doi:10.11887/j.cn.202102014 http://journal.nudt.edu.cn

考虑多轴应力与共振影响的随机振动疲劳寿命预测*

白 金[1],李 静[1],仇原鹰[1],盛 英[1],孙 红[1],王海东[2],王肇喜[2]
(1. 西安电子科技大学 机电工程学院,陕西 西安 710071;2. 上海航天精密机械研究所,上海 201600)

摘 要:目前工程上计算结构随机疲劳寿命时,仍经常采用基于单轴拉-压疲劳寿命(Stress-Number of cycles,S-N)曲线的应力寿命方法。虽然使用简单方便,但这种方法不仅忽视了单轴S-N曲线且不能准确反映结构在多轴应力状态下的疲劳,还忽略了随机振动中共振对结构疲劳寿命的影响,因此该方法在预测结构在随机振动下的疲劳寿命时与实际寿命往往有较大误差。对此引入三轴因子来反映结构在随机振动下的多轴应力状态,同时推广得到其在频域上的表达式,并在此基础上引入非线性函数,提出了一个新的随机振动疲劳损伤参量——多轴振动因子。新的损伤参量不仅同时考虑了结构随机振动下的多轴应力状态与共振对疲劳寿命的影响,而且该损伤参量形式简单,便于工程应用。利用新的随机振动疲劳损伤参量,得到了适用于随机振动下的多轴S-N曲线,从而建立了一种新的随机振动疲劳寿命预测方法。通过对7075-T6和LY12CZ铝合金缺口试件的随机振动疲劳寿命进行预测,结果表明该方法较准确地预测了两种缺口试件随机振动下的疲劳寿命。

关键词:随机振动;三轴因子;多轴振动因子;多轴S-N曲线;疲劳寿命
中图分类号:TH114 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2021)02-102-07

Random vibration fatigue life prediction considering the effects of multi-axial stress and resonance

BAI Jin[1], *LI Jing*[1], *QIU Yuanying*[1], *SHENG Ying*[1], *SUN Hong*[1], *WANG Haidong*[2], *WANG Zhaoxi*[2]
(1. School of Electromechanical Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China;
2. Shanghai Spaceflight Precision Machinery Research Institute, Shanghai 201600, China)

Abstract: In calculating random fatigue life of structures in engineering at present, the stress life method based on the axial tension-compression fatigue life S-N(stress-number of cycles) curve is often used. Easy as it is to use, it often ignores not only the single-axis S-N curve, causing inaccurate reflection of the effect of multi-axial stress state, but also the resonance on the structure fatigue life in random vibration, as a result, the method in the prediction of fatigue life of structures under random vibration with actual life tends to have a larger error. The triaxial factor was introduced to reflect the multi-axial stress state of the structure under random vibration, and its expression in frequency domain was generalized. Based on this, the multi-axial vibration factor, a new random vibration fatigue damage parameter, was proposed. The new damage parameter not only considers the effect of multi-axial stress state and resonance on fatigue life under random vibration of the structure, but also has a simple form for engineering application. By using the new random vibration fatigue damage parameters, the multi-axis S-N curve for random vibration was obtained, and a new random vibration fatigue life prediction method was established. By predicting the random vibration fatigue life of 7075-T6 and LY12CZ aluminum alloy notch specimen, the results show that the method can accurately predict the fatigue life of two kinds of notch specimens under random vibration.

Keywords: random vibration; triaxial factor; multi-axis vibration factor; multi-axis S-N curve; fatigue life

结构在随机载荷的作用下经常处于多轴应力状态,对于在服役过程中承受随机振动激励的航空器或航天器而言,不仅应该关心结构在随机载荷下的多轴应力状态,振动疲劳的问题也必须引起重视。Crandall等[1]将振动疲劳定义为结构在振动作用下产生的不可逆的累积损伤。蒋培等[2]对宽频带随机振动环境下的疲劳强化机理进行了研究。之后姚起杭等[3]指出了振动疲劳中的特殊形式——共振疲劳,即结构因所受动态载荷的频率接近其固频而出现的疲劳破坏现象。王明珠[4]分析了激励频率、阻尼等因素对结构振动疲劳的影响。王锦丽等[5]在研究加载频率对

* 收稿日期:2019-10-08
基金项目:国防基础科研基金资助项目(JSZL2017203C012)
作者简介:白金(1995—) 男,山西长治人,博士研究生,E-mail:jbai9@stu.xidian.edu.cn;
仇原鹰(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:yyqiu@mail.xidian.edu.cn

悬臂梁振动疲劳特性的影响中发现:结构在振动过程中,共振会加速裂纹形成或扩展,从而导致结构破坏加剧。

结构在随机振动下疲劳的计算方法主要分为时域法和频域法。时域分析方法是利用时域模拟方法对应力响应功率谱密度函数进行时域模拟,再结合不同的多轴疲劳模型计算。目前国内外学者提出了一些多轴疲劳模型,Socie[6]、Fatemi[7]、Shang[8]等分别基于临界平面法提出了不同的疲劳寿命模型,Li 等[9]也基于临界平面法对多轴载荷下的疲劳寿命进行了计算。而在频域法方面,目前大多数的分析方法是利用疲劳失效准则把多轴应力等效为单轴应力状态,再利用应力幅值概率密度函数模型估算结构的疲劳寿命。文献[10 - 14]提出了不同的雨流幅值概率密度函数模型用于疲劳损伤和寿命估算。无论是时域法还是频域法,均需要结合材料的疲劳寿命曲线进行计算,目前应用最广泛的仍然是单轴拉 - 压的 S - N 曲线。但相比于时域分析方法,频域分析方法计算简单、不需要进行循环计数,因此受到了工程界的重视。其中,等效 von - Mises 应力方法[15]是目前工程中常用的多轴疲劳频域分析方法。

但 Niesłony[16-17]指出,利用等效 von - Mises 应力和单轴拉 - 压的 S - N 曲线计算结构随机多轴疲劳损伤的方法中的缺点是,该方法只有当材料的 S - N 曲线满足特定条件时,才可能达到较好的预测精度。同时 Benasciutti[18]针对该问题做了更为细致的分析,得到了不同材料疲劳常数和载荷条件下的等效 von - Mises 应力的计算精度。葛静冉[19]基于等效 Lematire 应力提出了一种多轴 S - N 曲线用以计算多轴随机疲劳寿命,虽然这种方法的预测精度较基于 von - Mises 等效应力结合单轴 S - N 曲线的方法有所提高,但相较于试验结果还有一定的误差,同时伴随着振动量级的增大,预测误差在不断增加。

此外,以上方法均没有考虑振动过程中共振对疲劳寿命的影响,虽然共振疲劳和一般循环疲劳破坏的机理和临界点基本一致,但实际上二者在结构应力分布、裂纹扩展速率等方面均有很大差异,因此利用这些方法在计算随机振动疲劳时会造成较大误差。也有学者进行了一些材料的共振疲劳试验,肖寿庭等[20]通过对 LY12CZ 铝合金悬臂梁进行共振疲劳试验,得到了其动态疲劳 S - N曲线,但迫于试验成本高、耗费时间多等缺陷,并没有得到很多的试验数据。同时在目前已有的文献中,存在考虑多轴疲劳的,也存在考虑共振对疲劳寿命影响的文献,但可以同时综合考虑两者对疲劳寿命影响的方法目前还尚未见相关文献报道。

所以,提出一种综合考虑多轴应力与共振影响的随机振动疲劳寿命预测方法成为一个有待解决的问题。考虑到新方法不仅应计算方便,更应满足预测精度,因此通过现有的单轴 S - N 曲线得到随机振动下的多轴 S - N 曲线,进而利用 von - Mises 准则预测结构在随机振动下的疲劳寿命成了一个思路。因此,本文通过引入三轴因子 F_T 来反映结构的多轴应力状态,进而为了考虑结构振动过程中共振对结构疲劳寿命的影响,在其基础上定义了多轴振动因子 F_{MV},最终利用单轴拉压和扭转 S - N 曲线得到了随机振动下的多轴 S - N 曲线,结合 von - Mises 准则计算结构的随机振动疲劳寿命,从而得到一种综合考虑多轴应力与共振影响的随机振动疲劳寿命预测方法。

1　基于多轴振动因子插值的多轴 S - N 曲线

应用 von - Mises 准则对结构在随机振动下的疲劳寿命进行预测时,应结合可以反映结构多轴应力状态和共振的多轴 S - N 曲线进行计算。受文献[19]思想的启发,本文提出通过材料的单轴拉 - 压、扭转 S - N 曲线线性插值得到对应的多轴 S - N 曲线,如图 1 所示。

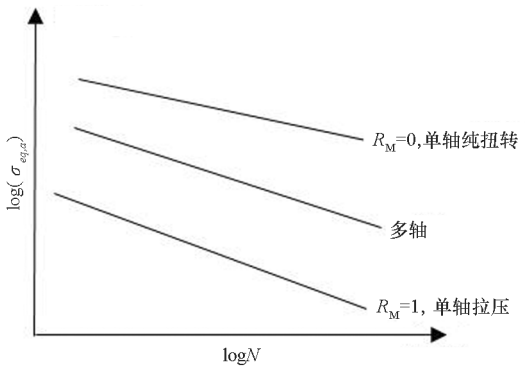


图 1　多轴 S - N 曲线示意图

Fig. 1　Schematic diagram of multi-axis S - N curve

为了反映结构的多轴应力状态,引入三轴因子[21] F_T,其表达式为:

$$F_T = \frac{3\overline{\sigma_{m,a}}}{\overline{\sigma_{eq,a}}} \tag{1}$$

其中:$\overline{\sigma_{m,a}}$、$\overline{\sigma_{eq,a}}$分别为通过雨流循环计数提取的平均应力幅值和等效 von - Mises 应力幅值的平均值;$\overline{\sigma_{1,a,i}}$、$\overline{\sigma_{2,a,i}}$、$\overline{\sigma_{3,a,i}}$分别为通过雨流循环计数提取的第一、第二和第三主应力幅值的平均值。$\overline{\sigma_{m,a}}$、$\overline{\sigma_{eq,a}}$表达式分别为:

$$\overline{\sigma_{m,a}} = mean[(\overline{\sigma_{1,a,i}} + \overline{\sigma_{2,a,i}} + \overline{\sigma_{3,a,i}})]/3 \quad (2)$$

$$\overline{\sigma_{eq,a}} = mean[\sigma_{eq,a,i}] \quad (3)$$

但为了便于工程上使用,需要得到 F_T 在频域上的表达式。因此进行如下推导:

$$F_T = \frac{3\overline{\sigma_{m,a}}}{\overline{\sigma_{eq,a}}} = \frac{3\sqrt{\sigma_m^2}}{\sqrt{\sigma_{eq}^2}} = \frac{3\sqrt{E[\sigma_m^2]}}{\sqrt{E[\sigma_{eq}^2]}} = \frac{3\sqrt{\int_0^\infty G_{\sigma_m^2}(f)\,\mathrm{d}f}}{\sqrt{\int_0^\infty G_{\sigma_{eq}^2}(f)\,\mathrm{d}f}} = \frac{3\sqrt{m_{0,\sigma_m}}}{\sqrt{m_{0,\sigma_{eq}}}} = \frac{3S_{\sigma_m}}{S_{\sigma_{eq}}} \quad (4)$$

其中:$G_\sigma(f)$ 为应力功率谱密度函数;$m_{0,\sigma}$ 为应力的均方值;S_{σ_m}、$S_{\sigma_{eq}}$ 分别为平均应力和等效 von - Mises 应力的均方根值。

计算结构在随机振动下的疲劳寿命时仅仅考虑其多轴应力状态并不全面,还需要考虑共振的影响。刘文光[22]指出共振疲劳与裂纹联系非常紧密,裂纹在整个振动过程中的开合运动导致结构的动力学特性一直处于变化状态,容易引发一系列非线性共振现象,从而对结构的振动寿命产生影响,从刘文光得到的激励频率对结构疲劳寿命的影响曲线来看,影响曲线的形状与对数函数的形状相似,且考虑到 S - N 曲线在对数坐标下为直线以及基本初等函数在实际使用中的便利性,因此利用对数函数来表示共振对疲劳寿命的影响。

在振动过程中,结构在共振状态与非共振状态下响应幅值有很大区别,而且共振状态下不同大小的激励引起的响应幅值也不同,对结构疲劳寿命的影响也不同。

综合以上因素,故提出多轴振动因子 F_{MV} 的表达式如下:

$$F_{MV} = \begin{cases} \dfrac{F_T^{0.5}}{(1-\log_2 w)^2}, 0 < w < 1 \\ [F_T(1+\log_2 w)]^{0.5}, w \geqslant 1 \end{cases} \quad (5)$$

其中:w 是第一阶共振频率处对应的加速度激励功率谱密度值。

多轴振动因子 F_{MV} 满足以下条件:

1)满足数学表达式的基本要求,即分母不为零,被开方数大于等于零;

2)关于自变量单调递增,即随着第一阶共振频率处对应的加速度激励功率谱密度值的增加,多轴振动因子 F_{MV} 也增大;

3)在 $w=1$ 处满足连续条件,在自变量的取值范围内处处连续。

随机振动下的多轴 S - N 曲线式中的材料常数 k_{mv} 可以通过 F_{MV} 线性插值单轴拉 - 压、扭转 S - N曲线的材料常数得到:

$$k_{mv} = k_{tor} + F_{MV}(k_{axi} - k_{tor}) \quad (6)$$

而随机振动下的多轴 S - N 曲线式中的材料常数 C_{mv} 可以通过 F_{MV} 在对数坐标下线性插值单轴拉 - 压、扭转 S - N 曲线的材料常数得到:

$$\log_2(C_{mv}) = \log_2(\sqrt[k_{tor}]{3}C_{tor}) + F_{MV}[\log_2(C_{axi}) - \log_2(\sqrt[k_{tor}]{3}C_{tor})] \quad (7)$$

其中:k_{mv} 和 C_{mv} 是多轴 S - N 曲线 $NS^{k_{mv}} = C_{mv}$ 的材料常数;k_{axi} 和 C_{axi},k_{tor} 和 C_{tor} 分别是单轴拉 - 压和扭转 S - N 曲线材料常数。从式(7)不难看出:随着参数 F_{MV} 的变化,可以得到不同的 k_{mv} 和 C_{mv},从而得到不同的多轴 S - N 曲线。

2 基于随机振动下多轴 S - N 曲线的疲劳寿命计算方法

利用等效 von - Mises 应力功率谱密度函数 $G(f)$ 可直接进行频域寿命计算,其中 $G(f)$ 的第 i 阶矩定义如下:

$$m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} f^i G(f)\,\mathrm{d}f \quad (8)$$

根据 Miner[23] 理论,结构的疲劳损伤为:

$$D = \sum D_i = \sum \frac{n_i}{N_i} \quad (9)$$

式中:n_i 表示第 i 级应力水平下的实际应力循环次数;N_i 表示应力幅值为 S_i 时 S - N 曲线下对应的寿命循环值。如果应力状态符合连续分布,则在时间 T 内,应力处在范围$(S_i, S_i + \Delta S_i)$ 内的应力循环次数为:

$$n_i = E(P)Tp(S_i)\Delta S_i \quad (10)$$

式中:$p(S_i)$ 为应力幅值的概率密度函数;$E(P)$ 为应力响应信号的峰值频率期望值,$E(P) = \sqrt{m_4/m_2}$。

则连续分布的应力状态下时间 T 内的振动疲劳损伤量为:

$$D_S = \int_0^\infty \frac{n(S)}{N(S)}\mathrm{d}S = \int_0^\infty \frac{E(P)Tp(S)}{N(S)}\mathrm{d}S \quad (11)$$

将随机振动下多轴疲劳寿命曲线公式 $NS^{k_{mv}} = C_{mv}$ 代入式(11),则连续分布的应力状态下时间 T 内的振动疲劳损伤量为:

$$D_S = \frac{E(P)T}{C_{mv}}\int_0^\infty S^{k_{mv}}p(S)\,\mathrm{d}S \quad (12)$$

由 Miner 线性累积损伤理论,当损伤值等于1时结构发生疲劳破坏,结构的疲劳寿命为:

$$T = \frac{C_{mv}}{E(P)\int_0^\infty S^{k_{mv}}p(S)\,\mathrm{d}S} \quad (13)$$

对于应力幅值概率密度函数 $p(S)$,Tovo-Benasciutti 提出的 T – B 雨流幅值分布模型计算较为准确,因此使用 T – B 模型进行计算。T – B 模型的表达式[11-13] 为:

$$p(S) = b\gamma \frac{S}{m_0}\exp\left(\frac{-S^2}{2m_0}\right) + (1-b)\frac{S}{\gamma^2 m_0}\exp\left(\frac{-S^2}{2\gamma^2 m_0}\right) \tag{14}$$

式中:γ 为不规则因子。γ 和参数 b 的表达式分别为:

$$\gamma = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} \tag{15}$$

$$b = \frac{1}{(\alpha_2 - 1)^2}(\alpha_1 - \alpha_2)[1.112 \times (1 + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2)\exp(2.11\alpha_2) + \alpha_1 - \alpha_2] \tag{16}$$

式中,α_1,α_2 满足

$$\alpha_i = \frac{m_i}{\sqrt{m_0 m_{2i}}} \tag{17}$$

3　试验验证

3.1　算例 1

7075 – T6 铝合金材料是一种高强度铝合金,主要用于制造飞机机翼部位的蒙皮和腹板等,而在一些新机试飞时,机翼部位的凸出物和空腔结构会很快发生振动疲劳,因此选用该材料进行验证具有很强的工程意义。文献[24]选用 7075 – T6 铝合金材料的缺口试件进行了随机振动试验,试件厚度为 2 mm,预制半径为 1 mm 的半圆形缺口,试件的几何尺寸、实物图及试件缺口形状详见文献[24],其中材料性能参数如表 1 所示。

表 1　7075 – T6 铝合金的材料参数

Tab. 1　Material parameters of 7075 – T6 aluminum alloy

E/GPa	σ_u/MPa	σ_y/MPa	v	ρ/(kg/m^3)
71	524	469	0.35	2 750

注:σ_u 为抗拉强度,σ_y 为屈服极限,v 为泊松比。

利用夹具将缺口试件一端固定在随机振动台上,在另一端通过添加配重改变试件的固有频率和疲劳破坏时间,配重块的数量通过多次预试验确定,配重块的材料为 Q235 钢。

采用基础激励的加载方式进行试验,激励的方向为样本平面的外法线方向,试验中加载频率范围为 14 ~ 141 Hz 平直谱,如图 2 所示,不改变带宽,通过改变加速度功率谱密度值改变振动量级。试验过程中通过动态应变仪记录试件固有频率的变化,将固有频率下降 10% 的时刻作为疲劳破坏的时间点。具体试验细节见文献[24]。

采用有限元计算程序 ANSYS 软件对试件进行有限元分析,按照试验中的固定方式对试件施加如图 2 所示的基础随机加速度功率谱激励,同时进行网格划分,网格划分结果如图 3 所示,共分成 7 137 个单元和 21 434 个节点,平均网格质量为 0.78。通过对有限元模型进行模态分析得到第一阶固有频率为 45.228 Hz,与试验结果 46.88 Hz相比相对误差为 3.5%,因此保证了有限元分析模型的正确性,同时通过有限元分析可知三轴因子 $F_T = 1.38$。

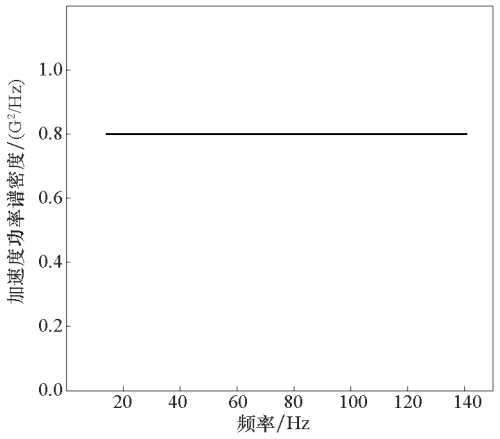


图 2　基础激励载荷谱

Fig. 2　Base excitation load spectrum

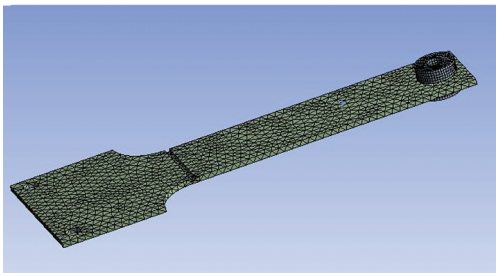


图 3　有限元网格划分

Fig. 3　Finite element mesh generation diagram

根据文献[24]可知:7075 – T6 铝合金的单轴 S – N 曲线的材料常数 $k_{axi} = 9.65$,$C_{axi} = 6.99 \times 10^{29}$;$k_{tor} = 9.65$,$C_{tor} = 4.36 \times 10^{26}$。根据式(6)、式(7)可得不同随机振动量级下 7075 – T6 的多轴S – N曲线的材料常数如表 2 所示。

利用有限元分析得到 von – Mises 的应力功率谱密度函数,同时结合表 2 中的不同随机振动量级下多轴 S – N 曲线的材料常数,对该试件在不同随机振动量级下的疲劳寿命进行预测,同时与传统等效 von – Mises 应力方法(即利用单轴拉 – 压 S – N 曲线)和文献[19]中所提的等效 Lematire 应力方法预测结果以及试验结果进行对

表 2 不同随机振动量级下多轴 S－N 曲线的材料常数

Tab. 2 Material constants of multi-axis S－N curves with different random vibration orders

加速度功率谱密度 w/(G²/Hz)	k_{mv}	C_{mv}
0.80	9.65	3.54×10^{29}
1.00	9.65	1.01×10^{30}
1.30	9.65	1.54×10^{30}
1.60	9.65	2.07×10^{30}
1.98	9.65	2.73×10^{30}

比，对比结果如图 4 所示。通过对多轴 S－N 曲线和单轴 S－N 曲线的预测结果进行对比可以看出，两种多轴 S－N 曲线的预测结果均优于单轴 S－N曲线的预测结果。显然，材料在随机振动条件下的多轴应力状态对疲劳寿命有重要影响。

同时通过对图 4 中两种不同的多轴 S－N 曲线的预测结果进行对比可以看出，由于考虑了共振的影响，因此利用由多轴振动因子插值得到的多轴 S－N 曲线进行预测的结果最好，而且与不同振动量级下的试验寿命相比，该方法的预测结果均有较高的预测精度。所以预测结构在随机振动下的疲劳寿命时应考虑共振因素。

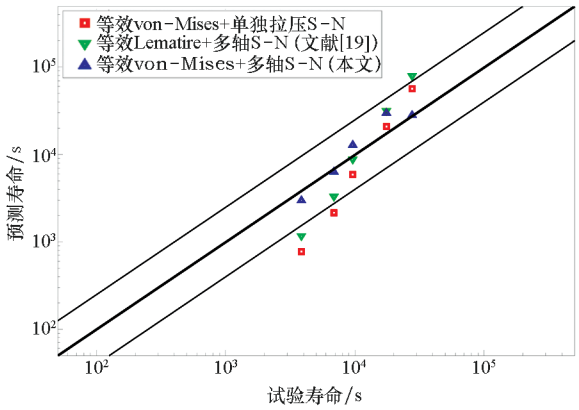
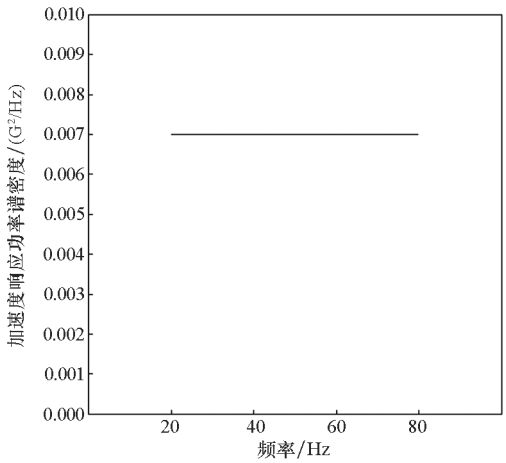


图 4 不同方法下的预测值与试验值比较

Fig. 4 Predictive and experimental values under different methods

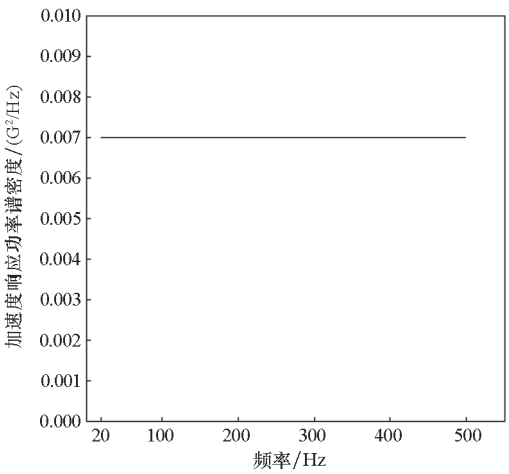
3.2 算例 2

以文献[4]中的 LY12CZ 铝合金 U 形缺口试件在随机振动下寿命预测为例，对本文方法做进一步验证。试件厚度为 2 mm，预制半径为 1 mm 的 U 形缺口，试验采用基础振动的加载方式，试验结构为悬臂梁结构，通过夹具将 U 形缺口试验件固定在激振器上，同时在试件的末端加上配重，配重块的材料为 A3 钢。试验中加载随机加速度功率谱如图 5(a)、图 5(b)所示，沿样本平面的外法线方向进行激励并记录疲劳破坏时间。



(a) 加速度功率谱密度函数 1

(a) Acceleration power spectral density function 1



(b) 加速度功率谱密度函数 2

(b) Acceleration power spectral density function 2

图 5 基础激励载荷谱

Fig. 5 Base excitation load spectrum

对试件进行有限元分析，试件有限元模型如图 6 所示，按照试验中的固定方式对试件固定约束并进行网格划分，共分成 45 053 个单元和 74 632个节点，平均网格质量为 0.82。通过对有限元模型进行模态分析得到第一阶固有频率为 54.13 Hz，与试验结果 54.20 Hz 相比相对误差为 0.01%；第二阶固有频率为 258.52 Hz，与试验结果 256.00 Hz 相比相对误差为 0.98%，因此保证了有限元分析模型的正确性。

基于本文提出的方法，采用与算例 1 类似的计算，可求得 LY12CZ 铝合金的单轴拉－压和扭转的 S－N 曲线的表达式分别为 $\lg N = 26.3 - 8.8\lg S$，$\lg N = 25.1 - 9.3\lg S$，多轴 S－N 曲线的表达式为 $NS^{9.3} = 2\times10^{27}$。分别利用多轴 S－N 曲

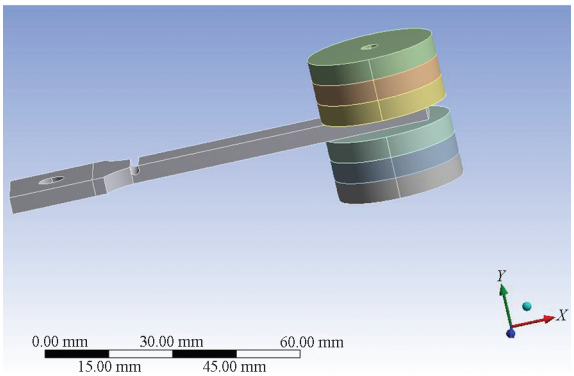


图 6　有限元模型

Fig. 6　Finite element model

线与单轴拉－压 S－N 曲线对该试件两种加载工况下的疲劳寿命进行预测，预测结果如表 3 所示。

表 3　两种工况下疲劳寿命预测结果

Tab. 3　Fatigue life prediction results under two working conditions

单位：min

工况	试验	单轴	多轴
功率谱密度函数 1	138	387	239
功率谱密度函数 2	106	384	237

从表 3 中不难看出，无论载荷谱是频率范围为 20 ~ 80 Hz（包含 1 阶固有频率）还是 20 ~ 500 Hz（包含 2 阶固有频率），本文所提多轴 S－N 曲线的预测结果较单轴 S－N 曲线更接近试验结果。

4　结论

本文通过综合单轴拉－压、扭转 S－N 曲线得到了随机振动下的多轴 S－N 曲线，从而提出了一种新的随机振动疲劳寿命预测方法来预测结构在随机振动作用下的疲劳寿命。新方法的有效性通过预测 7075－T6 铝合金圆形槽缺口试件和 LY12CZ 铝合金 U 形槽缺口试件的疲劳寿命得到了验证，同时可以得到如下结论：

结构在承受随机振动过程中多轴应力状态和共振对结构疲劳损伤的影响不容忽视，因此为了同时考虑这二者对疲劳寿命的影响，提出了多轴振动因子 F_{MV}，进而利用该参量综合考虑单轴拉－压和单轴扭转的疲劳 S－N 曲线，通过线性插值得到了随机振动下的多轴 S－N 曲线。

新提出的随机振动下的多轴 S－N 曲线不仅可以表征结构多轴应力状态下的疲劳，而且通过引入非线性函数考虑了结构振动过程中共振对疲劳寿命的影响，预测的疲劳寿命的精度明显优于传统的单轴拉压 S－N 曲线。同时从计算的观点来说，相较于文献[19]中的基于等效 Lematire 应力的多轴 S－N 曲线方法，本文提出的方法不仅提高了计算精度，而且更容易计算，便于工程使用。

参考文献（References）

[1] Crandall S H, MARK W D. Random vibration in mechanical systems[M]. 2nd ed. New York: Academic Press, 1963.

[2] 蒋培，张春华，陈循，等. 宽频带随机振动环境的疲劳强度强化机理[J]. 国防科技大学学报，2005，27(1)：26－29.
JIANG PEI, ZHANG Chunhua, CHEN XUN, et al. Fatigue enhancement mechanism of the broadband random vibration environment[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2005, 27(1): 26－29. (in Chinese)

[3] 姚起杭，姚军. 工程结构的振动疲劳问题[J]. 应用力学学报，2006，23(1)：12－15.
YAO Qihang, YAO Jun. Vibration fatigue of engineering structures[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2006, 23(1): 12－15. (in Chinese)

[4] 王明珠. 结构振动疲劳寿命分析方法研究[D]. 南京：南京航空航天大学，2009.
WANG Mingzhu. The fatigue life analysis of structure vibration[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2009. (in Chinese)

[5] 王锦丽，李玉龙，胡海涛，等. 加载频率对悬臂梁振动疲劳特性的影响[J]. 振动与冲击，2011，30(6)：243－247.
WANG Jinli, LI Yulong, HU Haitao, et al. Effect of load frequency on vibration fatigue behavior of cantilever beam[J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(6): 243－247. (in Chinese)

[6] SOCIE D F. Multiaxial fatigue damage models[J]. Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME, 1987, 109(4): 293－298.

[7] FATEMI A, SOCIE D F. A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading[J]. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 1988, 11(3): 149－165.

[8] SHANG D G, SUN G Q, DENG J, et al. Multiaxial fatigue damage parameter and life prediction for medium-carbon steel based on the critical plane approach[J]. International Journal of Fatigue, 2007, 29(12): 2200－2207.

[9] LI J, QIU Y Y, LI C W, et al. Prediction of fatigue life under multiaxial loading by using a critical plane-based model[J]. Archive of Applied Mechanics, 2018, 89(4): 629－637.

[10] ZHAO W, BAKER M J. On the probability density function of rainflow stress range for stationary Gaussian processes[J]. International Journal of Fatigue, 1992, 14(2): 121－135.

[11] BENASCIUTTI D, TOVO R. On fatigue damage assessment in bimodal random processes[J]. International Journal of Fatigue, 2007, 29(2): 232－244.

[12] BENASCIUTTI D, TOVO R. Spectral methods for lifetime prediction under wide-band stationary random processes[J]. International Journal of Fatigue, 2005, 27(8): 867－877.

[13] TOVO R. Cycle distribution and fatigue damage under broad-

band random loading[J]. International Journal of Fatigue, 2002, 24(11): 1137 – 1147.

[14] DIRLIK T. Application of computers in fatigue analysis[D]. UK: University of Warwick, 1985.

[15] PITOISET X, PREUMONT A. Spectral methods for multiaxial random fatigue analysis of metallic structures [J]. International Journal of Fatigue, 2000, 22(7): 541 – 550.

[16] NIESŁONY A. Comparison of some selected multiaxial fatigue failure criteria dedicated for spectral method[J]. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2010, 48 (1): 233 – 254.

[17] NIESŁONY A, RŮŽICKA M, PAPUGA J, et al. Fatigue life prediction for broad-band multiaxial loading with various PSD curve shapes[J]. International Journal of Fatigue, 2012, 44(6): 74 – 88.

[18] BENASCIUTTI D. Some analytical expressions to measure the accuracy of the "equivalent von Mises stress" in vibration multiaxial fatigue[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(18): 4326 – 4340.

[19] GE J R, SUN Y, ZHOU S. Fatigue life estimation under multiaxial random loading by means of the equivalent Lemaitre stress and multiaxial S – N curve methods[J]. International Journal of Fatigue, 2015, 79: 65 – 74.

[20] 肖寿庭, 杜修德. LY12CZ 铝合金悬臂梁动态疲劳 S – N 曲线的试验测定[J]. 机械强度, 1995, 17(1): 22 – 24.
XIAO Shouting, DU Xiude. Measukement of a dynamic fatigue S – N curve for LY12CZ AL alloy cantilever specimens[J]. Journal of Mechanical Strength, 1995, 17(1): 22 – 24. (in Chinese)

[21] MANSON S S, HALFORD G R. Multiaxial low cycle fatigue of type 304 stainless steel [J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 1977, 99: 283 – 285.

[22] 刘文光. 结构共振疲劳试验及裂纹构件的振动疲劳耦合分析[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2010.
LIU Wenguang. Structural resonance fatigue test and vibration fatigue coupling analysis of cracked components [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010. (in Chinese)

[23] MINER M. Cumulative damage in fatigue [J]. Journal Applied Mechanics, 1945, 12(3): 74 – 80.

[24] 葛静冉. 随机载荷下金属结构多轴疲劳寿命预测方法的研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015.
GE Jingran. The multiaxial fatigue life estimation of metal structures under random loading [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2015. (in Chinese)