doi:10.11887/j.cn.202006007

http://journal. nudt. edu. cn

顾及地磁影响的 GNSS 电离层层析不等像素间距算法^{*}

霍星亮1,刘 琦1,2,刘昊杰1,2

(1. 中国科学院精密测量科学与技术创新研究院,大地测量与地球动力学国家重点实验室,湖北 武汉 430077;2. 中国科学院大学,北京 100049)

摘 要:突破传统全球导航卫星系统(Global Navigation Satellite System, GNSS)层析反演研究忽略地球磁 场对电离层变化活动的影响,同时顾及不同电离层高度电子密度变化较大的影响,提出在地磁坐标系下建立 电离层高度方向上不等像素间距的 GNSS 层析反演方法。在此基础上,通过建立新的电离层层析迭代松弛因 子,提高 GNSS 电离层电子密度层析反演结果精度。利用 IRI—2007 电离层模型、GNSS 实测数据与电离层测 高仪数据,从模拟验证和实测数据对比两方面,反演统计了不同层析算法估算的峰值电离层电子密度误差、 电子密度剖面结果平均绝对百分比误差及均方根误差,验证了顾及地磁影响的 GNSS 电离层层析不等像素间 距算法的有效性。

GNSS ionospheric tomography with the unequal pixel size considering the geomagnetic effect

HUO Xingliang¹, LIU Qi^{1,2}, LIU Haojie^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Geodesy and Earth's Dynamics, Innovation Academy for Precision Measurement Science and Technology,

Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430077, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: In previous studies, traditional GNSS (global navigation satellite system) ionospheric tomographic methods neglect the influence of geomagnetic field on the ionospheric variations. In this method, a new GNSS tomographic algorithm with the unequal pixel size in the height was proposed to image the ionosphere in the geomagnetic coordinate, which takes into account the influence of electron density variation at different ionospheric heights and the geomagnetic field. Also, a new iterative relaxation factor was established in the proposed GNSS tomographic algorithm to improve the accuracy of the ionospheric electron densities. The performance of GNSS ionospheric tomographic method with unequal pixel size considering geomagnetic effects was evaluated by using the IRI—2007 (international reference ionosphere 2007) model, GNSS measured data, and ionosonde data. For simulation studies, IRI—2007 was used as references, while for GNSS data, the ionosonde data were used as references. The peak ionospheric electron density error, the average absolute percentage error of electron density profile results and the root mean square error were estimated by different GNSS tomographic algorithms. The validity of the tomographic algorithm with the unequal pixel sizes considering the geomagnetic effects is verified.

Keywords: ionospheric tomography; GNSS; electron density; relaxation factor; international reference ionosphere model

全球导航卫星系统(Global Navigation Satellite System, GNSS)电离层层析反演技术以其独特的空 间大尺度电子密度三维监测能力日益受到重视。 但由于卫星观测射线视角有限,水平方向的观测射 线缺乏,同时地面监测站布设不均匀且观测稀疏等 因素的多重影响,层析反演模型中的不适定问题 是影响 GNSS 电离层层析反演精度及其推广应用 的重要因素。国内外学者已在 GNSS 电离层层析 反演方法与技术方面开展了系列研究,克服了存 在的不适定问题,取得了许多重要成果^[1-7]。主 要分为两大类:第一类是以代数重构为代表的行 迭代类重构算法,包括加法代数重构(Algebraic Reconstruction Technique,ART)^[1]、乘法代数重构 (Multiplicative Algebraic Reconstruction Technique, MART)^[8-9]、同时迭代重构(Simultaneous Iterative Reconstruction Technique,SIRT)^[10-11]等。该类算

^{*} 收稿日期:2019-04-23

基金项目:国家自然科学基金资助项目(41574033,41621091);国家重点研发计划资助项目(2017YFE0131400);转发式试验系统 资助项目(ZFS19001D-ZTYJ07,Y9E0151M26)

作者简介:霍星亮(1978-),男,山西平遥人,副研究员,博士,硕士生导师,E-mail:xlhuo@whigg.ac.cn

法要求提供精度相对较高的电离层电子密度初 值,通过将 GNSS 射线在观测方程组成的超平面 内进行投影迭代,逐步缩小观测值与投影重构值 之间的差距,进而估算出最终的电子密度结果。 该类方法的主要优点是避开了对由于观测射线不 足在层析系统中形成的大型稀疏矩阵的求逆计 算,直接利用观测方程进行迭代反演计算,提高了 计算效率和反演结果的稳定性,但它对初值模型 的依赖性较强,获得的结果是近似的局部最优解。 第二类是非迭代算法,包括:正则化算法^[4]、正交 函数法^[12]、奇异值分解^[13]与广义奇异值分解 法^[14]、混合重建算法^[3]等,该类算法通常要求施 加一定的约束条件改良或克服 GNSS 电离层层析 系统的不适定性,如认为在电离层层析系统中相 邻"像素"网格内的电子密度具有较好的平滑性 或假定电离层状态具备线性变化特性等,进而将 电离层电子密度反演转化为附有约束条件的最优 化问题,从而使得电离层电子密度的反演值逼近 实际值。本文将主要围绕 GNSS 迭代类重构算法 展开讨论。

传统以像素类为基函数的 GNSS 层析技术假 定待反演区域的电离层电子密度按照一定的空间 格网间隔离散分布,每个像素格网内的电子密度 均匀分布。在此基础上,ART、SIRT、MART 等迭 代重构模型的共同特点都是以 GNSS 观测射线和 层析系统像素格网交叉形成的截距长度为权重 比,对电离层电子总含量(Total Electron Content, TEC) 层析投影重建值和 GNSS TEC 实测值之间 的误差进行分配。然而,在迭代重构模型层析反 演过程中,投影重建的 TEC 贡献来源于 GNSS 射 线截距与格网像素内电子密度估算值之间的乘 积,GNSS 射线截距在迭代反演过程中保持不变, 电子密度误差是 TEC 实测值与其投影重构估算 值差异的主要来源,也就是说,在 GNSS 层析系统 迭代反演误差中,电子密度误差是决定因素, GNSS 射线截距对误差起放大作用。因此,传统 ART、SIRT、MART 等 GNSS 层析迭代反演算法中 仅以射线截距作为误差分配准则的唯一要素是不 合理的。为此,国内外部分学者考虑在 GNSS 层 析迭代模型中引入电子密度参量[15-17],提高电子 密度反演精度。文献[15-16]在经典 ART 算法 的基础上通过引入电离层电子密度相对于 GNSS 观测视线方向的最大电子密度的比值作为迭代重 构时的权重,使得电离层电子密度的修正值成比 例于电离层初值模型提供的电子密度;文献[17] 在 GNSS 每条观测射线的每轮迭代修正中引入了

电子密度参数作为迭代参量加速收敛;文献[18] 则认为该类修正算法的物理意义不太明确。实际 上,此类改进方法的本质是确保反演得到的电离 层电子密度垂直剖面结构相对于电离层初值背景 模型保持稳定,弥补水平方向观测射线的不足,提 高 GNSS 电离层层析系统反演计算效率与精 度^[19]。近年来,充分考虑电离层实际物理变化, 文献「20]提出以 GNSS 射线穿越层析像素格网形 成的射线截距与对应的像素格网内电子密度乘积 为组合自变量建立层析迭代表达式,合理分配 TEC 实测值与反演值之间的差距,并设计了一组 新的松弛因子控制与削弱了噪声对电子密度反演 结果的影响。但需要说明的是,该方法的松弛因 子表达式没有全面反映出不同高度电离层电子密 度变化,因此,构造合理有效的 GNSS 电离层层析 反演模型,提高电离层电子密度反演精度,是本文 讨论的主要内容之一。

需要指出的是,目前的 GNSS 电离层层析迭 代反演方法都是基于地理坐标系构造,电离层电 子密度像素格网按照地理经度、地理纬度与电离 层高度划分层析反演格网系统。地理坐标系下的 电离层层析反演算法及其相关约束研究主要考虑 了电离层受太阳辐射的影响。但相关研究表明, 电离层电子密度结构不仅与太阳活动密切相关, 同时也受到地球磁场及其相关的电动力学过程影 响。因此,在现有的 GNSS TEC 建模及电离层高 阶项改正研究中,许多学者已注意到地球磁场对 电离层变化活动的影响。诸如,国际 GNSS 服务 组织下属的电离层分析中心之一的欧洲定轨中 心利用 GNSS 观测数据并在日固地磁坐标系下 采用球谐函数模型描述全球电离层 TEC 变化活 动^[21];著名的经验电离层模型 IRI 也提供了地 磁坐标系下的电离层 TEC 及电子密度变化 等^[22]。因此,基于地理坐标系建立电离层层析 系统的像素格网约束,可能会对电子密度施加 不符合实际变化的强约束,导致电子密度反演 结果发生畸变。

此外,许多电离层层析系统反演以等间距的 方式划分电子密度像素格网并假定电子密度在每 个像素格网内均匀分布,忽略了电离层电子密度 在垂直高度方向上变化较大的特点。这种等间距 划分的像素格网对于高度方向电子密度变化较大 区域(尤其对 F2 区域的峰值电子密度)起到了一 定平滑作用,容易降低层析技术估算的电离层峰 值电子密度精度。文献[23 - 24]研究了小范围 内多尺度电离层层析算法对电子密度反演结果的 影响。但截至目前,尚未见到在地磁坐标系下以 不等间距电子密度像素格网为基础的 GNSS 电离 层层析反演研究报道,这也是本文讨论的主要 内容。

综上所述,本文提出在地磁坐标系下沿地磁 经度、地磁纬度及电离层高度划分与建立 GNSS 电离层层析电子密度像素格网系统,并考虑在不 同的电离层高度方向上划分不等间距的像素格网 (如在电离层电子密度变化较大的 F2 层峰值高 度区域采用10 km 高度的空间格网间距,在电子 密度变化较小的其他高度区域采用 30 km 或 100 km的空间格网间距)。在此基础上,通过调 整 GNSS 电离层层析迭代算法中的松弛因子,实 现对电离层电子密度重构精度和结果平滑度之间 的调节。最后,利用 IRI-2007 模型采用模拟测 试的方法以及利用 GNSS 数据反演电子密度并与 电离层测高仪电子密度实测数据进行对比的方 法,验证了本文提出的顾及地磁影响的 GNSS 电 离层不等像素间距层析方法反演电离层电子密度 的有效性与可靠性。

1 改进的 GNSS 电离层层析重构反演模型

基于经典 ART 算法的 GNSS 电离层电子密 度三维层析反演技术在迭代前利用经验电离层模 型给电离层区域内的每个电子密度像素赋予一个 初值,然后采用迭代方式估计电子密度。每一步 迭代估计对应于一条 GNSS TEC 观测射线,完成 全部的 GNSS TEC 测量迭代称之为一轮迭代,并 通过多轮迭代的方式逐步改善重构的电离层电子 密度。但由于经典 ART 算法在每轮迭代过程中 迭代松弛因子保持不变,且迭代模型仅与对电子 密度误差起放大作用的射线截距权重相关,使得 层析重构反演结果精度不高。针对上述问题,文 献[20]提出一种顾及电离层变化的 GNSS 层析反 演算法,引入在层析格网像素内的射线截距与电 子密度的乘积为组合自变量(该组合变量表示 GNSS TEC 在观测射线方向上对应层析像素格网 内的电子总量分量),合理分配不同电子密度像 素格网内 TEC 实测值与反演值之间的误差。在 此基础上,构造了与电子密度变化相关的松弛因 子表达式,抑制传播噪声对电子密度估值的影响, 实现平衡与调节层析反演的电子密度精度与结果 的平滑程度。上述 GNSS 电离层层析迭代模型 如下:

$$x_d^{i,k+1} = x_d^{i,k} + \lambda_d^{i,k} M_d^i \tag{1}$$

$$M_{d}^{i} = \frac{a_{d}^{i} x_{d}^{i,k} (y^{i} - \sum_{j=1}^{n} a_{j}^{i} x_{j}^{i,k})}{\sum_{j=1}^{n} [a_{j}^{i} x_{j}^{i,k}]^{2}}$$
(2)
$$\lambda_{d}^{i,k} = \begin{cases} \frac{|x_{d}^{i,k} - x_{d+1}^{i,k}|}{\sum_{j=1}^{n} x_{j}^{i,k}}, d < n\\ \frac{x_{d}^{i,k}}{\sum_{i=1}^{n} x_{j}^{i,k}}, d = n\\ \sum_{i=1}^{n} x_{j}^{i,k}, d = n \end{cases}$$

式中:x 表示 GNSS 电离层层析系统像素格网代表 的电子密度;y 表示 GNSS 观测射线对应的电离层 TEC;i 表示一条 GNSS 观测射线,共有 m 条射线 (i=1,...,m);k 是层析反演迭代次数; λ 为层析迭 代反演松弛因子; M_a^i 表示电离层电子密度层析模 型的迭代表达式;j 表示 GNSS 层析系统的像素格 网,一条射线穿越像素格网总数量为 n(j=1,...,d,...,n),d 表示其中的第d 个像素格网; $a_j^i(a_d^i)$ 是 GNSS 第i 条射线穿越第j(d)个电子密度像素 格网时所形成的截距,若射线没有穿越的像素格 网截距大小则为 0。图 1 给出了一条 GNSS 射线 穿越电离层层析系统像素格网时的示意图。



图 1 GNSS 射线穿越电离层层析像素格网示意图 Fig. 1 Illustration of the GNSS ray passing through an example reconstruction grid of ionospheric tomography

从上述 GNSS 电离层层析迭代模型可以看 出,当 *d* < *n* 时改进松弛因子 λ 主要利用 GNSS 观 测射线方向上相邻电子密度像素格内的电子密度 差值相对于射线方向上的电子密度之和,反映电 离层电子密度随高度变化强度,从而削弱 GNSS 信号传播时由于介质电子密度变化引起的传播噪 声^[25],实现对电离层电子密度重构精度和结果平 滑度之间的调节。但需要说明的是,GNSS TEC 观测在穿越射线方向最后一个电子密度像素格网

其中

时,当*d*=*n* 时λ并没有对相邻层析像素格网内 的电子密度作差值,进而获取电子密度在该高度 方向上的变化强度;而且当*d*<*n* 时在相邻像素格 网内的电子密度作差值时,也仅取值了一个相邻 像素格网内的电子密度作差值,但事实上一个像 素格网沿 GNSS 射线存在前后两个相邻像素格 网。考虑到以上因素,本文对松弛因子λ表达式 做进一步改进如下:

$$\lambda_{d}^{i,k} = \begin{cases} \frac{|x_{d}^{i,k} - x_{d+1}^{i,k}| + |x_{d}^{i,k} - x_{d-1}^{i,k}|}{\sum_{j=1}^{n} x_{j}^{i,k}}, 1 < d < n \\ \frac{|x_{d}^{i,k} - x_{d+1}^{i,k}|}{\sum_{j=1}^{n} x_{j}^{i,k}}, d = 1 \\ \frac{|x_{d}^{i,k} - x_{d-1}^{i,k}|}{\sum_{j=1}^{n} x_{j}^{i,k}}, d = n \\ \frac{|x_{d}^{i,k} - x_{d-1}^{i,k}|}{\sum_{j=1}^{n} x_{j}^{i,k}}, d = n \end{cases}$$

$$(4)$$

综合式(1)、式(2)和式(4)即为本文改进的 GNSS 电离层层析重构反演模型(Improved ART, IART)。

2 地磁坐标系下划分不等像素间距的电离 层层析格网

基于 GNSS 三维电离层层析过程中,为了简 化计算,通常需要将待研究的电离层空间进行离 散化。GNSS 电离层层析中的离散化工作通常是 沿着地理经度、地理纬度、高度方向并按照一定的 空间间隔距离建立电离层电子密度像素格网 (如,将电离层空间沿经度和纬度方向分别按照 5°和2.5°的间隔,高度方向以50 km的间隔将待 反演区域离散化为一些小的空间像素格网),同 时假定每个小像素格网内的电子密度均匀分布且 在较短的反演时间内保持不变。考虑到电离层变 化活动易受地球电磁场的影响,区别于常见的 GNSS 电离层层析方法在地理坐标系下划分与建 立电子密度像素格网系统,本文提出在地磁坐标 系下沿着地磁经度、地磁纬度、高度划分与建立 GNSS 电离层层析电子密度像素格网,能够更加 合理地约束不同层析系统格网内的电子密度,并 提高反演结果的可靠性。

此外,以等间距方式划分电子密度像素格网的 GNSS 电离层层析反演方法假定电子密度在层 析像素格网内均匀分布,忽略了电离层电子密度 在垂直高度方向上变化较大的特性,这对于电离 层电子密度变化较大的峰值电子密度区域是不合 适的。本文考虑电离层电子密度随高度变化较大的特点,在电离层高度方向上将电子密度变化较大的区域划分较小的电子密度像素格网,在电子密度变化较小的区域划分较大的像素格网,尽可能在电离层变化较大的高度方向上提高像素格网的空间分辨率(如在电离层电子密度变化较大的峰值电子密度 F2 区域采用 100 km 的电子密度变化相对较小的高度区域采用 100 km 的电子密度像素格网间距)。本文以中国大陆上空的电离层区域为研究讨论,具体划分不等像素间距的电离层层析格网方法如下:

1)考虑本文采用的 GPS 测站分布范围,选定 的经纬度反演区域范围为地磁经度 150°~200° (对应的地理经度取 75°E~135°E)与地磁纬度 7°~42°(对应的地理纬度取 10°N~55°N)。在 对选定的电离层区域进行空间离散化时,考虑到 电离层沿经度方向上的变化活动比纬度方向上的 变化活动较弱,在地磁经度和地磁纬度方向上分 别取为 5°与 2.5°的电子密度像素格网间距。

2)选定的电离层高度区域为 90~1000 km, 分别在距离地面 90~210 km 的高度取 30 km 的 电子密度像素格网间距、距离地面 210~400 km 的高度取 10 km 的电子密度像素格网间距、距离 地面 400~700 km 的高度取 50 km 的电子密度像 素格网间距、距离地面 700~1000 km 高度取 100 km的电子密度像素格网间距。

3 实验数据及处理策略

本文采用 2011 年 12 月 1 日、12 月 2 日、12 月 6 日与 12 月 7 日的中国陆态网络 145 个基准 站的 GPS 观测数据(12 月 3 日—12 月 5 日观测 数据较少)进行实验讨论。观测数据以 IGS 标准 采样(30 s)获取,卫星截止高度角为 15°。分别利 用各个观测站的双频载波相位平滑码数据,并采 用"两步法"消除站星硬件延迟影响^[26],计算对 应各个 GPS 观测站在站星方向上的斜距电离层 TEC 值。

本文将分别采用模拟与实测数据对比的方法,验证本文提出顾及地磁影响的 GNSS 电离层 层析不等像素间距算法的有效性。在模拟比较过 程中,利用 IRI—2007 电离层模型提供的电子密 度作为"真值",并通过增加电离层随机误差及电 离层电子密度积分模拟不同的 GPS 站星斜距方 向上 TEC 的"观测数据";在实测数据验证对比过 程中,分别利用北京(40.3°N, 116.2°E)和武汉 (30.5°N, 114.3°E)电离层测高仪获得的电子 密度作为观测"真值"。

为评估不同 GNSS 电离层层析反演算法,在 实验讨论过程中,分别比较了传统地理坐标系下 电子密度像素等间距格网 ART 算法(方案一)、地 理坐标系下电子密度像素等间距格网 IART 算法 (方案二)、地理坐标系下电子密度像素不等间距 格网 IART 算法(方案三)和地磁坐标系下电子密 度像素不等间距格网 IART 算法(方案四)反演的 电子密度结果误差和精度。需要补充说明的是, 在方案一和方案二采用的电子密度像素等间距层 析反演系统中,电离层反演高度范围为90~ 990 km, 电子密度像素格网间距为 30 km。此外, 为了克服由于观测数据分布不均匀导致的在没有 观测信息覆盖的电子密度像素对初值的完全依 赖,以及避免像素间电子密度值发生大的跳变,本 文参照文献[27]与文献[28]对待反演区域的电 离层电子密度进行了约束处理,提高了观测信息 稀少的电离层像素内电子密度反演精度。

4 实验结果和分析

4.1 模拟比较与研究

4.1.1 模拟实验方法

本文利用 IRI—2007 电离层模型提供的电子 密度模拟实验中的"真值",并作为电离层变化趋 势项,在此基础上引入电离层随机误差。根据文 献[29] 电离层随机项误差的概率分布基本符合 正态分布规律,并进一步参照文献[30]和文 献[31]全球 GIM TEC 精度统计结果,本文研究作 简化处理,在中纬度地区(本文研究取地磁纬度 大于20°)模拟电离层随机误差分布满足期望值 为0 TECu、标准差值为2 TECu 的正态分布,在低 纬度地区(地磁纬度小于20°)模拟电离层随机误 差分布满足期望值为0 TECu、标准差值为4 TECu 的正态分布。在综合 IRI—2007 模型提供的电子 密度积分形成电离层 TEC 趋势项和模拟的电离 层随机误差项即可组合出各条 GPS 观测射线上 的电离层 TEC 模拟观测值。在此基础上,采用四 种不同方案电离层层析算法反演电子密度结果, 分别给出电离层在高度剖面和电子密度纬度与高 度剖面的变化,并从定性分析和定量统计比较的 方式,讨论不同 GNSS 电离层层析反演算法的有 效性与可靠性。模拟实验计算过程如下:

步骤1:构造系数阵:利用中国陆态网络基准 站和 GPS 卫星坐标,计算反演时段内 GPS 信号传 播路径在其所经过的电子密度像素格网内的截 距,以此截距构造出电离层层析反演系数矩阵A。 **步骤 2**:模拟电子密度真值:利用 IRI—2007 模型模拟待反演时段各个像素内的电离层电子密 度,并以此作为电子密度反演真值 x_真。

步骤3:模拟电子密度反演所需要的电离层斜距 TEC 的真值:联合步骤1 与步骤2 计算各条射线 传播路径上的电离层斜距 TEC 值 y_i = A・x_i。

步骤4:构造带误差的TEC 观测值:顾及实际 观测中观测噪声和离散误差的存在,在模拟计算 中,向模拟电离层斜距TEC 真值中加入服从正态 分布的随机误差 *e*,于是有:*y* = *y*_真 + *e*。

步骤 5:综合步骤 1~4,获得模拟重构的电离 层层析反演矩阵:y=A·x,其中,A 为步骤 1 构造 的观测矩阵,y 为步骤 4)模拟的站星 TEC 值,x 为 对应的待反演层析系统像素格网内的电子密度。

步骤 6:在步骤 5 的基础上,分别采用四种不同方案的 GPS 电离层层析算法反演电子密度结果,并通过与 IRI—2007 模型提供的电子密度"真值"进行比较,论证不同 GPS 电离层层析反演算法的有效性。

4.1.2 模拟验证结果

1) 电离层电子密度高度剖面反演结果比较

考虑论文长度,本文在讨论中仅给出2011年 12月6日北京时间11:00、13:00和15:00的电离 层电子密度剖面反演结果图为例,其他时间段的 结果见电子密度反演误差与精度统计表。图2定 性地给出分别由传统代数重构 ART 算法(方案 一,图中绿色虚线表示)、地理坐标系下电子密度 像素等间距格网层析改进的迭代反演(Improved ART, IART)算法(方案二,图中蓝色实线与加号 表示)、地理坐标系下电子密度像素不等间距格 网层析 IART 反演算法(方案三,图中青色实线与 方块表示)和地磁坐标系下电子密度像素不等间 距格网层析 IART 反演算法(方案四,图中红色实 线与三角形表示)反演的电子密度随高度变化结 果,及其相对于 IRI—2007 电离层模型提供的电 子密度"真值"(图中黑色实线表示)之间的比较 情况。为了方便将本节模拟结果和本文后续 GNSS 实测数据结果进行对比讨论,本节模拟给 出北京(40.3°N, 116.2°E)与武汉(30.5°N, 114.3°E)上空电离层电子密度剖面结果。

图 2 展示了 GNSS 电离层层析算法四种不同 反演方案估算的电离层电子密度随高度变化剖面 结果,可以看出,不同方案的电离层电子密度随高 度变化和电离层测高仪观测得到的电子密度变化 趋势相同。但可以明显看出,与 IRI—2007 模型 提供的电离层电子密度"真值"相比较,方案一采



(a) 2011年12月6日北京电离层电子密度模拟结果

(a) Simulated ionospheric electron density profiles over Beijing on December 6, 2011





(b) Simulated ionospheric electron density profiles over Wuhan on December 6, 2011

图 2 不同 GNSS 电离层层析算法重构的电子密度与 IRI—2007 电子密度"真值"比较

Fig. 2 Comparison of the ionospheric electron density profiles estimated from different GNSS tomographic algorithms using the simulation observations with the ionospheric electron density profiles from the IRI—2007 model

用的传统层析代数重构算法 ART 在不同时段和 不同测站的电子密度反演结果最差,这与该算法 对电离层电子密度反演重构值和实测值之间的误 差迭代分配时仅以观测射线截距作为准则有关, 使得电子密度重构结果误差较大。

方案二 IART 算法通过引入层析格网电子密 度像素内射线截距与电子密度乘积为组合变量, 较为合理地分配不同电子密度像素格网内实测值 与反演值之间的误差,同时通过构造与电子密度 变化相关的迭代松弛因子,抑制传播噪声对电子 密度反演结果影响,降低了电子密度反演误差。 从图 2 可以看出,方案二提供的以蓝色实线与加 号组合代表的电子密度结果(尤其是在高度 200~300 km)更靠近 IRI—2007 模型提供的电子 密度"真值"(黑色实线),优于 ART 算法结果(绿 色虚线)。在方案二的基础上,方案三和方案四 在电离层高度上采用了不等间距层析格网划分方 法,充分考虑了电子密度在垂直高度方向上变化 较大的特性,在峰值电子密度区域划分较小的像

素格网而其他区域划分较大像素格网,合理调节 不同高度层析格网内射线截距对电子密度误差的 放大作用,提高电子密度反演结果精度。可以看 到,图2中方案三提供的电子密度(青色实线与 方块表示)和方案四提供的电子密度(红色实线 与三角形表示)优于前两个方案的电子密度结 果。不同于方案三在地理坐标系下划分层析电子 密度像素格网,顾及电离层受地球电磁场影响,方 案四提出在地磁坐标系下划分电子密度像素格 网,像素类层析算法假定了每个像素格网内的电 子密度均匀分布,同时兼顾实测数据分布稀疏,往 往在实际反演计算中沿着经度与纬度对不同电子 密度像素格网施加约束,因此在地磁坐标系下的 电子密度约束反演结果将导致和在地理坐标系下 的电子密度约束反演结果不同。图2展示的结果 反映出方案四在地磁坐标系下的电子密度结果优 于方案三地理坐标系下的电子密度结果,也是四 种电离层层析算法反演方案中结果最优的方案。

2) 电离层电子密度反演误差与精度

表1与表2定量给出12月1日、12月2日、 12月6日、12月7日四种不同GNSS电离层层析 反演方案计算的电子密度在高度上的剖面结果相 对于IRI—2007电子密度"真值"的峰值电子密度 绝对误差、电子密度剖面平均绝对百分比误差及 均方根值(Root Mean Square, RMS)。其中,表1 给出的是北京上空的平均统计结果,表2给出的 是武汉上空的平均统计结果。需要补充说明的 是,底部电离层电子密度值和顶部电离层电子密 度值相对峰值电子密度较小,部分底部与顶部电 子密度反演结果中的误差变化可能会导致电子密 度剖面误差百分比的统计结果出现较大波动。为 了更准确地表达不同GNSS电离层层析方法反演

电子密度误差的总体效果,本文在模拟实验中仅 统计电离层高度处于200~450 km 处的电子密度 结果百分比误差。

根据表 1~2 统计结果可以看出,相对于 IRI—2007 模型提供的电子密度"真值",方案— ART 算法反演的峰值电子密度误差、电离层电子 密度剖面结果的平均绝对百分比误差及 RMS 值, 其结果都最大;方案二电离层电子密度反演误差 与 RMS 值其次;方案三电离层电子密度反演误差 与 RMS 值总体优于方案二结果,方案四的电离层 电子密度反演误差与 RMS 值最小。上述研究结 果表明,本文通过改进 ART 算法、建立不等间距 电子密度像素格网及在地磁坐标系下反演电子密

表 1 不同 GNSS 电离层层析算法模拟重构的北京电子密度剖面相对于 IRI—2007"真值"的误差与精度统计

Tab. 1 Error and accuracy statistics of the ionospheric electron density derived from the different GNSS tomographic algorithms using the simulation observations in comparison with those provided by the IRI—2007 model over Beijing during the different days

	电离层峰值电子密度 误差绝对值/(el/m ³)	电离层电子密度剖面结果 平均绝对百分比误差/%			结果 叁/%	电离层电子密度剖面 结果均方根值/(el/m ³)
	方案一 方案二 方案三 方案四	方案一	方案二	方案三	方案四	方案一 方案二 方案三 方案四
12月1日	$\begin{array}{ccc} 0.243 \times \ 0.200 \times \ 0.090 \times \ 0.071 \times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$	17.2	14.8	12.3	9.1	$\begin{array}{cccc} 0.132 \times \ 0.112 \times \ 0.087 \times & 0.068 \times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$
12月2日	$\begin{array}{cccc} 0.272\times \ 0.208\times \ 0.114\times \ 0.071\times \\ 10^{12} \ 10^{12} \ 10^{12} \ 10^{12} \ 10^{12} \end{array}$	18.5	14.5	13.7	10.3	$\begin{array}{ccc} 0.136\times0.105\times0.091\times&0.071\times\\ 10^{12}&10^{12}&10^{12}&10^{12} \end{array}$
12月6日	$\begin{array}{ccc} 0.211\times \ 0.158\times \ 0.093\times \ 0.062\times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$	18.3	14.5	13.1	8.8	$\begin{array}{cccc} 0.123\times \ 0.098\times \ 0.087\times & 0.074\times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$
12月7日	$\begin{array}{ccc} 0.267\times \ 0.204\times \ 0.111\times \ 0.069\times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$	19.1	15.1	13.5	10.2	$\begin{array}{cccc} 0.135\times0.103\times0.089\times&0.069\times\\ 10^{12}&10^{12}&10^{12}&10^{12} \end{array}$
平均值	$\begin{array}{cccc} 0.248 \times \ 0.193 \times \ 0.102 \times \ 0.068 \times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$	18.3	14.7	13.2	9.6	$\begin{array}{ccc} 0.132 \times \ 0.105 \times \ 0.089 \times & 0.071 \times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$

表 2 不同 GNSS 电离层层析算法模拟重构的武汉电子密度剖面相对于 IRI—2007"真值"的误差与精度统计

Tab. 2 Error and accuracy statistics of the ionospheric electron density derived from the different GNSS tomographic algorithms using the simulation observations in comparison with those provided by

the IRI-2007 model over Wuhan during the different days

	电离层峰值电子密度 误差绝对值/(10 ¹² el/m ³)	电离层电子密度剖面结果 平均绝对百分比误差/%			结果 三/%	电离层电子密度剖面 结果均方根值/(el/m ³)
	方案一 方案二 方案三 方案四	方案一	方案二	方案三	方案四	方案一 方案二 方案三 方案四
12月1日	$\begin{array}{ccc} 0.318\times \ 0.248\times \ 0.174\times \ 0.065\times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$	16.2	12.7	10.2	6.6	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
12月2日	$\begin{array}{ccc} 0.316\times \ 0.247\times \ 0.179\times \ 0.071\times \\ 10^{12} \ 10^{12} \ 10^{12} \ 10^{12} \ 10^{12} \end{array}$	16.0	12.8	10.5	6.8	$\begin{array}{ccc} 0.154\times0.121\times0.089\times&0.057\times\\ 10^{12}&10^{12}&10^{12}&10^{12} \end{array}$
12月6日	$\begin{array}{cccc} 0.252\times \ 0.213\times \ 0.129\times \ 0.059\times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$	16.2	14.1	8.9	6.8	$\begin{array}{cccc} 0.154\times0.127\times0.075\times&0.059\times\\ 10^{12}&10^{12}&10^{12}&10^{12} \end{array}$
12月7日	$\begin{array}{ccc} 0.314\times \ 0.239\times \ 0.172\times \ 0.068\times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$	16.3	12.8	10.1	6.9	$\begin{array}{cccc} 0.152\times0.117\times0.085\times0.055\times\\ 10^{12}10^{12}10^{12}10^{12}10^{12} \end{array}$
平均值	$\begin{array}{cccc} 0.300\times \ 0.237\times \ 0.164\times \ 0.066\times \\ 10^{12} \ 10^{12} \ 10^{12} \ 10^{12} \end{array}$	16.2	13.1	9.9	6.8	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$

· 63 ·

度,都不同程度地提高了 GNSS 电离层层析反演 电子密度结果的可靠性。另外,从表1~2 的统计 结果可以看出,不同方案反演的电离层峰值电子 密度误差和电子密度百分比统计误差的结果差异 最大,表明不同方案在靠近电子密度较大的峰值 区域结果改进最明显,这和图2展示的结果一致; 电子密度剖面结果的 RMS 误差则反映了不同方 案在电离层全部高度区域的整体改进效果。综上 所述,在四个不同的电离层层析反演方案中,方案 四反演的电子密度结果均是最优的。

4.2 实测数据比较研究

利用 2011 年 12 月 1 日、12 月 2 日、12 月 6 日、12 月 7 日的中国陆态网络 145 个 GPS 地面监 测站的实测数据开展电离层电子密度层析算法的 实测数据试验比较研究。和 4.1 小节模拟实验一 致,实测数据比较讨论时采用了四种不同的电离 层层析反演方案。同时,为比较评估 GPS 实测数 据层析反演的电离层电子密度精度,实验过程中 采用了北京站和武汉站电离层测高仪观测获得的 电子密度观测结果作为"真值"进行比较论证。 需要说明的是,电离层测高仪能够通过直接观测 获取峰值电子密度及其高度以下底部电子密度的 准确结果,电子密度峰值高度以上的顶部电子密 度却是根据一定的算法获得^[32],因此,本小节在 比较不同方法获得的顶部电子密度时,仅进行定 性的趋势变化比较而不开展定量的结果差异比 较,对底部电离层电子密度及峰值电子密度进行 了定量分析与讨论。

1) 电离层电子密度高度剖面反演结果比较

图 3 给出了北京和武汉上空在 2011 年 12 月 6 日北京时间 11:00、13:00 和 15:00 点电离层电 子密度在高度方向上的剖面变化结果。其他时段 结果类似,其电离层电子密度反演误差与精度统 计结果见表 3~4。

在图 3 中电离层电子密度"真值"由电离层 测高仪观测提供(黑色实线表示),其他四种反演 方案得到的电离层电子密度剖面结果表达与图 2 保持一致。从图 3 可以看出,方案四反演的电离 层电子密度结果最接近于电离层测高仪观测获得 的电子密度剖面,尤其是在靠近电子密度峰值区







(b) Ionospheric electron density over Wuhan on December 6, 2011

图 3 不同 GNSS 层析算法重构的电子密度与测高仪电子密度"真值"比较结果

Fig. 3 Comparison of the ionospheric electron density profiles derived from the different GNSS tomographic algorithms using GNSS data with the ionospheric electron density profiles from the ionosonde measurements

表 3 不同 GNSS 电离层层析算法重构的北京电子密度相对于电离层测高仪观测"真值"的误差与精度统计

Tab. 3 Error and accuracy statistics of the ionospheric electron density derived from the different GNSS tomographic algorithms using GNSS data in comparison with those from the ionosonde measurements over Beijing

	电离层峰值电子密度 误差绝对值/(el/m ³)	底部电离层电子密度剖面结果 平均绝对百分比误差/%			面结果 ≧∕%	底部电离层电子密度剖面 结果均方根值/(el/m ³)
	方案一 方案二 方案三 方案四	方案一	方案二	方案三	方案四	方案一 方案二 方案三 方案四
12月1日	$\begin{array}{cccc} 0.381 \times \ 0.262 \times \ 0.237 \times \ 0.164 \times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$	27.0	18.3	16.3	13.2	$\begin{array}{cccc} 0.275\times \ 0.210\times \ 0.210\times \ 0.157\times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$
12月2日	$\begin{array}{cccc} 0.280\times \ 0.242\times \ 0.169\times \ 0.144\times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$	23.6	18.9	13.9	11.3	$\begin{array}{cccc} 0.208\times \ 0.172\times \ 0.143\times \ 0.117\times \\ 10^{12} \ 10^{12} \ 10^{12} \ 10^{12} \end{array}$
12月6日	$\begin{array}{ccc} 0.238\times \ 0.219\times \ 0.135\times \ 0.105\times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$	21.9	18.3	11.1	8.5	$\begin{array}{cccc} 0.176\times0.157\times0.113\times&0.099\times\\ 10^{12}&10^{12}&10^{12}&10^{12} \end{array}$
12月7日	$\begin{array}{ccc} 0.318\times \ 0.235\times \ 0.170\times \ 0.141\times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$	25.5	18.4	13.6	12.0	$\begin{array}{ccc} 0.218\times \ 0.163\times \ 0.120\times & 0.109\times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$
平均值	$\begin{array}{ccc} 0.304\times \ 0.240\times \ 0.178\times \ 0.139\times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$	24.5	18.5	13.7	11.3	$\begin{array}{cccc} 0.219\times \ 0.176\times \ 0.147\times & 0.121\times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$

表 4 不同 GNSS 电离层层析算法重构的武汉电子密度相对于电离层测高仪观测"真值"的误差与精度统计

Tab. 4 Error and accuracy statistics of the ionospheric electron density derived from the different GNSS tomographic algorithms using GNSS data in comparison with those from the ionosonde measurements over Wuhan

	电离层峰值电子密度 误差绝对值/(el/m ³)	底部电离层电子密度剖面结果 平均绝对百分比误差/%			面结果 ≧/%	底部电离层电子密度剖面 结果均方根值/(el/m ³)
	方案一 方案二 方案三 方案四	方案一	方案二	方案三	方案四	方案一 方案二 方案三 方案四
12月1日	$\begin{array}{cccc} 0.435\times0.263\times0.253\times0.125\times\\ 10^{12}&10^{12}&10^{12}&10^{12} \end{array}$	26.4	17.7	16.4	9.9	$\begin{array}{cccc} 0.307\times \ 0.222\times \ 0.208\times \ 0.150\times \\ 10^{12} \ 10^{12} \ 10^{12} \ 10^{12} \end{array}$
12月2日	$\begin{array}{cccc} 0.359\times \ 0.252\times \ 0.224\times \ 0.112\times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$	24.2	17.4	12.6	9.5	$\begin{array}{ccc} 0.287\times \ 0.219\times \ 0.157\times \ 0.113\times \\ 10^{12} \ 10^{12} \ 10^{12} \ 10^{12} \ 10^{12} \end{array}$
12月6日	$\begin{array}{cccc} 0.325\times \ 0.242\times \ 0.190\times \ 0.134\times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$	25.8	20.5	13.9	10.9	$\begin{array}{cccc} 0.270\times0.227\times0.164\times&0.134\times\\ 10^{12}&10^{12}&10^{12}&10^{12} \end{array}$
12月7日	$\begin{array}{cccc} 0.677\times0.218\times0.368\times0.125\times\\ 10^{12}&10^{12}&10^{12}&10^{12} \end{array}$	26.2	15.4	24.7	16.8	$\begin{array}{cccc} 0.453\times0.255\times0.428\times&0.348\times\\ 10^{12}&10^{12}&10^{12}&10^{12} \end{array}$
平均值	$\begin{array}{cccc} 0.449 \times 0.244 \times 0.259 \times 0.124 \times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$	25.7	17.8	16.9	11.8	$\begin{array}{cccc} 0.329 \times \ 0.231 \times \ 0.239 \times \ 0.186 \times \\ 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} & 10^{12} \end{array}$

域的结果具有明显改善效果,这与4.1.2小节利 用 IRI—2007 模型开展的模拟实验结果保持一 致;但也可以看出方案四在部分时段的反演结果 与方案三结果接近,这和在模拟实验中方案四相 对其他方案都具有明显优势不同,这可能与实际 电离层变化活动除受地球电磁场影响之外还受中 性风等其他因素影响,从而导致其更为复杂多变 有关。

图3结果也显示, GNSS 电离层层析系统采用 不等间距电子密度像素格网划分方式后, 方案三 反演的电离层电子密度结果优于方案二等间距电 子密度像素格网算法反演的电子密度, 传统 ART 算法反演的电离层电子密度效果最差, 这和模拟 实验结果保持一致。

2) 电离层电子密度反演误差与精度

进一步以电离层测高仪观测提供的电子密度 为"真值",定量统计四种不同的 GNSS 电离层层 析方案反演的峰值电子密度误差的绝对值、底部 电子密度剖面平均绝对百分比误差及均方根值。 同样需要补充说明的是,为避免部分底部电离层 电子密度反演结果变化可能导致的电子密度剖面 误差百分比统计出现较大波动,本文在实测数据 比较研究中仅统计电离层高度处于 200 km 至峰 值电子密度高度处结果的百分比误差,表 3 与 表4分别给出北京和武汉上空不同层析反演方案 在 12 月 1 日、12 月 2 日、12 月 6 日、12 月 7 日的 电子密度结果误差与精度的平均统计结果。

从表3~4可以看到,相对于电离层测高仪观 测获得的电离层电子密度"真值",方案四反演的 电离层峰值电子密度误差、底部电离层电子密度 剖面结果平均绝对百分比误差以及 RMS 统计结 果基本最小;方案一反演电子密度结果的误差与 精度最大;方案二和方案三反演的电子密度结果 均优于方案一的结果,方案三结果优于方案二结 果(12月7日武汉站结果除外)。从峰值电子密 度误差和平均百分比误差看,不同方案反演的结 果差异最为明显。上述实测数据研究结果和模拟 实验结果基本保持一致。此外,从总体反演效果 看,不同方案反演的武汉上空电离层电子密度误 差与精度大于北京上空的电子密度误差与精度, 这或许与我国低纬度区域电离层实际物理变化活 动比中纬度区域更为复杂多变有关。

最后需要补充说明的是,受太阳活动等多种 因素影响,电离层空间环境变化复杂,存在逐日、 月、半年、年甚至更长时间尺度(11年)的变化活 动规律。因此,本文在地磁坐标系下建立不等像 素间距的 GNSS 层析反演方法的讨论与分析结果 仅是初步的,更深入的分析与论证需要利用长时 间尺度的实测数据进行研究。

5 结论

本文初步探讨了 GNSS 电离层电子密度层析 技术四种不同的反演方案,包括传统的 ART 算 法、IART 算法、在电离层高度上建立电子密度像 素不等间距格网的 IART 算法及在地磁坐标系下 建立电子密度像素不等间距格网的 IART 算法。 利用 IRI—2007 电离层模型、GNSS 实测数据及电 离层测高仪观测数据,从模拟实验和实测数据对 比两个方面,定性分析与定量讨论了不同 GNSS 电离层层析方案的电子密度反演误差与精度,主 要结论如下:

1)相对于 ART 电离层电子密度层析算法,本 文在引入观测射线截距与电子密度乘积组合为层 析迭代自变量的基础上,通过构造与电子密度变 化相关的松弛因子实现平衡与调节层析反演的电 子密度精度与结果平滑程度,降低电子密度反演 误差并提高反演精度;

2)GNSS 电离层层析方法等间距划分电子密 度像素格网,忽略了电离层电子密度在垂直高度 方向上变化起伏较大的不均匀性,本文提出在接 近电子密度变化较大的高度区域建立较小的电子 密度像素格网而其他高度区域建立较大的电子密 度像素格网,较为合理地提高电离层层析系统的 空间分辨率,明显改善靠近电子密度峰值区域反 演效果;

3)考虑电离层受地球电磁场影响较大,提出

在地磁坐标系下建立电离层电子密度层析格网, 使得能够在电离层层析系统中沿着空间经纬度施 加更为合理的电子密度平滑约束,提高电离层电 子密度反演精度。

参考文献(References)

- Austen J R, Franke S J, Liu C H. Ionospheric imaging using computerized tomography[J]. Radio Science, 1988, 23(3): 299 - 307.
- [2] Jin S G, Park J U, Wang J L, et al. Electron density profiles derived from ground-based GPS observations [J]. Journal of Navigation, 2006, 59(3): 395 – 401.
- [3] Wen D B, Yuan Y B, Ou J K, et al. A hybrid reconstruction algorithm for 3-D ionospheric tomography [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2008, 46(6): 1733-1739.
- [4] Yao Y B, Tang J, Kong J, et al. Application of hybrid regulation method for tomographic reconstruction of midlatitude ionospheric electron density [J]. Advance in Space Research, 2013, 52(12): 2215 – 2225.
- [5] 姚宜斌,汤俊,张良,等. 电离层三维层析成像的自适应 联合迭代重构算法[J]. 地球物理学报,2014,57(2): 345-353.
 YAO Yibin, TANG Jun, ZHANG Liang, et al. An adaptive simultaneous iteration reconstruction technique for threedimensional ionospheric tomography[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2014, 57(2): 345-353. (in Chinese)
- [6] 汤俊. GNSS 三维电离层层析算法及电离层扰动研究[J]. 测绘学报, 2015, 44(1): 117.
 TANG Jun. Studies on three-dimension ionospheric tomography using GNSS measurements and ionospheric disturbances[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2015, 44(1): 117. (in Chinese)
- [7] Jin S G, Li D. 3-D ionospheric tomography from dense GNSS observations based on an improved two-step iterative algorithm[J]. Advances in Space Research, 2018, 62(4): 809-820.
- [8] 汤俊,姚宜斌,张良. 一种适用于电离层层析成像的 TV-MART 算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2015, 40(7): 870-876.
 TANG Jun, YAO Yibin, ZHANG Liang. A TV-MART algorithm applied to computerized ionospheric tomography[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2015, 40(7): 870-876. (in Chinese)
- [9] 赵海山,杨力,周阳林,等.一种适用于电离层电子密度 重构的 AMART 算法[J]. 测绘学报, 2018, 47(1): 57-63.
 ZHAO Haishan, YANG Li, ZHOU Yanglin, et al. A AMART algorithm applied to ionospheric electron reconstruction[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2018, 47(1): 57-63. (in Chinese)
- [10] Pryse S E, Kersley L, Rice D L, et al. Tomographic imaging of the ionospheric midlatitude trough [J]. Annales Geophysicae, 1993, 11: 144 - 149.
- [11] Yao Y B, Zhai C Z, Kong J, et al. A modified threedimensional ionospheric tomography algorithm with side rays[J]. GPS Solutions, 2018, 22(4): 1-18.
- [12] 施闯, 耿长江, 章红平, 等. 基于 EOF 的实时三维电离层

模型精度分析[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2010, 35(10): 1143-1146.

SHI Chuang, GENG Changjiang, ZHANG Hongping, et al. Precision analysis of ionosphere tomography based on EOF[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2010, 35(10): 1143 – 1146. (in Chinese)

- [13] Zhou C, Fremouw E J, Sahr J D. Optimal truncation criterion for application of singular value decomposition to ionospheric tomography[J]. Radio Science, 1999, 34(1): 155 - 156.
- Bhuyan K, Singh S, Bhuyan P. Application of generalized singular value decomposition to ionospheric tomography [J].
 Annales Geophysicae, 2004, 22(10): 3437 - 3444.
- [15] Mitchell C N, Kersley L, Heaton J A T, et al. Determination of the vertical electron-density profile in ionospheric tomography: experimental results [J]. Annales Geophysicae, 1997, 15: 747-752.
- Pryse S E, Kersley L, Mitchell C N, et al. A comparison of reconstruction techniques used in ionospheric tomography[J]. Radio Science, 1998, 33(6): 1767 - 1779.
- [17] Wen D B, Yuan Y B, Ou J K, et al. Three-dimensional ionospheric tomography by an improved algebraic reconstruction technique[J]. GPS Solutions, 2007, 11(4): 251-258.
- [18] Hobiger T, Kondo T, Koyama Y. Constrained simultaneous algebraic reconstruction technique (C-SART)—A new and simple algorithm applied to ionospheric tomography[J]. Earth Planet and Space, 2008, 60: 727-735.
- [19] Das S K, Shukla A. Two-dimensional ionospheric tomography over the low-latitude indian region: an intercomparison of ART and MART algorithms [J]. Radio Science, 2011, 46(2): 1-13.
- [20] 霍星亮,袁运斌,欧吉坤,等.顾及电离层变化的层析反 演新算法[J]. 地球物理学报,2016,59(7): 2393-2401.

HUO Xingliang, YUAN Yunbin, OU Jikun, et al. A new ionospheric tomographic algorithm taking into account the variation of the ionosphere [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2016, 59(7): 2393 – 2401. (in Chinese)

- [21] Schaer S. Mapping and predicting the earth's ionosphere using the global positioning system [D]. Switzerland: Astronomisches Institute of University Bern, 1999; 1-205.
- [22] Bilitza D, Mckinnell L, Reinisch B, et al. The international reference ionosphere (IRI) today and in the future [J]. Journal of Geodesy, 2011, 85: 909-920.
- [23] 余龙飞,胡伍生,韩理想,等.基于混合罚函数法的多尺度电离层层析确权方法[J].测绘学报,2016,45(z2): 156-164.

YU Longfei, HU Wusheng, HAN Lixiang, et al. Weights of

multiscale ionospheric tomography determination method based on mixed penalty function [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2016, 45 (z2): 156 – 164. (in Chinese)

- [24] Zheng D Y, Zheng H W, Wang Y J, et al. Variable pixel size ionospheric tomography[J]. Advance in Space Research, 2017, 59(12): 2969 - 2986.
- [25] Asmar S W, Armstrong J W, Less L. Spacecraft Doppler tracking: noise budget and accuracy achievable in precision radio science observations [J]. Radio Science, 2005, 40(2): 10.1029/ 2004RS003101.
- [26] Li Z S, Yuan Y B, Li H, et al. Two-step method for the determination of the differential code biases of compass satellites [J]. Journal of Geodesy, 2012, 86 (11): 1059-1076.
- [27] 李慧,袁运斌,闫伟,等.附加平滑约束的电离层层析反演[J].武汉大学学报(信息科学版),2013,38(4):412-415.
 LI Hui, YUAN Yunbin, YAN Wei, et al. A constrained ionospheric tomography algorithm with smoothing method[J].

Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2013, 38(4): 412-415. (in Chinese)

- [28] Wen D B, Liu S Z, Tang P Y. Tomographic reconstruction of ionospheric electron density based on constrained algebraic reconstruction technique[J]. GPS Solutions, 2010, 14(4): 375-380.
- [29] 李子申. GNSS/COMPASS 电离层时延修正及 TEC 监测理 论与方法研究[D]. 武汉:中国科学院测量与地球物理研 究所, 2012:1-172.
 LI Zishen. Study on the mitigation of ionospheric delay and the monitoring of global ionospheric TEC based on GNSS/ Compass[D]. Wuhan: Institute of Geodesy and Geophysics, 2012:1-172. (in Chinese)
- [30] 李子申,王宁波,李敏,等. 国际 GNSS 服务组织全球电 离层 TEC 格网精度评估与分析[J]. 地球物理学报, 2017,60(10):3718-3729.
 LI Zishen, WANG Ningbo, LI Min, et al. Evaluation and analysis of the global ionospheric TEC map in the frame of international GNSS services [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2017, 60 (10):3718-3729. (in Chinese)
- [31] Hernández-pajares M, Roma-dolla D, Krankow A, et al. Methodology and consistency of slant and vertical assessments for ionospheric electron content models [J]. Journal of Geodesy, 2017, 91(12): 1405 - 1414.
- [32] Liu L B, Huang H, Chen Y D, et al. Deriving the effective scale height in the topside ionosphere based on ionosonde and satellite in situ observations [J]. Journal of Geophysical Research: Space Physics, 2014, 119(10): 8472 - 8482.