

基于特征值的单矢量水听器目标检测算法*

马伯乐^{1,2}, 朱世强^{1,3}, 孙贵青¹

(1. 浙江大学海洋学院, 浙江舟山 316000; 2. 中国人民解放军92721部队, 浙江舟山 316000;

3. 之江实验室, 浙江杭州 310000)

摘要:针对水下目标检测在低信噪比与非平稳背景噪声情况下性能下降的问题,结合特征值检测算法原理,给出一种单矢量水听器联合信息互相关检测算法。该算法利用电子旋转导向角度与振速信息构成一种组合振速,并结合声压信息得到一种互相关值,在大快拍无信号条件下,该值满足渐进高斯分布;将该值除以解析振速与声压信息的协方差矩阵最小特征值,得到一种检测统计量;通过与门限值比较,实现目标检测。理论分析可见,所提检测算法无须背景噪声的先验信息,并且可以通过调节导向角度提高检测性能;在单目标情况下,利用检测统计量与导向角度的对应关系可实现目标方位估计。仿真与实测数据结果表明,相比于单矢量水听器最大最小特征值检测算法与能量检测算法,所提算法检测性能优良,适合于单矢量水听器目标预警检测。

关键词:单矢量水听器;最大最小特征值检测;能量检测

中图分类号:TN95 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2019)01-095-06

Single vector hydrophone target detection based on eigenvalue

MA Bole^{1,2}, ZHU Shiqiang^{1,3}, SUN Guiqing¹

(1. Ocean College, Zhejiang University, Zhoushan 316000, China;

2. The PLA Unit 92721, Zhoushan 316000, China; 3. Zhejiang Lab, Hangzhou 310000, China)

Abstract: Aiming at solving the decline of detection performance under low signal-noise ratio and nonstationary background noise and combining the principle of eigenvalue detection, a combination information cross-correlation detection algorithm based on single vector hydrophone was presented. This algorithm makes an assemble velocity by using electronic rotation angle and velocity information, and obtains a cross-correlation value with pressure. This value satisfies the asymptotic Gaussian distribution under large snapshot without target signal. This value is divided by minimum eigenvalue of analytical velocity covariance matrix to get a detection statistic. Finally, compared with the threshold, the object detection is achieved. The analysis of theory shows this algorithm does not need to know any prior information of background noise, and the detection performance can be improved by adjusting the guiding angle. This algorithm can achieve bearing estimation by using the relationship between detection statistic and guiding angle as to single target. The simulation and real data prove the superiority of the proposed algorithm, compared with the maximum-minimum eigenvalue detection algorithm and the energy detection algorithm.

Keywords: single vector hydrophone; maximum-minimum eigenvalue-detection; energy detection

目标辐射噪声的检测,一直是水下被动预警的一个重要课题。随着水中目标声源级的不断下降,低信噪比条件下的检测受到严峻挑战。现有主要的检测技术大多是基于声压水听器的过零检测与能量检测(Energy Detection, ED)法^[1]。虽然,近年来出现了许多新方法,但单个声压水听器只能测量单路声压信息,根本上制约了检测性能的进一步提高。

矢量水听器可以同步共点测量声压与振速信息^[2],对水声信号的感知要比传统的标量水听器

更精确^[3]。同时单个矢量水听器具有不依赖频率的单边指向性和抗各向同性噪声能力。因此,相比于声压传感器,矢量水听器及其阵列的目标探测性能要更优越。目前有关矢量水听器的研究主要集中于方位估计方面^[4-6]。

文献[7]将子空间检测法用于矢量阵情况,针对不同情况给出了四种检测算法并证明了矢量水听器多通道特性有助于检测性能提高。针对单个矢量水听器的检测,一种常用思路就是直接套用声压传感器的能量检测与过零检测法,但这种

* 收稿日期:2017-11-15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50909096)

作者简介:马伯乐(1984—),男,江苏常州人,工程师,博士,E-mail:2915484072@qq.com

处理方法往往只利用了部分信息,没有充分体现声压振速联合处理的优势。而且,由文献[1,8]所述可知,当背景噪声功率不稳定时,能量检测器与过零检测器的性能下降很严重。为此针对单矢量水听器,设计一种稳健的检测算法,是本文研究的主要内容。

近年来,随机矩阵理论的发展为不稳定背景噪声情况下的信号检测提供了有效的解决途径。文献[9-10]利用高斯白噪声协方差矩阵特征值的渐进统计特性,给出了一种最大最小特征值比的检测算法,该算法不但避免了背景噪声不稳定带来的性能下降,而且有效提高了在低信噪比情况下的检测性能。作为一种很有前景的检测算法,大量改进方法不断涌现,例如文献[11-13]所述。但上述算法是针对单个传感器在不同时间段的协方差矩阵的检测。2010年,文献[14]详细给出了基于阵列结构的特征值检测(EigenValue Detection, EVD)方法。

本文结合矢量水听器多通道优势与特征值检测法优点,给出一种联合信息互相关的检测法(Combination Information Cross-Correlation Detection, CICD)算法。该算法不但保留了 EVD 算法的不受背景噪声平稳性影响的优点,而且可以通过调节导向角度提高检测概率。同时单目标情况下,利用检测统计量与导向角度关系可以实现目标方位估计。

1 接收数据模型与相关定理

本文假设:①背景噪声为均值为 0 的复高斯白噪声,但噪声功率在不同时间段并非恒定;②目标信号与背景噪声统计独立;③检测传感器为二维矢量水听器。将单矢量水听器两个振速通道做如下处理,得到两个解析振速:

$$v_{ac1}(t) = v_x(t) - j \cdot v_y(t) \quad (1)$$

$$v_{ac2}(t) = v_x(t) + j \cdot v_y(t) \quad (2)$$

其中: $v_x(t)$, $v_y(t)$ 分别为单矢量水听器振速 x 与振速 y 通道信息。然后将解析振速与声压通道数据 $p(t)$ 构成接收阵列:

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} v_{ac1}(t) \\ p(t) \\ v_{ac2}(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (3)$$

其中: $\mathbf{n}(t)$ 为背景噪声矢量; $\mathbf{s}(t)$ 为目标信号;当目标存在时, $\boldsymbol{\mu}$ 为 1, 否则为 0; $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_1) \cdots \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_k)]$, k 为目标信号个数;对于第

i 个目标, $\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_i) = [e^{-j\theta_i}, 1, e^{j\theta_i}]^T$, $\boldsymbol{\theta}_i$ 为第 i 个目标方位角。设采样快拍为 M , 进一步求得接收数据协方差矩阵:

$$\mathbf{R}(M) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{y}'(t) \cdot \mathbf{y}'(t)^H \quad (4)$$

文献[15]指出,在目标不存在时,式(4)为复非相关中心 Wishart 矩阵,并且针对最小特征值极限分布给出如下定理:

定理 设 $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{N}{M} = \rho$ ($0 < \rho < 1$), 则 $\lim_{M \rightarrow \infty} \lambda_{\min} = \sigma_n^2(1 - \sqrt{\rho})^2$ 。根据这个定理,当 M 很大时, Wishart 矩阵最小特征值为一定值 $\frac{\sigma_n^2}{M}(\sqrt{M} - \sqrt{N})^2$ 。其中 N 为阵元数, λ_{\min} 为式(4)对应的最小特征值, σ_n^2 为背景噪声功率。

2 联合信息互相关的检测法

为减少非平稳背景噪声影响,结合单矢量水听器多通道优势和 Wishart 矩阵最小特征值极限分布,给出一种 CICD 算法。首先给出一个组合振速:

$$v_c(t) = \cos\theta \cdot v_x(t) + \sin\theta \cdot v_y(t) \quad (5)$$

其中, θ 为导向角度。然后,进行互相关运算:

$$r(\theta, \tau) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{t=1}^M \{ [p(t) + v_c(t)] \cdot v_c(t + \tau) \} \quad (6)$$

其中: τ 为延时量。于是定义一个检测统计量:

$$\gamma' = \frac{r(\theta, \tau)}{\lambda_{\min}} \quad (7)$$

不难证明,当不存在信号时,式(6)为 0;当目标存在(以单目标为例)时,式(7)可写成

$$\gamma' = \frac{[s(t) + \cos\theta_d \cdot s(t)] \cdot \cos\theta_d \cdot s(t + \tau)}{\sigma_n^2} \neq 0 \quad (8)$$

其中, $\theta_d = \theta - \theta_0$ 为目标方位 θ_0 与导向角之差。

因此,可以利用 γ' 取值的不同实现目标的检测,但上述检测统计量值是极限情况下的值,对于有限快拍情况, γ' 不可能为一个定值,而是一个随机变量。由于背景噪声为复高斯白噪声,并且只要 τ 足够大,保证延时采样点与累加采样点没有重合,在 $M \rightarrow \infty$ 时,根据中心极限定理可见, $r_n(\theta, \tau)$ 满足渐进高斯分布,不难证明其期望为 0。对于其方差 $\sigma_r^2 = E[r_n^2(\theta, \tau)]$, 由白噪声特性可得, $r_n^2(\theta, \tau)$ 的交叉项的期望为 0, 于是可简化为:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{M^2} E \left(\sum_{t=1}^M \{ [n_p(t) + D(t)] D(t + \tau) \}^2 \right) \quad (9)$$

其中, $n_p(t)$ 为声压通道噪声,

$$\begin{aligned} & E \{ [n_p(t) + D(t)] D(t + \tau) \}^2 \\ &= E[n_p^2(t) D^2(t + \tau)] + E[2n_p(t) D(t) D^2(t + \tau)] + \\ & E[D^2(t) D^2(t + \tau)] \end{aligned} \quad (10)$$

$$D(t) = \cos\theta \cdot n_{ix}(t) + \sin\theta \cdot n_{iy}(t) \quad (11)$$

由于噪声与信号相互独立,因此式(10)可简化为:

$$\begin{aligned} & E \{ [n_p(t) + D(t)] D(t + \tau) \}^2 \\ &= E[n_p^2(t)] \cdot E[D^2(t + \tau)] + E[D^2(t)] \cdot \\ & E[D^2(t + \tau)] \end{aligned} \quad (12)$$

其中,

$$\begin{aligned} E[D^2(t)] &= E[\cos^2\theta \cdot n_{ix}^2(t) + 2\cos\theta\sin\theta n_{ix}(t) \cdot \\ & n_{iy}(t) + \sin^2\theta \cdot n_{iy}^2(t)] \end{aligned} \quad (13)$$

各向同性噪声场中两个振速通道噪声不相关,式(13)的值为 $\frac{\sigma_n^2}{2}$ 。于是可得式(12)的值为:

$$E \{ [n_p(t) + D(t)] D(t + \tau) \}^2 = \frac{3\sigma_n^4}{4} \quad (14)$$

最后可得 $r_n(\theta, \tau)$ 的期望为:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \frac{3\sigma_n^4}{4} = \frac{3\sigma_n^4}{4M} \quad (15)$$

于是虚警概率的表达式为:

$$P_{fa} = P\left(\frac{r_n(\theta, \tau)}{\lambda_{\min}} > \gamma' \mid H_0\right) \quad (16)$$

其中, H_0 表示无目标信号情况, γ' 为检测门限。结合上文定理,式(16)等价于:

$$\begin{aligned} P_{fa} &= P\left(r_n(\theta, \tau) > \gamma' \cdot \frac{\sigma_n^2}{M} (\sqrt{M} - \sqrt{3})^2\right) \\ &= P\left(\frac{r_n(\theta, \tau) \cdot 2\sqrt{M}}{\sqrt{3} \cdot \sigma_n^2} > \gamma' \cdot \frac{(\sqrt{M} - \sqrt{3})^2}{M} \cdot \frac{2\sqrt{M}}{\sqrt{3}}\right) \\ &= Q\left(\gamma' \cdot \frac{(\sqrt{M} - \sqrt{3})^2}{M} \cdot \frac{2\sqrt{M}}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

其中,

$$Q(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{\kappa}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \quad (18)$$

于是,在固定虚警概率条件下,求解式(18)反函数,不难得到检测门限 γ' 为:

$$\gamma' = \frac{\sqrt{3}MQ^{-1}(fa)}{2\sqrt{M}(\sqrt{M} - \sqrt{3})^2} \quad (19)$$

3 检测性能分析

假设单个目标情况,由于信号的存在,协方差矩阵 $\mathbf{R}(M)$ 已不再是 Wishart 矩阵。根据文献[10]所述,单目标情况下矩阵 $\mathbf{R}(M)$ 的最小特征值仍满足极限定值定理。于是单个目标情况

下, CICD 算法的检测概率为:

$$\begin{aligned} P_{\text{dCICD}} &= P\left(\frac{r(\theta, \tau)}{\lambda_{\min}} > \gamma'\right) \\ &= Q\left(\gamma' \cdot \frac{2\sqrt{M}(\sqrt{M} - \sqrt{3})^2}{\sqrt{3}M} \frac{(1 + \cos\theta_d)\cos\theta_d \cdot \sigma_s^2 \cdot 2\sqrt{M}}{\sqrt{3}\sigma_n^2}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

其中: σ_n^2, σ_s^2 分别为背景噪声与信号功率。由文献[9]所得单矢量水听器最大最小特征值检测 (Single Vector Max-Min Eigenvalue, SV-MME) 算法的检测概率与门限为:

$$P_{\text{dMME}} = 1 - F_1\left(\frac{\gamma M + M(\gamma - \lambda_{s1})/\sigma_n^2 - (\sqrt{M-1} + \sqrt{3})^2}{(\sqrt{M-1} + \sqrt{3})\left(\frac{1}{\sqrt{M-1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{1/3}}\right) \quad (21)$$

$$\gamma = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{M})^2}{(\sqrt{3} - \sqrt{M})^2} \cdot \left(1 + \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{M})^{-2/3}}{(3M)^{1/6}} F_1^{-1}(1 - P_{fa})\right) \quad (22)$$

其中, $F_1(\dots)$ 为 Tracy-Widom 第一累积分布函数。

传统声压能量检测概率为:

$$P_{\text{Ed}} = Q\left(\frac{[Q^{-1}(P_{fa})](\sqrt{1/N} + 1)\sigma_n^2 - (\sigma_s^2 + \sigma_n^2)}{\sqrt{1/N}(\sigma_s^2 + \sigma_n^2)}\right) \quad (23)$$

由 SV-MME 与 CICD 算法的门限可见, SV-MME 与 CICD 无须背景噪声先验信息,可以保持对非平稳噪声的稳定性。从检测概率表达式可见,三种算法可以通过调节采样快拍改善检测性能,其中 CICD 方法检测概率受导向角度影响,因此其还可以通过调节导向角度进一步改善检测能力。同时不难证明,只有当导向角度与目标方位角相同(即 $\theta_d = 0$) 时, CICD 检测概率最大,因此在单目标情况下, CICD 算法的这种角度信息可以在检测的同时大致给出目标的方位。

4 仿真实验与分析

仿真 1: 背景噪声功率 $\sigma_n^2 = 1$; 噪声能量起伏度为 0 dB, 1 dB, 3 dB, 信号为 1 kHz 单频信号; 采样率 10 kHz; 采样点数为 5000; CICD 算法中的延时量取 $\tau = 2500$; 累加求和点数为 2500; 信号方位角度 60° ; 导向角度 60° ; 虚警概率为 0.1; 信噪比变化范围 $-20 \sim 5$ dB; 1000 次蒙特卡洛实验。图 1 给出在背景噪声起伏情况下, SV-MME 算法, CICD 算法, ED—0 dB, ED—1 dB, ED—3 dB 的检测概率图。低信噪比情况下, SV-MME 算法的检测性能弱于能量检测器,随着信噪比的提高,特别是 -13 dB 以后, SV-MME 算法的检测性能明显

提高,并高于能量检测算法,在 -10 dB 以后达到正确检测。而本文的 CICD 算法无论在何种信噪比情况下其检测概率都是最高的,在 -9 dB 时实现正确识别。当噪声存在起伏时,传统的能量检测器性能下降严重,在信噪比 $-20 \sim 5$ dB 范围内其检测性能都要次于 SV-MME 与 CICD 算法。由此可见,噪声起伏对 SV-MME 与 CICD 算法的影响较小。

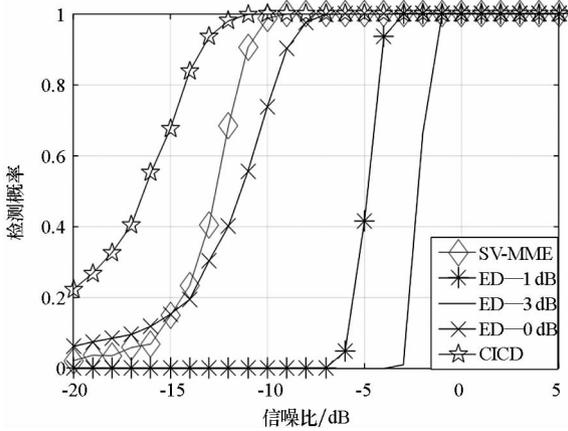


图 1 检测概率示意图

Fig. 1 Sketch map of probability of detection

仿真 2: 信噪比取 -15 dB; 虚警概率 0.1; 采样点数变化范围为 $1000 \sim 10\,000$; CICD 算法的累加求和点数与延时量都为采样点数一半; 信号方位与导向角同仿真 1 一致; 5000 次蒙特卡洛实验。图 2 给出了仿真结果。从图中可见,在背景噪声起伏情况下,传统的能量检测器已不能进行检测识别,即使采样点数增加,其性能也无法改进。对于 SV-MME 算法,在低快拍情况下其检测概率与 ED-0 dB 算法检测概率相差无几,随着采样点数的增加,SV-MME 的性能提高,特别在 6000 采样数以后,其检测概率高于 ED-0 dB。

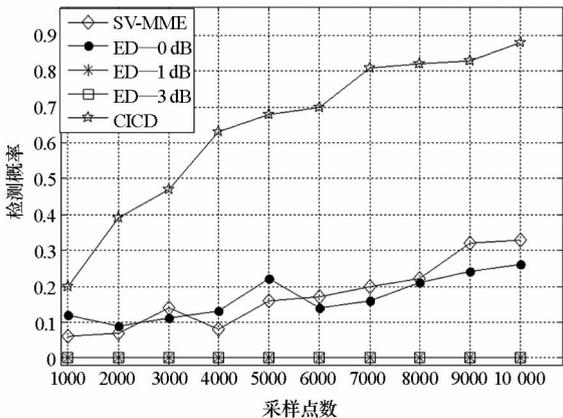


图 2 不同采样点数检测概率示意图

Fig. 2 Sketch map of probability of detection under different sample number

而本文的 CICD 算法无论在何种采样点数,其性能都优于其他算法,并且随点数增加,其检测性能提高较快,由此可见本文算法的检测性能可以通过增加采样快拍进行改善。

仿真 3: 目标设为单目标; 方位角为 60° ; 采样点数 2500; 信噪比 -15 dB; 导向角度与目标方位差为 $0^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$ 。图 3 给出了 CICD 算法的接收机操作特性 (Receiver Operating Characteristic, ROC) 曲线。从图中可见,随着导向角度接近目标方位,本文算法的检测概率较高。由此可见,调节导向角度可以提高 CICD 算法检测概率。

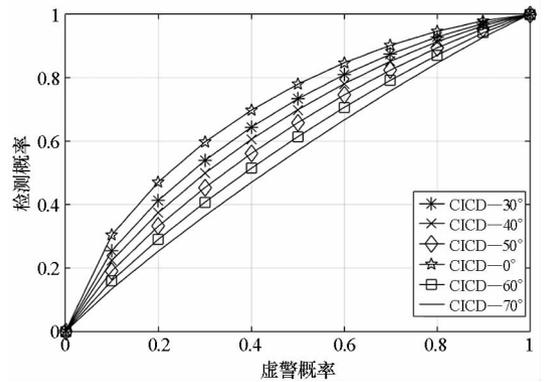


图 3 CICD 算法 ROC 曲线

Fig. 3 ROC curve of CICD algorithm

仿真 4: 信噪比变换范围 $-20 \sim 5$ dB; 采样点数 5000; CICD 算法的累加求和点数与延时量都为采样点数一半; 目标方位角 60° ; 检测导向角度变化范围 $0 \sim 360^\circ$; 100 次蒙特卡洛实验。图 4 给出了 CICD 算法最大检测统计量对应角度与单矢量水听器 P-V 方位估计均方根误差图。由图中可见, CICD 算法在低信噪比情况下角度估计能力弱于 P-V 算法,随着信噪比增加,两者方位估计精度明显改善。由此可见, CICD 算法在目标检测的同时利用统计量与导向角度关系可以大致给出

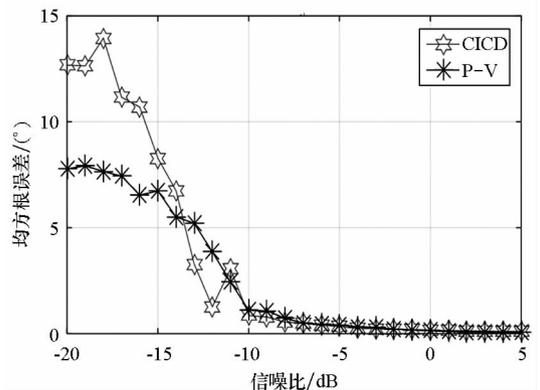


图 4 均方根误差图

Fig. 4 Sketch map of root mean square error

目标方位,特别在较高信噪比情况下,其性能与P-V算法相似。

5 实测数据验证

实验数据来自2009年某次汉江实验,传感器为单个压差式矢量水听器。水听器固定于船尾,并下坠至水下1 m处,目标船从水听器位置逐渐远离。采样频率为39 682 Hz,经数据分析,大致在1149 Hz处有明显线谱成分,该信号作为目标信号进行处理。以2 s为一个检测数据单元,总共取出24组检测单元,每组检测单元包含噪声与目标信息。图5给出了CICD算法与SV-MME算法检测统计量与各自门限值比值图,其中CICD算法的统计量是360°搜索后统计量的最大值。从图中可见,CICD算法在多数检测单元内,其统计量高出门限的幅度要大于SV-MME,特别是在第10个检测单元后(即低信噪比),其优势更明显。这说明CICD算法的总体检测性能要优于SV-MME算法。图6给出了CICD算法利用统计量大小估计的大致目标方位,从图中可见,目标船从大

致100°方位开始出现,并逐渐远离,向20°方向靠近,这与实际测量情况基本一致。此充分证明,CICD算法在给出检测预警同时,还可以给出目标的大致方位信息,这与上文理论论述一致。

6 结论

本文给出一种基于联合信息的互相关检测算法CICD,该算法首先构造一种组合振速-声压联合的互相关值,在大快拍条件下该值满足渐近高斯分布。然后将该值除以解析振速与声压的协方差矩阵最小特征值。利用特征值检测算法原理,推导了检测门限与检测概率。由检测门限可见,CICD算法无须背景噪声功率的先验信息,因此具有对起伏噪声的稳定性;由接收机ROC特性可知,通过调节导向角度,可以进一步提高检测性能。同时在单目标情况下,利用导向角度与检测统计量关系可进行目标方位估计。仿真与理论分析一致,最后的实测数据也证明了CICD法的优越性。本文的成果对单矢量水听器预警检测提供了一种实用手段。

参考文献 (References)

- [1] 刘科满,相敬林,候铁双,等.基于过零特性与能量特性的声引信检测方法[J].兵工学报,2008,29(9):1044-1048.
LIU Keman, XIANG Jinglin, HOU Tieshuang, et al. A joint method of zero-crossing detection and energy detection [J]. Acta Armamentarii, 2008, 29(9): 1044 - 1048. (in Chinese)
- [2] Nehorai A, Paldi E. Acoustic vector-sensor array processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(9): 2481-2491.
- [3] Palanisamy P, Kalyanasundaram N, Swetha P M. Two-dimensional DOA estimation of coherent signals using acoustic vector sensor array [J]. Signal Processing, 2012, 92(1): 19-28.
- [4] He J, Liu Z. Two dimensional direction finding of acoustic sources by vector sensor array using the propagator method[J]. Signal Processing, 2008, 88(10): 2492-2499.
- [5] Wong K T, Zoltowski M D. Root-MUSIC-based azimuth-elevation angle-of-arrival estimation with uniformly spaced but arbitrarily oriented velocity hydrophone [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(12): 3250-3260.
- [6] Nagananda K G, Anand G V. Subspace intersection method of high-resolution bearing estimation in shallow ocean using acoustic vector sensors[J]. Signal Processing, 2010, 90(1): 105-118.
- [7] Haria V N, Anand G V, Premkumar A B. Narrowband signal detection techniques in shallow ocean by acoustic vector sensor array [J]. Digital Signal Processing, 2013, 23(5): 1645-1661.
- [8] Tandra R, Sahai A. SNR walls for signal detection[J]. IEEE

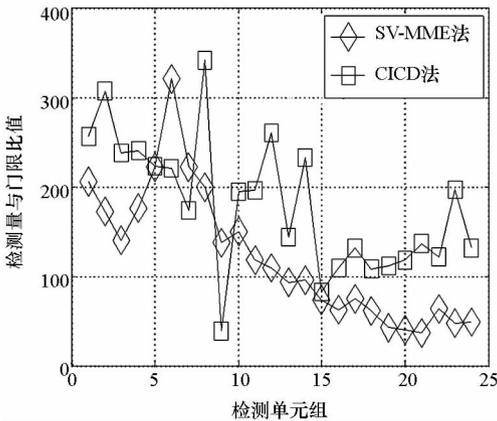


图5 检测量与门限比值示意图

Fig. 5 Sketch map of ratio of detection value and threshold

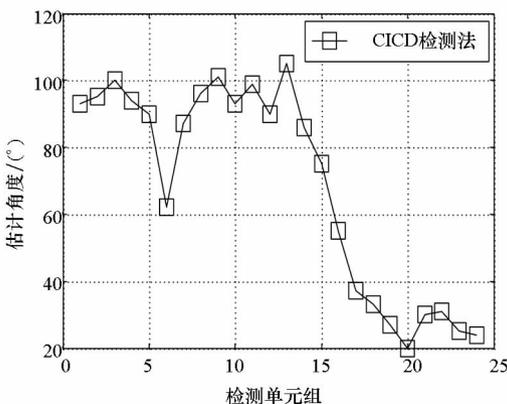


图6 检测量方位估计结果

Fig. 6 Result of direction estimation by detection value

- Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2008, 2(1): 4 – 17.
- [9] Zeng Y H, Liang Y C. Maximun-minimum eigenvalue detection for cognitive ratio [C]//Proceedings of the 18th Annual IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communication, 2007.
- [10] Zeng Y H, Liang Y C. Eigenvalue-based spectrum sensing algorithms for cognitive radio [J]. IEEE Transactions on Communications, 2009, 57(6): 1784 – 1793.
- [11] 曹开田, 杨震. 一种新型的基于最大特征值的合作频谱感知算法[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(6): 1367 – 1372. CAO Kaitian, YANG Zhen. A novel cooperative spectrum sensing algorithm based on the maximum eigenvalue [J]. Journal of Electronic & Information Technology, 2011, 33(6): 1367 – 1372. (in Chinese)
- [12] 王颖喜, 卢光跃. 基于最大最小特征值之频谱感知技术研究[J]. 电子与信息学报, 2010, 32(11): 2571 – 2575. WANG Yingxi, LU Guangyue. DMM based spectrum sensing method for cognitive radio systems[J]. Journal of Electronic & Information Technology, 2010, 32(11): 2571 – 2575. (in Chinese)
- [13] Shakir M Z, Rao A, Alouini M S. Generalized mean detector for collaborative spectrum sensing [J]. IEEE Transaction on Communications, 2013, 61(4): 1242 – 1253.
- [14] Bianchi P, Debbah M, Maida M, et al. Performance of statistical tests for single-source detection using random matrix theory[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 57(4): 2400 – 2419.
- [15] Matthaiou M, McKay M R, Smith P J, et al. On the condition number distribution of complex wishart matrices[J]. IEEE Transactions on Communications, 2010, 58(6): 1705 – 1717.