. A procedure for the solution of Lambert′s orbital boundary-value problem[J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1990, 48(2): 145 – 165.

[24] Schaub H, Alfriend K T. J_2 invariant relative orbits for spacecraft formations[J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2001, 79(2): 77 – 95.

[25] 张玉锟, 戴金海. 考虑J2项摄动的卫星编队飞行[J]. 国防科技大学学报, 2002, 24(2): 6 – 10.
ZHANG Yukun, DAI Jinhai. Satellite formation flying with J2 perturbation[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2002, 24(2): 6 – 10. (in Chinese)

[26] 王有亮. 卫星编队飞行相对轨迹优化与控制[D]. 北京: 中国科学院大学, 2018.
WANG Youliang. Relative trajectory optimization and control for satellite formation flying [D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2018. (in Chinese)