doi:10.11887/j.cn.202002015　　http://journal.nudt.edu.cn

利用预报误差分布拟合实现卫星历史轨道机动检测的方法*

李　涛[1],黄　昊[2],陈　磊[1]
(1. 国防科技大学 空天科学学院,湖南 长沙　410073;2. 军事科学院 国防科技创新研究院,北京　100071)

摘　要:轨道机动会引起在轨卫星的轨道异常,是空间态势感知的重点关注对象之一。为此,提出一种从卫星的两行轨道要素编目数据中检测历史机动的方法。通过分析预报误差检测轨道参数的异常编目值,进而获得相应的历史机动信息。对卫星的两行轨道要素编目数据两两预报求差得到预报误差的样本数据后,利用期望最大化算法可以拟合得到以高斯混合模型表达的预报误差的概率分布模型;以此为基础,可以确定利用预报误差检测轨道参数异常编目值的门限;利用轨道机动与异常编目值之间的对应关系,最终实现机动检测。对典型活动卫星的机动检测结果表明,所提方法能够在准确检出历史机动事件的同时保持较低的误检率。

关键词:机动检测;两行轨道要素;高斯混合模型;期望最大化算法
中图分类号:V557　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1001-2486(2020)02-114-07

Method to detect satellite historical orbit maneuver based on fitting of prediction error distribution

LI Tao[1], *HUANG Hao*[2], *CHEN Lei*[1]
(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. National Academy of Defense Science and Technology Innovation, Academy of Military Sciences, Beijing 100071, China)

Abstract: Orbit maneuvers can cause satellite orbital anomalies and are one of the key concerns of the space situational awareness. A method to detect historical orbital maneuvers from satellite TLE(two line element) data was proposed. By analyzing the prediction errors, the abnormal cataloging values of the selected orbital parameter were detected, and then the corresponding historical maneuvering information was obtained. Firstly, a large number of sample data of prediction errors were obtained from the historical TLE data, and the probability distribution model of the prediction errors expressed by the Gaussian mixture model was fitted from these sample data by the EM(expectation maximization) algorithm. Then, based on the fitted distribution model, the threshold of detecting abnormal cataloging values of orbital parameter through prediction errors was determined. Finally, taking into account the relationship between orbital maneuvers and abnormal cataloging values of the orbital parameter, the method to detect orbital maneuver from the cataloging sequence of the orbital parameter was determined. The results of maneuver detection on typical active satellites show that the proposed method can detect historical maneuvers accurately while maintaining a low false detection rate.

Keywords: maneuver detection; two line element; Gaussian mixture model; expectation maximization algorithm

在当前空间目标数量日益增长且多为非合作目标的背景下,及时发现航天器轨道机动、碰撞解体等空间事件具有重要意义。一方面,及时获知空间事件信息对及时采取合适的应对措施至关重要;另一方面,基于历史机动信息可以分析预测航天器的活动规律和机动行为,有效支撑空间态势感知。

轨道机动会引起空间目标的轨道异常,检测特定轨道参数的异常变化是从历史轨道数据中获取机动信息的有效途径。美国战略司令部发布的两行轨道要素(Two Line Elements, TLE)数据是目前为止公开发布的最完备的空间目标轨道信息编目数据。国内外学者已提出一系列从航天器历史 TLE 数据中检测轨道机动的方法。概括而言,这些方法分为两类。一类直接对编目轨道要素或其导出量的历史数据进行统计分析,以检出统计意义上的异常编目数据[1-4];另一类通过比较轨道要素编目值与相应预报值判断编目值是否异常[5-7],其中预报值通常通过与 TLE 数据配套使用的 SGP4/SDP4 轨道预报模型[8]得到,编目值与预报值的差,即预报误差则被作为异常值检测的指标。由于 TLE 本身包含误差且轨道预报模型

* 收稿日期:2018-10-14
作者简介:李涛(1990—),男,湖南新田人,博士研究生,E-mail:litao0420@163.com;
陈磊(通信作者),男,陕西咸阳人,教授,博士,博士生导师,E-mail:chenl@nudt.edu.cn

也会引入一部分误差,因此预报误差值具有不确定性且其分布特性与预报时间有关。现有的机动检测方法并未考虑其概率分布特性,仅利用预报误差的统计均值和方差信息确定异常值检测的门限。方法中往往暗含预报误差服从高斯分布的假设,这一未经验证的预设条件可能会对预报误差异常值检测的造成干扰,进而影响机动检测的准确率。

本文提出一种基于预报误差分布拟合的机动检测方法。通过分析预报误差检测轨道参数的异常编目值,但不预设预报误差的概率分布形式,而是利用历史数据进行拟合。对目标的历史 TLE 数据两两预报求差获得预报误差的样本数据后,利用期望最大化(Expectation Maximization, EM)算法对样本数据拟合得到以高斯混合模型表达的预报误差的概率分布模型。随后,以此为基础设计轨道参数异常值检测方法,并利用轨道机动与轨道异常之间的对应关系实现机动检测。最后,选取典型活动卫星为测试目标进行机动检测,分析验证所提方法的可行性和机动检测性能。需要指出的是,在所设计的轨道机动检测方法中,用于分析的轨道参数的选择并不是唯一的,本文仅以卫星的轨道半长轴为例对机动检测方法进行说明,实际上也可以选择轨道倾角、偏心率、轨道能量等其他参数。

1　基于历史数据的预报误差分布拟合

1.1　样本数据的生成

预报误差样本数据的生成方法如图 1 所示。利用 SGP4/SDP4 模型,t_i 时刻的 TLE 编目轨道参数 a_i 将被顺次外推至随后 m 个编目值所在的历元时刻 $t_{i+1}, t_{i+2}, \cdots, t_{i+m}$,以得到相应的预报值 $a_{i+1,i}, a_{i+2,i}, \cdots, a_{i+m,i}$。将这些预报值与相应的编目值相减,就得到 m 个预报误差数据 $\Delta a_{i+1,i}$, $\Delta a_{i+2,i}, \cdots, \Delta a_{i+m,i}$,以及对应的预报时间 $\Delta t_{i+1,i} = t_{i+1} - t_i, \Delta t_{i+2,i} = t_{i+2} - t_i, \cdots, \Delta t_{i+m,i} = t_{i+m} - t_i$。

对所有容许的轨道参数编目值顺次重复上述过程,可以得到一系列与不同预报时间相对应的预报误差数据。它们构成了预报误差的样本数据,记为集合 S。在生成样本数据时,可以根据实际情况确定参数 m 的值以获得合适的样本数据量。

由于预报误差的分布特性与预报时间密切相关,样本数据被用于分布拟合之前需要按其预报时间进行分组。考虑到同一空间目标的绝大部分

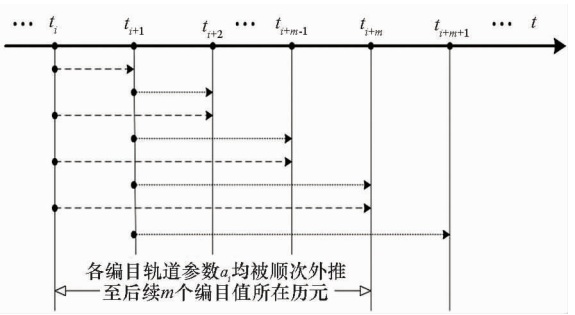


图 1　生成预报误差样本数据的示意图

Fig. 1　Sample data generation of the prediction error

TLE 之间的发布时间间隔一般为轨道周期的整数倍[9],集合 S 中各预报误差对应的预报时间一般也近似等于轨道周期的整数倍,故各预报时间均可以与其轨道周期 T 的整数比值表示,再将具有相同预报时间的误差数据进行分组。假设样本数据最终被分为 N 个数据组,即

$$S = \{S_{r1}, \cdots, S_{rk}, \cdots, S_{rN}\} \tag{1}$$

则 S_{rk} 包含所有预报时间为 rk 倍轨道周期的预报误差数据。

1.2　预报误差的分布拟合

对预报误差的分布拟合包括两步:第一步是建立以高斯混合模型描述的预报误差的概率分布数学模型;第二步是利用 EM 算法从样本数据中学习概率分布模型的模型参数。

高斯混合模型常被用作描述随机变量概率分布的参数模型,它由有限个高斯分布的加权和构成。理论上来说,只要高斯分布的个数足够多,利用高斯混合模型可以对任意形式的概率分布进行数学描述。基于高斯混合模型,预报时间为 rk 倍轨道周期时,预报误差 Δa 的概率密度函数可表示如下

$$f_{rk}(\Delta a) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j f(\Delta a; \mu_j, \sigma_j^2) \tag{2}$$

其中,J 为高斯分布的个数,α_j 为对应的权系数,满足 $\sum_{j=1}^{J} \alpha_j = 1$,$f(\Delta a_{\Delta t}; \mu_j, \sigma_j^2)$ 表示均值为 μ_j、方差为 σ_j^2 时 Δa 的高斯分布概率密度函数。

$$f(\Delta a; \mu_j, \sigma_j^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp\left[-\frac{(\Delta a - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \right] \tag{3}$$

在式(2)表达的概率密度函数中,待确定的参数包括高斯分布的个数 J 以及各高斯分布对应的参数 α_j、μ_j 和 σ_j。文献[10]利用高斯混合模型对 TLE 位置预报误差的概率分布进行了拟合,结果表明高斯分布的个数取 3 足以得到满意的拟合效果。以此为参照,这里直接取 $J = 3$,其他参数

则利用 EM 算法从预报误差样本数据中学习得到。

EM 算法是一种迭代算法，1977 年由 Dempster 等总结提出[12]，用于含有隐变量的概率模型参数的极大似然估计，或极大后验概率估计。EM 算法的每次迭代由两步组成：E 步，求期望；M 步，求极大。利用 EM 算法从预报误差数据组 S_{rk} 中估计 $f_{rk}(\Delta a)$ 中参数的迭代计算过程[12]如下。

输入：数据组 $S_{rk}=\{\Delta a_1,\Delta a_2,\cdots,\Delta a_K\}$ 及高斯混合模型 $f_{rk}(\Delta a)$。

输出：高斯混合模型的描述参数 α_j、μ_j 和 σ_j。

1）取参数的初始值开始迭代。

2）E 步：依据当前模型参数，计算第 j 个高斯成分对观测数据 Δa_k 的响应度

$$\hat{\gamma}_{kj}=\frac{\alpha_j f(\Delta a_k;\mu_j,\sigma_j^2)}{\sum_{j=1}^{J}\alpha_j f(\Delta a_k;\mu_j,\sigma_j^2)}$$
$$k=1,2,\cdots,K;\ j=1,2,\cdots,J \tag{4}$$

3）M 步：计算新一轮迭代的模型参数

$$\hat{\mu}_j=\frac{\sum_{k=1}^{K}\hat{\gamma}_{kj}\Delta a_k}{\sum_{k=1}^{K}\hat{\gamma}_{kj}},\ j=1,2,\cdots,J \tag{5}$$

$$\hat{\sigma}_j^2=\frac{\sum_{k=1}^{K}\hat{\gamma}_{kj}(\Delta a_k-\mu_j)^2}{\sum_{k=1}^{K}\hat{\gamma}_{kj}},\ j=1,2,\cdots,J \tag{6}$$

$$\hat{\alpha}_j=\frac{\sum_{k=1}^{K}\hat{\gamma}_{kj}}{K},\ j=1,2,\cdots,J \tag{7}$$

4）重复第 2 和第 3 步，直到收敛。

对数据集 S 中的各数据组依次重复上述拟合过程，即可得到预报时间为 $r1,r2,\cdots,rN$ 时预报误差的概率密度函数，分别记为 $f_{r1}(\Delta a)$，$f_{r2}(\Delta a)$，$\cdots$，$f_{rN}(\Delta a)$。考虑到样本数据过小时会影响误差分布的拟合效果，在上述拟合过程中忽略了数据量不足的数据组。

2 机动检测方法

2.1 轨道参数异常值的检测

通过分析预报误差对轨道参数异常值进行检测是一种行之有效的方法，检测问题可概述为：根据将轨道参数序列的第 i 个编目值预报至第 j 个（$i<j$ 且 $j-i<m$）得到的预报误差 $\Delta a_{j,i}$ 判断第 j 个编目值 a_j 是否为异常值。显然，问题的关键在于确定预报误差的检测门限，这里基于拟合得到的概率分布模型推导得到。

根据 1.1 节所述样本数据的生成方法，预报误 $\Delta a_{j,i}$ 必定属于样本数据集 S 中的某数据组。假定第 i 个和第 j 个轨道参数编目值的历元时间差满足 $\Delta t_{j,i}=rk$，即等于 rk 倍轨道周期，则 $\Delta a_{j,i}$ 是数据组 S_{rk} 中的元素。因此，问题变成判断 $\Delta a_{j,i}$ 在数据组 S_{rk} 中是否属于异常值。

在不考虑拟合得到的预报误差概率分布模型 $f_{rk}(\Delta a)$ 的前提下，可以利用经典的 $n-\sigma$ 法则确定异常值检测门限，这实际上暗含了 S_{rk} 中的数据服从高斯分布的先验假设。分别记 S_{rk} 的统计均值和统计方差分别为 μ_{rk} 和 σ_{rk}^2，则根据 $n-\sigma$ 法则，如果 $\Delta a_{j,i}$ 落在区间 $[\mu_{rk}-n\sigma_{rk},\mu_{rk}+n\sigma_{rk}]$ 之外则被视为异常值（相应地，第 j 个轨道参数编目值也将被判定是异常的），并且数据落入区间 $[\mu_{rk}-n\sigma_{rk},\mu_{rk}+n\sigma_{rk}]$ 的概率（记为 P_n）仅由 n 的值确定，如 $n=1,2,3$ 依次对应 $P_1=0.682\ 7$，$P_2=0.954\ 5$，$P_3=0.997\ 3$。

但是，考虑到预报误差的真实分布，即拟合得到的概率分布函数 $f_{rk}(\Delta a)$ 并不一定满足高斯分布，因此直接应用 $n-\sigma$ 法则进行异常值检测并不合适。这里参照 $n-\sigma$ 法则提出一种改进的异常值检测法则，并命名为 $n-P$ 法则，如图 2 所示。

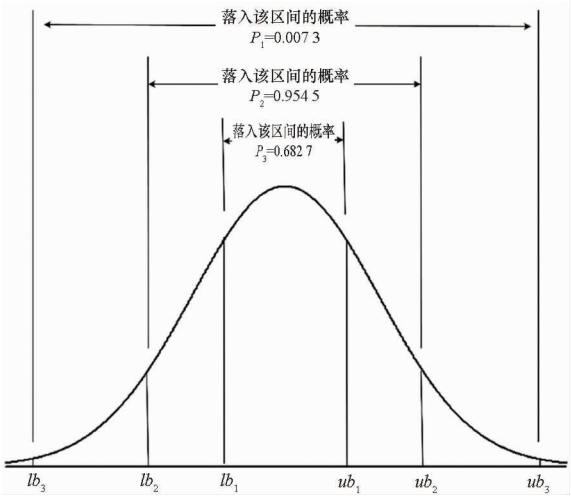


图 2 $n-P$ 法则示意图

Fig. 2 Diagram of the $n-P$ rule

$n-P$ 法则将超出区间 $[lb_n,ub_n]$ 的数据视作异常值，类似地，$n=1$、2、3 依次对应 $P_1=0.682\ 7$、$P_2=0.954\ 5$、$P_3=0.997\ 3$。区间 $[lb_n,ub_n]$ 则根据概率 P_n 及拟合得到的概率密度函数 $f_{rk}(\Delta a)$ 计算得到。记与 $f_{rk}(\Delta a)$ 对应的累积概率分布函数为 F_{rk}，则 lb_n 和 ub_n 的计算公式如下

$$lb_n = F_{rk}^{-1}\left(\frac{1-P_n}{2}\right)$$
$$ub_n = F_{rk}^{-1}\left(\frac{1+P_n}{2}\right) \tag{8}$$

如果 $\Delta a_{j,i}$ 位于区间 $[lb_n, ub_n]$ 之内,则认为第 j 个轨道参数编目值是正常的,否则它将被判定为异常值。

考虑到由任意两个满足要求($i<j$ 且 $j-i<m$)的轨道参数编目值得到的预报误差均会落入误差数据组中的某一个,故可以提前计算出与各数据组相对应的基于 $n-P$ 法则的异常值检测区间(对于因为数据量不够而没有拟合得到概率密度函数的情况,待求区间通过对相邻数据组的检测区间插值得到)。对于某个具体的预报误差数据,根据该数据对应的预报时间,即可确定相应的检测区间以进行异常值检测。

2.2　轨道机动的检测

轨道机动会使轨道参数发生异常变化,表现为轨道参数编目值序列中的异常值。理论上来说,检出轨道参数编目值序列中的异常值,即可实现机动检测。然而,由于 TLE 本身包含数据噪声(这一噪声来源于轨道确定过程中用来生成 TLE 数据的轨道状态观测值误差以及建模过程中的不确定性),即使某个编目值被检出为异常值,并不能认定它必然是由轨道机动造成的。

在利用预报误差进行机动检测的背景下,为消除噪声干扰,一个有效的方法是将轨道参数编目值分别预报至后续多个编目值所在历元。然后根据所得的预报误差判断后续各编目值是否异常,只有随后的大部分编目值都被判定为异常时才认为这是由轨道机动造成的。

基于该思想,从卫星的轨道参数编目值序列中检测历史轨道机动的数据处理流程确定如下。

步骤 1:依次选取编目值序列中的各元素为预报基准。对于每一基准数据,将其顺次外推至后续 m 个编目值所在历元(这里的 m 值与 1.1 节中的 m 值相同),根据所得的预报误差分别判断这 m 个编目值是否异常,并记录异常值个数。最后可以得到一个序列 *ID*,序列 *ID* 中第 i 个元素记录了以轨道参数编目值序列的第 i 个元素为预报基准时,后续 m 个编目值中被检出为异常值的个数。

步骤 2:对于编目值序列中与噪声对应的单个异常值,在第 1 步中分别以在它之前的 $m-1$ 个编目值为预报基准进行异常检测时,序列 *ID* 中对应的元素值均为 1。当以该异常值本身为预报基准时,序列 *ID* 中对应的元素值则为 m。因此,噪声引起的单个异常值一般对应于序列 *ID* 中长度为 $m+1$、均值约为 2 的非零元素数据段。为消除 TLE 数据噪声的干扰,从序列 *ID* 中找出由非零元素构成且元素均值不超过 3 的数据段,并将这些数据段中的元素值重置为 0,最终得到一个新序列,记为 ID_m。

步骤 3:ID_m 中的非零元素可以认为必定是由轨道机动造成的。从该序列中提取出所有由非零元素组成的数据段,每一个数据段被认为代表一个轨道机动,并且数据段中最大元素值对应的预报基准所在历元时刻被视为机动时间。

3　算例分析

3.1　算例设计

为评估所提机动检测方法的检测性能,选取 7 个典型的 LEO 轨道卫星作为测试目标,如表 1 所示。

表 1　选定卫星概况

Tab. 1　Summary of selected satellites

卫星编号(SSN)	发射时间	轨道周期/min	轨道倾角/(°)	远地点/km	近地点/km	TLE 数据时间跨度
25994	1999 - 12 - 18	98.82	98.20	703	701	2003—2013 年
26620	2000 - 11 - 21	98.72	98.14	698	696	2001—2016 年
27424	2002 - 05 - 04	98.83	98.21	704	701	2003—2016 年
28376	2004 - 07 - 15	98.83	98.21	704	701	2005—2016 年
29499	2006 - 10 - 19	101.30	98.66	822	819	2007—2016 年
29107	2006 - 04 - 28	98.83	98.21	704	701	2007—2016 年
29108	2006 - 04 - 28	98.82	98.21	703	702	2007—2016 年

对每一个卫星,首先将轨道参数编目值序列中所有元素分别外推至其后续 15 个编目值所在历元,即取 $m=15$,以获得预报误差的样本数据。然后,利用这些样本数据拟合得到不同预报时间下预报误差的概率分布模型。然后,建立基于拟合分布模型和 $2-P$ 法则建立轨道参数异常值的检测门限。最后,应用 2.2 节所述的检测方法对轨道参数编目值序列进行分析,检出轨道机动事件。

此外,为了验证轨道参数预报误差分布的非高斯特性,并评估该特性对机动检测性能的影响,还设计了假设预报误差服从高斯分布的对比试验。与本文所提方法相比,对比试验的唯一不同之处在于:在得到各卫星的轨道参数预报误差数据并按预报时间完成分组后,将采用高斯模型而不是高斯混合模型对预报误差的概率分布进行拟合。对比试验得到的检测结果将被用于与本文所提方法得到的检测结果之间进行对比,从而得出结论。

3.2 结果分析

以 27424 号卫星为例对机动检测的详细过程说明如下。利用 2003 年 1 月 1 日至 2016 年 12 月 31 日的历史 TLE 数据,共得到 128925 个轨道参数预报误差数据。这些数据按照其对应的预报时间被分成 196 个数据组。图 3 给出了典型数据组的柱状图。

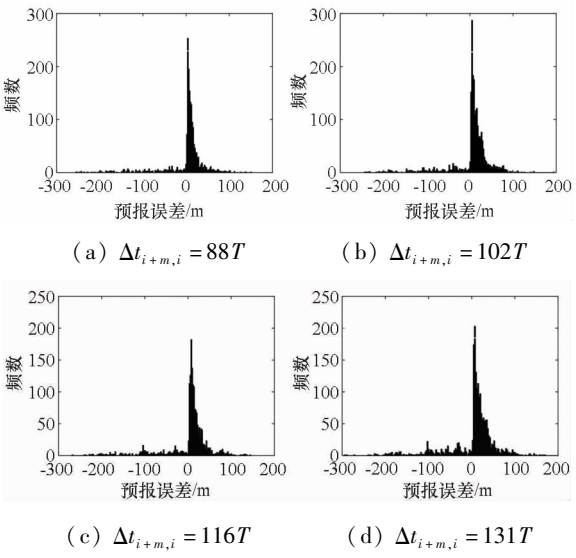


图 3 27424 号卫星典型预报误差数据组的柱状图

Fig. 3 Histograms of typical prediction error data groups for object 27424

随后,这些预报误差数据组被用于拟合得到分别由高斯混合模型及高斯模型表示的概率分布模型,它们构成了轨道参数异常值检测的基础。对前述数据组拟合得到的概率密度函数如图 4 所示。

与拟合得到的预测误差的两种概率密度函数相对应,可以得到两种轨道参数异常值的检测门限。相应地,利用 2.2 节所述数据处理方法对 27424 号卫星的轨道参数编目值序列进行处理,得到两种机动检测结果(如图 5 和图 6 所示,其中检出的轨道机动以"*"标注)。对其余 6 颗卫星重复上述机动检测流程,即可得到所有卫星的机动检测结果(见表 2)。

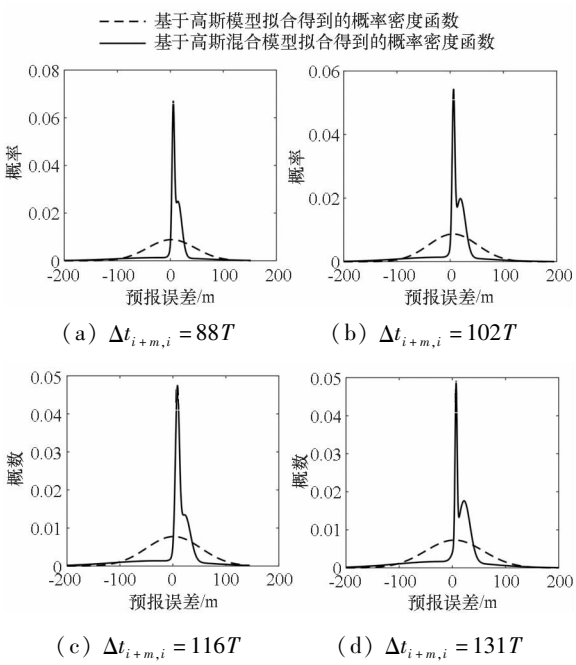
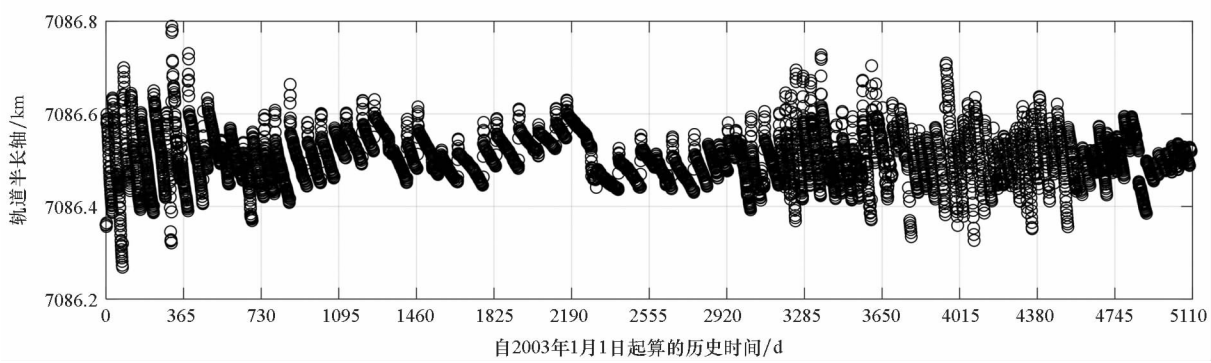


图 4 对 27424 号卫星典型预报误差数据组进行拟合得到的概率密度函数

Fig. 4 Fitted probability density functions of typical prediction error data groups for object 27424

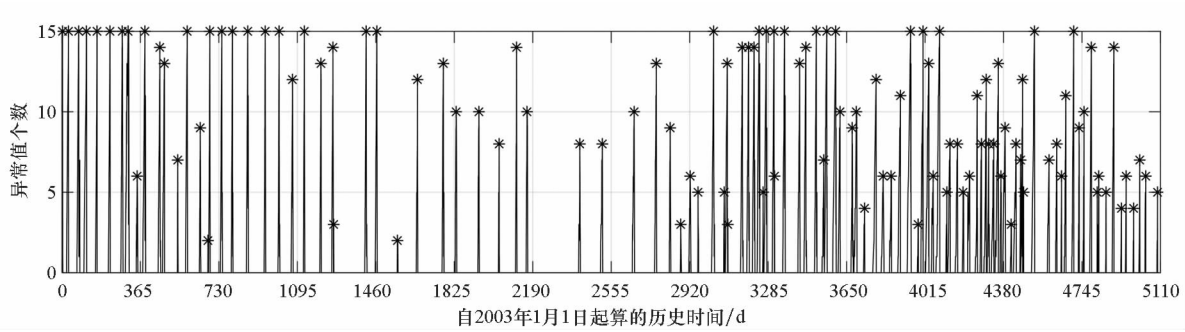
由表 2 可知,利用人工方法检测出 7 个卫星共进行了 520 次机动。而本文所提方法成功检出了其中的 478 次,成功率达到了 92% 左右,在漏检 42 次机动的同时发生了 7 次误检。总的来说,该方法的机动检测准确率较好且能有效避免误检。

相较而言,对比试验只检测出了 520 次机动中的 439 次,成功率大致为 84%,并且误检次数和漏检次数均达到本文所提方法的两倍左右。在对比试验中,实际上隐含了预报误差服从高斯分布的假设。相应地,轨道参数异常值的检测门限基于 $2-\sigma$ 法则确定。图 4 及图 5 表明,预报误差的真实分布实际上与高斯分布相去甚远,可知假定预报误差服从高斯分布并不合适。在高斯分布假设下,尽管大部分量级较大的机动事件能被正确检出,但对于大部分小量级机动事件及部分大量级机动事件,这一假设将严重限制算法的检测性能,导致较大概率的误检和漏检。反之,基于预报误差分布拟合的机动检测方法则能取得较好的检测效果,出现误检和漏检的概率也更低。



(a) 卫星的半长轴时间 - 历史

(a) Semi-major axis time-history

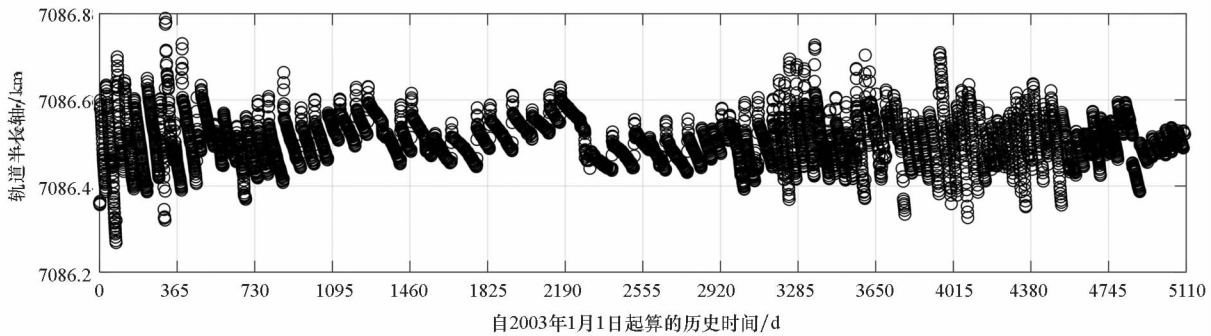


(b) 检测到的异常值个数

(b) Detected number of anomaly points

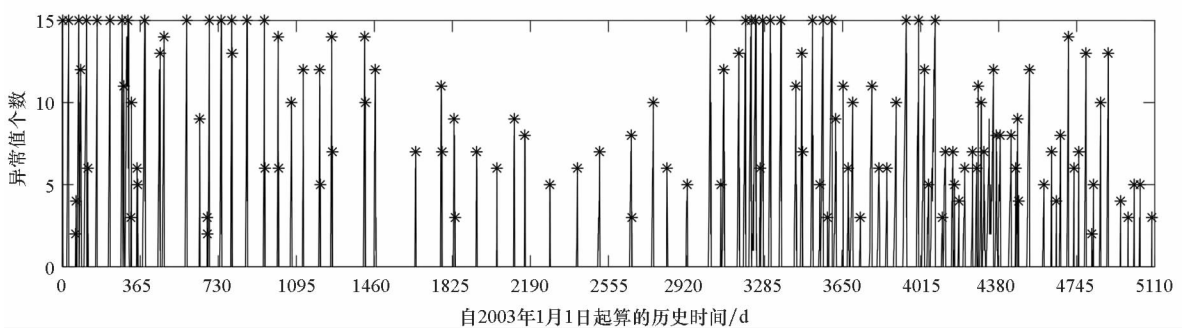
图 5　基于本文所述机动检测方法的机动检测结果

Fig. 5　Maneuver detection result of our method



(a) 卫星的半长轴时间 - 历史

(a) Semi-major axis time-history



(b) 检测到的异常值个数

(b) Detected number of anomaly points

图 6　对比试验得出的机动检测结果

Fig. 6　Maneuver detection result of contrast test

表2 所有卫星的机动检测结果

Tab. 2 Maneuver detection results of all satellites

卫星编号（SSN）	机动次数（人工检测）	机动次数(本文方法)			机动次数(对比试验)		
		误检	漏检	成功	误检	漏检	成功
25994	64	0	2	62	0	13	51
26620	45	2	2	43	6	11	34
27424	123	0	12	111	2	17	105
28376	104	0	11	93	0	20	84
29499	36	2	1	35	4	1	35
29107	78	2	12	66	2	14	64
29108	70	1	2	68	1	4	66
合计	520	7	42	478	15	81	439

4 结论

本文提出了一种基于预报误差分布拟合的轨道机动检测方法。该方法首先通过对卫星轨道参数编目值和预报值进行比较并分析预报误差来识别轨道参数异常值,进而得到相应的历史机动信息。在利用预报误差进行轨道参数异常值检测时,并不预设预报误差的概率分布形式,而是利用历史数据拟合得到。随后,基于拟合得到的分布模型推导得到对轨道参数异常值的检测方法。最后,根据轨道机动和轨道参数异常编目值的对应关系,提出从轨道参数编目值序列中获得历史机动的具体方法。对典型卫星的机动检测结果表明,假定轨道参数预报误差服从高斯分布并不符合实际情况,而利用高斯混合模型则可以对预报误差的概率分布进行很好的拟合。以之为基础构建的机动检测方法能够在准确检出绝大部分历史机动的同时有效避免误检事件的发生。

参考文献(References)

[1] Kelecy T, Hall D, Hamada K, et al. Satellite maneuver detection using two-line element (TLE) data [C]// Proceedings of the Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference. Maui, HA: Maui Economic Development Board (MEDB), 2007.

[2] Patera R P. Space event detection method [J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2008, 45(3): 554 – 559.

[3] 杨旭, 刘静, 吴相彬, 等. 利用 TLE 数据分析 LEO 卫星轨道异常的新方法——综合判据法[J]. 空间科学学报, 2011, 31(2): 223 – 228.
YANG Xu, LIU Jing, WU Xiangbin, et al. New method to analyse the orbital abnormal of LEO satellite using TLE data [J]. Chinese Journal of Space Science, 2011, 31(2): 223 – 228. (in Chinese)

[4] Song W D, Wang R L, Wang J. A simple and valid analysis method for orbit anomaly detection [J]. Advances in Space Research, 2012, 49(2): 386 – 391.

[5] Hujsak R. Reverse engineering maneuvers [C]//AGI 2005 User's Conference, 2005.

[6] 张涛涛, 白显宗, 郝嘉, 等. 基于预报偏差的 LEO 航天器轨道异常检测[J]. 中国空间科学技术, 2012, 32(5): 40 – 46.
ZHANG Taotao, BAI Xianzong, HAO Jia, et al. LEO spacecraft orbit anomaly detection based on prediction dispersion [J]. Chinese Space Science and Technology, 2012, 32(5): 40 – 46. (in Chinese)

[7] Lemmens S, Krag H. Two-line-elements-based maneuver detection methods for satellites in low earth orbit[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 37(3): 860 – 868.

[8] Vallado D, Crawford P, Hujsak R, et al. Revisiting spacetrack report No. 3 [C]//AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, 2006: 6753.

[9] Bai X Z, Chen L, Tang G J. Periodicity characterization of orbital prediction error and Poisson series fitting [J]. Advances in Space Research, 2012, 50(5): 560 – 575.

[10] Legendre P, Deguine B, Garmier R, et al. Two line element accuracy assessment based on a mixture of Gaussian laws[C]// AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, 2006: 6518.

[11] Dempster A P, Laird N M, Rubin D B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm[J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), 1977, 39(1): 1 – 22.

[12] 李航. 统计学习方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.
LI Hang. Statistical learning methods[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2012. (in Chinese)