doi:10.11887/j.cn.202103003 http://journal.nudt.edu.cn

超声速二元机翼随机混沌运动分析*

闫 盖[1,2],方明霞[2],杨英豪[3],沈海军[2]
(1. 上海第二工业大学 工学部,上海 201209;2. 同济大学 航空航天与力学学院,上海 200092;
3. 上海飞机设计研究院,上海 201210)

摘 要:以考虑随机扰动的超声速二元机翼为研究对象,采用Kapitaniak方法对超声速二元机翼的随机混沌特性进行研究。采用三阶活塞理论推导超声速二元机翼的非线性气动力和气动力矩,建立考虑随机扰动、具有俯仰立方非线性的机翼2自由度运动微分方程,并将其写成4维状态方程的形式;采用中心流形方法对系统进行降维,将系统状态方程从4维降为2维;再联合利用累积量截断法、非高斯截断法获得系统的二维联合概率密度函数及系统的概率时差图,采用Kapitaniak方法分析系统在不同扰动强度下的随机混沌特性;采用系统响应、庞加莱截面图及最大Lyapunov指数等对系统的随机混沌特性进行验证。本研究对超声速二元机翼在复杂环境下的稳定性、安全性及响应特性等研究具有重要的促进作用。

关键词:二元机翼;Kapitaniak方法;随机混沌;二维联合概率密度函数;最大Lyapunov指数
中图分类号:V215.3 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2021)03-023-09

Analysis of stochastic chaotic motion on supersonic two-dimensional airfoil

YAN Gai[1,2], *FANG Mingxia*[2], *YANG Yinghao*[3], *SHEN Haijun*[2]
(1. College of Engineering, Shanghai Polytechnic University, Shanghai 201209, China;
2. School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China;
3. Shanghai Aircraft Design & Research Institute, Shanghai 201210, China)

Abstract: The stochastic chaotic characteristics of supersonic two-dimensional airfoil were studied by Kapitaniak method. Nonlinear aerodynamics and aerodynamic moments of supersonic two-dimensional airfoil were deduced by the third-order piston theory. The 2 degree of freedom differential equation of motion of the airfoil with pitch cubic nonlinearity under stochastic disturbance was established and written in the form of 4-dimensional state equation. Then the system state equation was reduced to 2-dimensional by using the central manifold method. After that, the combination of the methods of cumulant neglect and non-Gauss truncated was used to obtain the two-dimensional probability density function and the probabilistic time-difference diagram of the system. Therefore, the Kapitaniak method was used to analyze the stochastic chaotic characteristics of the system under different disturbance intensities. Finally, the system response, Poincare cross-section diagram and the largest Lyapunov exponent were used to verify the stochastic chaotic characteristics of the system. The research is very important for the stability, safety and response characteristics of the supersonic two-dimensional airfoil in complex environment.

Keywords: two-dimensional airfoil; Kapitaniak method; stochastic chaotic; two-dimensional joint probability density function; largest Lyapunov exponent

气动弹性是飞行器设计中备受关注的重要问题,主要气动弹性现象有颤振、抖振、动力响应等[1-2]。其中,动力响应是指弹性系统受到与自身系统无关的、随时间任意变化的外界干扰力作用而发生的强迫振动,外界扰动可以是谐和的、周期的、脉冲的或随机的[3]。在航空动力学领域中,随机扰动普遍存在,它主要是由飞行器飞行过程中空气热力、风力和尾涡等随机因素相互作用形成的大气湍流引起的。从强度观点来看,飞机结构可能在严重的湍流中由于超载而遭破坏,中等大小的湍流则是飞机结构疲劳损伤的主要来源[4]。因此,结合气流扰动的机翼系统动力学特性研究能更好地反映实际工况。近年来,考虑外界扰动的机翼气动弹性问题正受到越来越多学者的关注。

* **收稿日期**:2019-11-01
基金项目:国家自然科学基金资助项目(1177229)
作者简介:闫盖(1985—),男,江苏徐州人,讲师,博士,E-mail:gysspu@163.com;
方明霞(通信作者),女,教授,博士,博士生导师,E-mail:mingxiafang@tongji.edu.cn

Poirel 和 Price[5-8] 研究了二元机翼在湍流随机扰动作用下的颤振问题，考虑了机翼结构线性和立方非线性情况，将湍流近似为高斯随机过程，从概率密度和最大 Lyapunov 指数分析了二元机翼的随机动力学行为，指出了随机激励下的颤振点较确定性系统颤振点提前，且与激励的强度密切相关。文献[9]采用能量随机平均法，求解 FPK(Fokker - planck - kolmogorov)方程，获得随机激励下的一元机翼分岔点，并分析了系统的随机 Hopf 分岔特性。文献[10]利用摄动法获得了二元机翼在非高斯色噪声作用下的 Lyapunov 指数，分析了二元机翼在随机激励下的稳定性。文献[11]采用随机平均法得到二元机翼在宽带噪声激励下的 Lyapunov 指数，探讨了随机噪声谱密度对机翼稳定性的影响。文献[12]采用随机减量法和矩阵束法识别紊流激励中的模态参数，提出了一种紊流激励下的颤振边界预测方法。可以看出，对随机激励下的机翼动力学特性研究主要集中在随机颤振预测、随机分岔特性研究中。

而对飞行器混沌运动问题的研究，目前主要针对考虑飞行器结构非线性的自治系统。如文献[13]采用伽辽金法对考虑几何非线性的长直机翼运动方程进行离散，通过数值方法分析了机翼的颤振及混沌运动特性。文献[14]研究分析飞行器操纵面的操纵刚度对混沌运动特性影响较小，而阻尼对系统的混沌特性影响较大。文献[15]采用数值模拟方法和预测程序，研究了不可压缩流中具有结构二次、三次非线性项的二元机翼系统分岔和混沌特性。可以看出，目前的研究多是从机翼非线性结构参数出发，研究系统的颤振、抖振问题，旨在提高系统的临界飞行速度、优化系统的结构参数、改善控制方法等。但从外在随机激励角度探讨二元机翼系统的复杂动力学特性较少，且采用解析方法对超声速二元机翼的随机混沌特性进行研究更为少见。为此，本文将从定性和定量角度出发，根据 Kapitaniak 对随机混沌的定义(即随机混沌过程必须满足两个条件：①概率密度函数具有多个最大值；②概率时差图具有康托集合结构)，提出一种半解析方法探讨随机激励下二元机翼的混沌运动特性。即通过联合使用累积量截断法、非高斯截断法获得系统的二维联合概率密度函数及系统的概率时差图，采用 Kapitaniak 方法分析系统在不同扰动强度下的随机混沌特性，并通过数值方法对分析结果进行验证。本文研究不仅可以分析随机激励下扰动强度、飞行器结构参数对系统混沌域的影响，还可以推广到其他随机非线性的大型复杂系统的动力学研究中，推动高维非线性系统动力学行为基础研究的发展。因此本文研究具有重要的理论和实际意义。

1　二元机翼随机非线性动力学方程

图 1 为单位展长二元机翼的力学模型。两个自由度分别为：机翼沉浮自由度 h 和机翼俯仰自由度 α，假设 h 向下为正，机翼俯仰角 α 顺时针为正。图 1 中：b 为半弦长，$\chi_\alpha b$ 为质心到弹性轴的距离，$\bar{a}b$ 为机翼半弦点到弹性轴的距离。

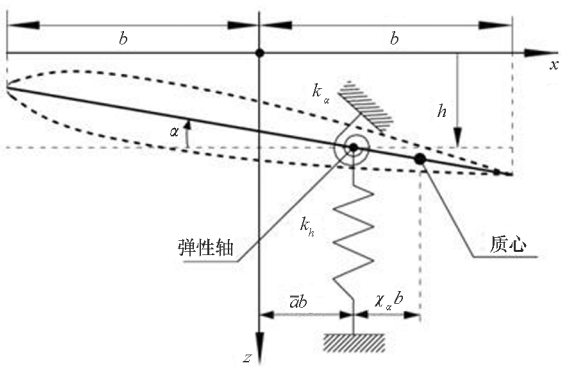


图 1　二元机翼模型

Fig. 1　Model of a two-dimensional airfoil

采用第二类拉氏方程获得受随机扰动的二元机翼动力学方程为：

$$\begin{cases} m\ddot{h} + m\chi_\alpha b\ddot{\alpha} + k_h h + c_h\dot{h} = -L(\alpha,h,t) + \sigma_h\xi_h(t) \\ m\chi_\alpha b\ddot{h} + m\gamma_\alpha^2\ddot{\alpha} + k_{\alpha1}\alpha + k_{\alpha2}\alpha^3 + c_\alpha\dot{\alpha} \\ = M(\alpha,h,t) + \sigma_\alpha\xi_\alpha(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中：m 为机翼质量，k_h、c_h 为弹性轴上 h 方向的刚度、阻尼系数，$k_{\alpha1}$、$k_{\alpha2}$ 是弹性轴上 α 方向的刚度、阻尼系数，$\gamma_\alpha = \gamma b$ 是机翼对刚心的回转半径，$L(\alpha,h,t)$、$M(\alpha,h,t)$ 是气动力和气动力矩的大小，$\xi_h(t)$ 和 $\xi_\alpha(t)$ 是随机扰动，σ_h 和 σ_α 分别为对应的扰动强度。显然，γ 及图 1 中的 χ_α、$\bar{a}$ 皆为无量纲量。

文献[16 - 17]研究表明，在飞行马赫数为 2 ~ 5 时，活塞理论比较适合机翼气动力计算。为此本文采用三阶活塞理论给出了机翼非线性气动力和气动力矩：

$$L(\alpha,h,t) = 4c_\infty\rho b\eta A + \frac{\rho(\gamma_0+1)\eta^3}{3c_\infty}bA(\dot{\alpha}^2b^2 + A^2) \tag{2}$$

$$M(\alpha,h,t) = -4c_\infty\rho\eta b^2\left(\frac{b}{3}\dot{\alpha} - \bar{a}A\right) - \frac{\rho(\gamma_0+1)\eta^3}{3c_\infty}\cdot$$

$$\left[\frac{\dot{\alpha}^3}{5}b+(3\dot{\alpha}A^2-3\bar{a}b\dot{\alpha}^2A)\frac{b^3}{3}-\bar{a}bA^3b\right] \tag{3}$$

其中:$A=\dot{h}-\bar{a}b\dot{\alpha}+V\alpha$;$c_\infty$ 是未经扰动的音速;V 是气流速度,$V=Ma\cdot c_\infty$(Ma 为马赫数);γ_0 为比热比;ρ 为空气密度;η 为修正系数。

令 $\boldsymbol{X}=[\alpha,\dot{\alpha},h,\dot{h}]^{\mathrm{T}}$,于是方程(1)可化为四维状态方程,即

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}+\boldsymbol{f}(\alpha,\dot{\alpha},h,\dot{h},t) \tag{4}$$

其中,$\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\m_{21}&m_{22}&m_{23}&m_{24}\\0&0&0&1\\m_{41}&m_{42}&m_{43}&m_{44}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{f}(\alpha,\dot{\alpha},h,\dot{h},t)$ 是非线性项。

$\boldsymbol{A}_0$ 矩阵中各元素表达式如下:

$$m_{21}=\frac{1}{mb^2(\chi_\alpha^2-\gamma^2)}(-4c_\infty\rho\eta b^2\bar{a}V+k_{\alpha1}-4\chi_\alpha c_\infty\rho\eta b^2V)$$

$$m_{22}=\frac{1}{mb^2(\chi_\alpha^2-\gamma^2)}\cdot\left(-\frac{4}{3}c_\infty\rho\eta b^3+4c_\infty\rho\eta b^3\bar{a}^2+4\chi_\alpha c_\infty\rho\eta b^3\bar{a}+c_\alpha\right)$$

$$m_{23}=\frac{-\chi_\alpha k_h}{mb(\chi_\alpha^2-\gamma^2)}$$

$$m_{24}=\frac{1}{mb^2(\chi_\alpha^2-\gamma^2)}(-4c_\infty\rho\eta b^2\bar{a}-4\chi_\alpha c_\infty\rho\eta b^2-\chi_\alpha bc_h)$$

$$m_{41}=\frac{1}{mb(\chi_\alpha^2-\gamma^2)}(4c_\infty\rho\eta b^2V\gamma^2+4\chi_\alpha c_\infty\rho\eta b^2\bar{a}V-\chi_\alpha k_{\alpha1})$$

$$m_{42}=\frac{1}{mb(\chi_\alpha^2-\gamma^2)}\cdot\left(-\frac{4}{3}\chi_\alpha c_\infty\rho\eta b^3-4\chi_\alpha c_\infty\rho\eta b^3\bar{a}^2-4c_\infty\rho\eta b^3\bar{a}\gamma^2-\chi_\alpha c_\alpha\right)$$

$$m_{43}=\frac{k_h\gamma^2}{m(\chi_\alpha^2-\gamma^2)}$$

$$m_{44}=\frac{1}{mb(\chi_\alpha^2-\gamma^2)}(4\chi_\alpha c_\infty\rho\eta b^2\bar{a}+4c_\infty\rho\eta b^2\gamma^2+\gamma^2bc_h)$$

$$\boldsymbol{f}(\alpha,\dot{\alpha},h,\dot{h},t)=\begin{bmatrix}0\\(\chi_\alpha S_2-b\gamma^2S_1)/[mb(\chi_\alpha^2-\gamma^2)]\\0\\(-S_2+\chi_\alpha bS_1)/[mb^2(\chi_\alpha^2-\gamma^2)]\end{bmatrix}$$

其中

$$S_1=-F_h+\sigma_h\xi_h(t)$$

$$S_2=-k_{\alpha2}\alpha^3-F_\alpha+\sigma_\alpha\xi_\alpha(t)$$

$$F_h=\frac{\rho(\gamma_0+1)\eta^3}{3c_\infty}bA(\dot{\alpha}^2b^2+A^2)$$

$$F_\alpha=\frac{\rho(\gamma_0+1)\eta^3}{3c_\infty}\left[\frac{b}{5}\dot{\alpha}^3+(3\dot{\alpha}A^2-3\bar{a}b\dot{\alpha}^2A)\frac{b^3}{3}-\bar{a}b^2A^3\right]$$

2　采用中心流形方法对系统进行降维

由于方程(4)为 4 维非线性动力学方程,直接对其动力学特性进行研究比较困难,为此首先采用中心流形方法对系统进行降维。由于中心流形定理仅适用于自治系统,因此首先要对随机激励进行变换,本文采用 Monte Carlo 法将功率谱密度函数变换成多项余弦函数叠加的形式,并通过扩大向量将非自治系统转换为自治系统。

通过 Routh-Hurwitz 判据得到:$Ma<3.985$ 时,系统稳定,响应收敛到平衡点;$3.985<Ma<4.086$ 时,系统的解收敛到稳定极限环,并且极限环的幅值随着速度增大而增大;$Ma>4.086$ 时,系统发散,因此,$Ma^*=3.985$ 为系统 Hopf 分岔点。

取 $\mu=Ma-Ma^*$($Ma^*=3.985$)为分岔参数,给定系统参数,引入非奇异变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{py}$,其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$,$p$ 为相对应于系统中零平衡点的 Jacobi 矩阵的第 1 项实部、第 2 项实部和虚部以及第 4 项实部构成的方阵,代入方程后系统化成

$$\dot{\boldsymbol{y}}=B_1\boldsymbol{y}+\mu B_2\boldsymbol{y}+f(\boldsymbol{y}) \tag{5}$$

根据中心流形定理,得到中心流形函数

$$\begin{cases}y_3=h_1(y_1,y_2,\mu)=0.592\ 277y_1\mu-0.039\ 594y_2\mu+o(3)\\y_4=h_1(y_1,y_2,\mu)=0.083\ 817y_1\mu+0.034\ 629y_2\mu+o(3)\end{cases} \tag{6}$$

$o(3)$表示三阶以上的高阶小量,忽略此量,可得到约化方程(7),其中 Δ_1、Δ_2 是经过变换的随机激励。

$$\begin{cases}\dot{y}_1=-63.722\ 171y_2+6.236\ 123y_1\mu-8.214\ 423y_2\mu+0.559\ 227y_1^3-1.278\ 341y_2^3-2.209\ 925y_1^2y_2+2.911\ 072y_1y_2^2-0.376\ 673y_1\mu^2+1.140\ 028y_2\mu^2+\Delta_1\\\dot{y}_2=63.722\ 171y_1-11.680\ 584y_1\mu+15.386\ 050y_2\mu+7.371\ 352y_1^3-16.847\ 145y_2^3-29.129\ 241y_1^2y_2+38.369\ 874y_1y_2^2+0.705\ 528y_1\mu^2-2.135\ 332y_2\mu^2+\Delta_2\end{cases} \tag{7}$$

3　二维联合概率密度函数求解

根据 Kapitaniak 对随机混沌特性的定义:二维联合概率密度分布具有多峰且概率时差图具有典型的康托集合结构时,系统具有随机混沌特性。为此首先对系统的二维联合概率密度函数进行分析。由于方程(7)为非线性方程,故本文联合利用累积量截断法、非高斯截断法对系统的二维联合概率密度函数进行求解。方程(7)的伊藤随机

微分方程形式如下：

$$\begin{cases} \mathrm{d}y_1 = -63.722\,171y_2\mathrm{d}t + 6.236\,123y_1\mathrm{d}t\mu - \\ \quad 8.214\,423y_2\mathrm{d}t\mu + 0.559\,227y_1^3\mathrm{d}t - 1.278\,341y_2^3\mathrm{d}t - \\ \quad 2.209\,925y_1^2y_2\mathrm{d}t + 2.911\,072y_1y_2^2\mathrm{d}t - \\ \quad 0.376\,673y_1\mathrm{d}t\mu^2 + 1.140\,028y_2\mathrm{d}t\mu^2 + D_1 \\ \mathrm{d}y_2 = 63.722\,171y_1\mathrm{d}t - 11.680\,584y_1\mathrm{d}t\mu + \\ \quad 15.386\,050y_2\mathrm{d}t\mu + 7.371\,352y_1^3\mathrm{d}t - 16.847\,145y_2^3\mathrm{d}t - \\ \quad 29.129\,241y_1^2y_2\mathrm{d}t + 38.369\,874y_1y_2^2\mathrm{d}t + \\ \quad 0.705\,528y_1\mathrm{d}t\mu^2 - 2.135\,332y_2\mathrm{d}t\mu^2 + D_2 \end{cases} \tag{8}$$

式中，D_1、D_1 为随机激励强度。

由式(8)得到相应的 FPK 方程，求得矩方程表达式为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}E(h) = & E\left[f_1(y_1,y_2,\mu)\frac{\partial}{\partial y_1}E(h)\right] + \\ & E\left[f_2(y_1,y_2,\mu)\frac{\partial}{\partial y_2}E(h)\right] + \\ & E\left[\sigma^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}E(h) + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}E(h)\right)\right] \end{aligned} \tag{9}$$

将 h 用 $y_1^m y_2^n$(m,n 为常数)代替，可以求得各阶矩方程。由于高次非线性项的存在，使得矩方程的右边出现了高阶矩，矩方程不封闭。为此本文首先采用累积量截断法将高阶矩写成低阶矩的函数，然后代入矩方程进行求解。通过非高斯截断法获得各阶矩后，通过 Edgeworth 展式求得二维非高斯联合概率密度函数。Edgeworth 展式如式(10)所示：

$$\begin{aligned} p^*(y_1,y_2) = & p(y_1,y_2)\sum_{k=0}^{\infty}H_k\left(\frac{y_1}{\sigma_1}\right)H_k\left(\frac{y_2}{\sigma_2}\right) + \\ & \sum_{j+l=3}\frac{1}{j!l!}\frac{k_{jl}}{\sigma_1^j\sigma_2^l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}H_{k+j}\left(\frac{y_1}{\sigma_1}\right)H_{k+l}\left(\frac{y_2}{\sigma_2}\right) + \\ & \sum_{j+l=4}\frac{1}{j!l!}\frac{k_{jl}}{\sigma_1^j\sigma_2^l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}H_{k+j}\left(\frac{y_1}{\sigma_1}\right)H_{k+l}\left(\frac{y_2}{\sigma_2}\right) + \\ & \sum_{\substack{j+l=3\\ r+s=4}}\frac{1}{j!l!r!s!}\frac{k_{jl}}{\sigma_1^j\sigma_2^l}\frac{k_{rs}}{\sigma_1^r\sigma_2^s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}H_{k+j+r}\left(\frac{y_1}{\sigma_1}\right)H_{k+l+s}\left(\frac{y_2}{\sigma_2}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

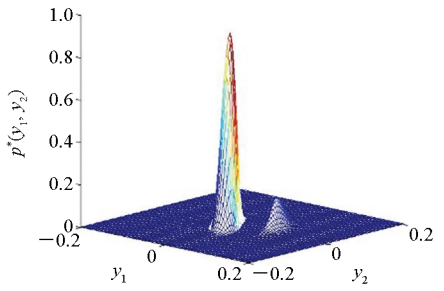
式中：$p(y_1,y_2) = \dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{y_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\dfrac{y_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$ 为二维高斯概率密度；$\rho = k_{11}/\sigma_1\sigma_2$ 为相关系数；k_{ij} 为各阶累积量函数；σ_{y_1}，σ_{y_2} 为标准差。埃尔米特多项式 $H_k(z)$ 循环关系如式(11)所示：

$$\begin{cases} H_0(z) = 1 \\ H_1(z) = z \\ H_{n+1}(z) = zH_n(z) - nH_{n-1}(z),\ n = 2,3,\cdots \end{cases} \tag{11}$$

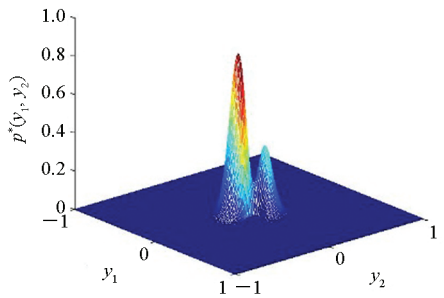
4 二元机翼随机混沌特性分析

现通过二维联合概率密度函数曲线、概率时差图对二元机翼的随机动力学特性进行研究。由于机翼俯仰自由度的振动幅值比沉浮自由度的振动幅值大，故本文主要研究俯仰角 - 俯仰角速度的概率密度曲线。现将系统发生颤振时的来流马赫数 $Ma = 3.985$ 作为分界线，以此将系统划分为颤振前区、颤振后区，并研究来流马赫数分别为 $Ma = 3$、$Ma = 5$ 时系统颤振前区和颤振后区的动力学特性。

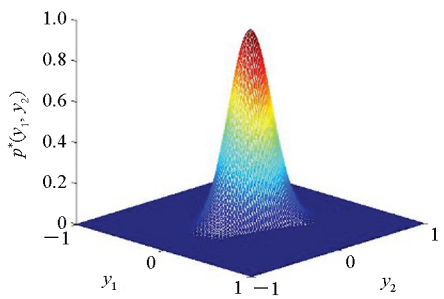
根据第 3 节求解二维概率密度函数的方法，获得系统颤振前区和颤振后区在随机扰动作用下的概率密度函数。随机扰动强度根据文献[17]添加，即弱随机扰动取值 0.01，一般随机扰动取值 0.1，强随机扰动取值 0.5。图 2 是在颤振前区 $Ma = 3$ 时，在随机扰动强度分别为 0.01、0.1 和



(a) $D = 0.01$



(b) $D = 0.1$

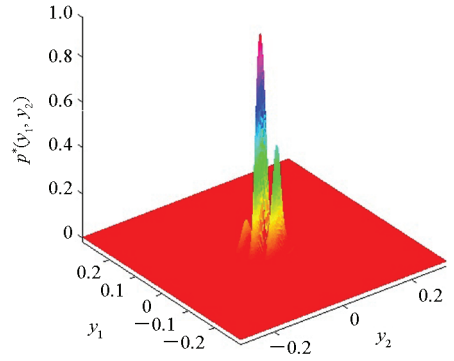


(c) $D = 0.5$

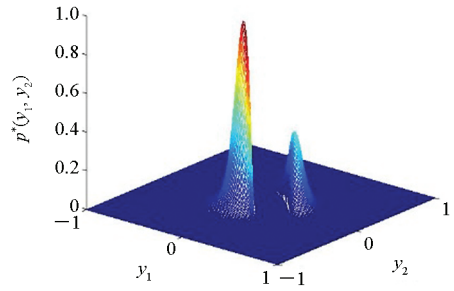
图 2 不同随机扰动强度下的二维概率密度图($Ma = 3$)

Fig. 2 Two-dimensional probability density diagram with various disturbance intensities($Ma = 3$)

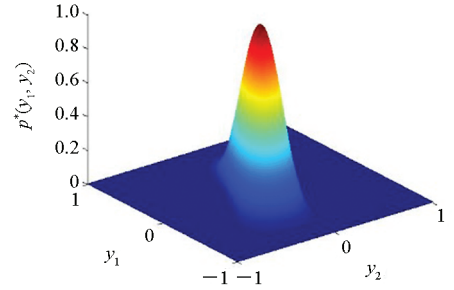
0.5 时系统的二维概率密度分布图;图 3 是在颤振后区 $Ma=5$ 时不同随机扰动强度下的二维概率密度分布图。



(a) $D=0.01$



(b) $D=0.1$



(c) $D=0.5$

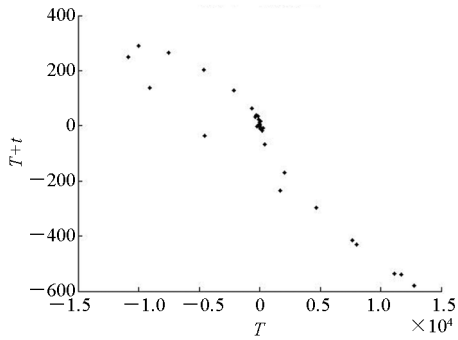
图 3　不同随机扰动强度下的二维概率密度图($Ma=5$)

Fig. 3　Two-dimensional probability density diagram with various disturbance intensities($Ma=5$)

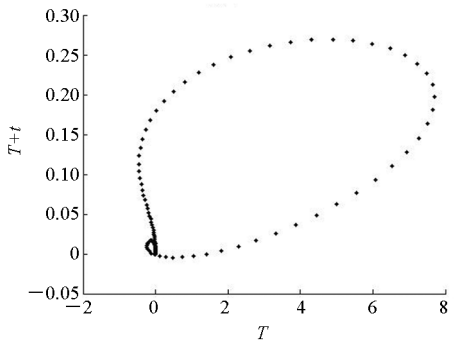
从图 2、图 3 可以看出:二维概率密度在颤振前区时,形状在弱随机扰动下为分离双峰,一般随机扰动下为相邻双峰,强随机扰动下变为单峰;在颤振后区时,形状在弱随机扰动下为多峰,一般随机扰动下变为双峰,强随机扰动下变为单峰。并且在颤振前区和颤振后区的二维联合概率密度形状在弱随机扰动下不同,而在强随机扰动下形状相似,由此可知系统拓扑结构发生了质变,系统发生了 P 分岔。

根据概率密度的多峰状态,为了判断系统在弱随机扰动、一般随机扰动下是否进入了混沌运动状态,现绘制概率时差图对系统的动力学特性进行进一步分析,因为二元机翼在一定来流马赫数下,受一定强度的随机激励影响发生分岔、进入混沌运动状态时间非常短,因此绘制概率时差图的时延也较小,本文选取 0.01 s。图 4 为颤振前区,在弱随机扰动、一般随机扰动下的概率时差图;图 5 为颤振后区,在弱随机扰动、一般随机扰动下的概率时差图。

从图 4、图 5 可以发现,在颤振前区和颤振后区,系统受弱随机扰动强度和一般随机扰动强度下,概率时差图均出现了典型的康托集合效应,即在某一位置附近出现频率明显高于其他位置。结合其二维概率密度呈现多峰形状,因此系统发生了 Kapitaniak 定义下的随机混沌。



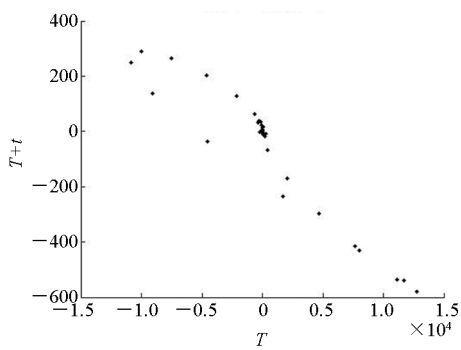
(a) $D=0.01$



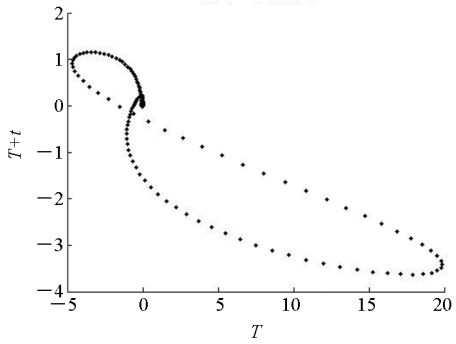
(b) $D=0.1$

图 4　不同扰动强度下颤振前区的概率时差图($Ma=3$)

Fig. 4　Probability time difference diagrams with various disturbance intensities($Ma=3$)



(a) $D=0.01$



(b) $D=0.1$

图 5　不同扰动强度下颤振后区的概率时差图($Ma=5$)

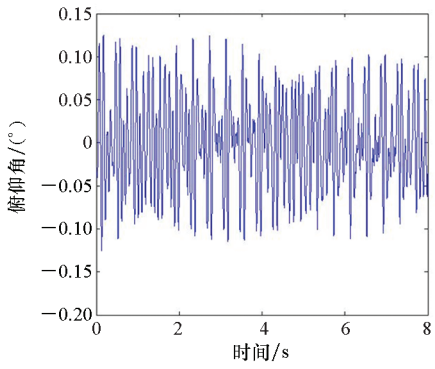
Fig. 5　Probability time difference diagrams with various disturbance intensities($Ma=5$)

由于强随机扰动下二维联合概率密度函数为单峰,根据 Kapitaniak 定义,此时系统不会发生 Kapitaniak 定义下的随机混沌。

综上可得,不管在颤振前区还是颤振后区,受外部随机激励的影响系统动态特性都会发生突变、发生分岔,甚至进入混沌运动状态。但也会在一定随机扰动强度下从混沌运动状态突变回周期运动。因此,在进行二元机翼气动弹性特性研究时,要考虑不同飞行环境状态的影响,避免系统发生复杂动力学行为。

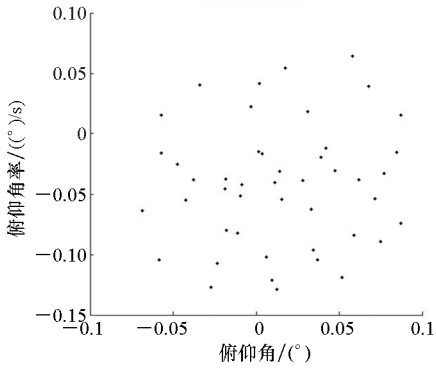
5　数值计算验证

为了验证分析结果的有效性,现采用数值方法对分析结果进行验证。首先采用 Monte Carlo 模拟法对随机激励进行模拟,然后利用与前文一致的参数取值,在 MATLAB 平台上对状态方程(4)进行数值求解。不同工况下系统的时域响应曲线、庞加莱截面图如图 6、图 7 所示,系统的最大 Lyapunov 指数随来流马赫数 Ma 的变化曲线,如图 8 所示。



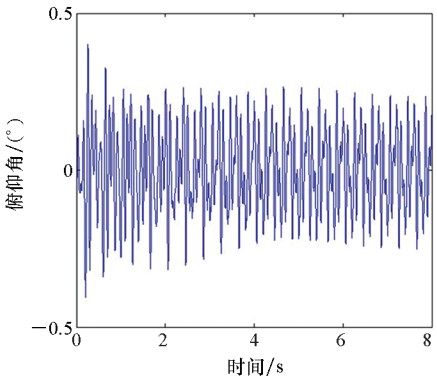
(a) 俯仰角时程曲线($D=0.01$)

(a) Time history curve of pitch angle($D=0.01$)



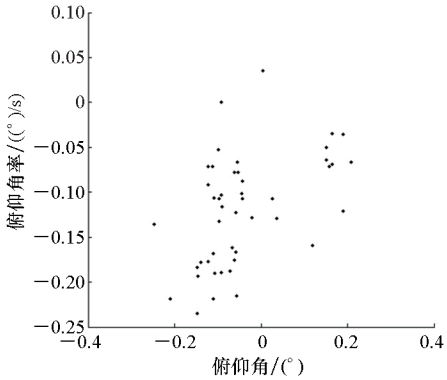
(b) 庞加莱截面($D=0.01$)

(b) Poincare section($D=0.01$)



(c) 俯仰角时程曲线($D=0.1$)

(c) Time history curve of pitch angle($D=0.1$)

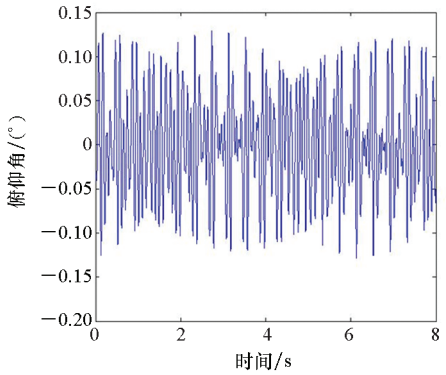


(d) 庞加莱截面($D=0.1$)

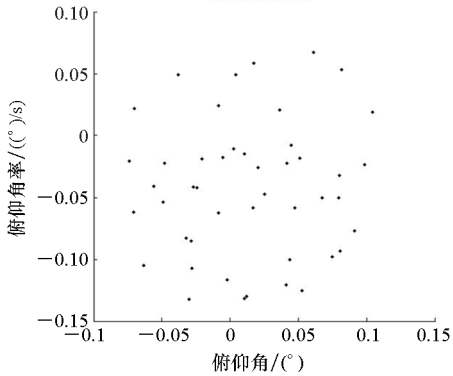
(d) Poincare section($D=0.1$)

图 6　不同扰动强度下颤振前区的系统响应曲线及庞加莱截面($Ma=3$)

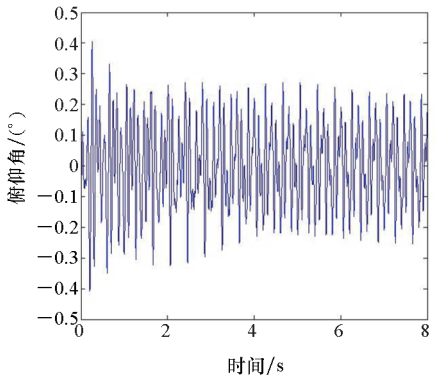
Fig. 6　Response of the system with various disturbance intensities and Poincare section($Ma=3$)



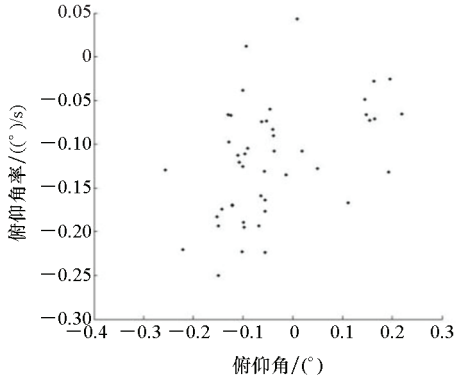
(a) 俯仰角时程曲线($D=0.01$)
(a) Time history curve of pitch angle($D=0.01$)



(b) 庞加莱截面($D=0.01$)
(b) Poincare section($D=0.01$)



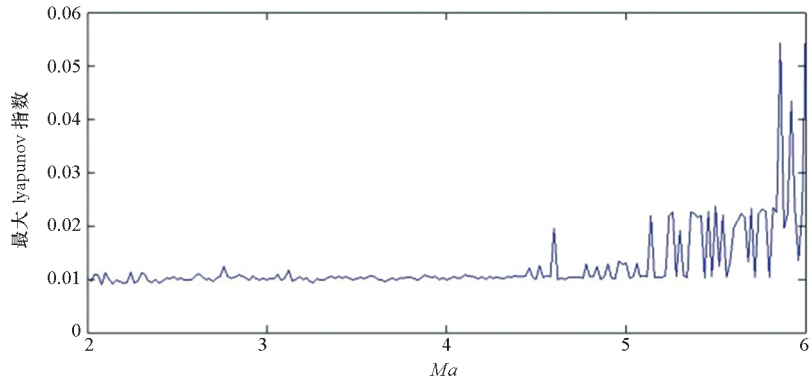
(c) 俯仰角时程曲线($D=0.1$)
(c) Time history curve of pitch angle($D=0.1$)



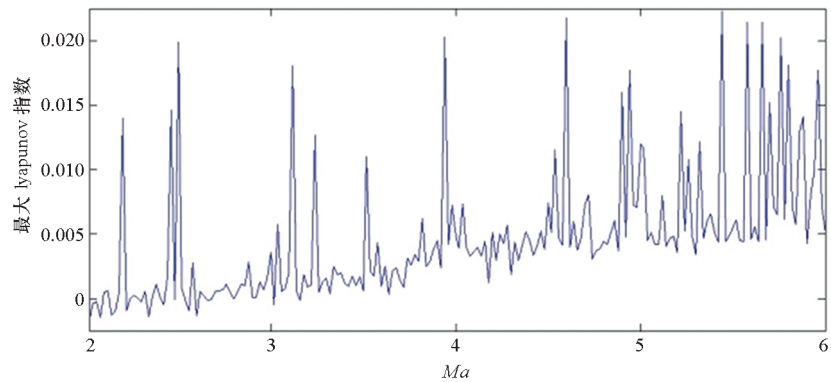
(d) 庞加莱截面($D=0.1$)
(d) Poincare section($D=0.1$)

图 7　不同扰动强度下颤振后区的系统响应曲线及庞加莱截面($Ma=5$)

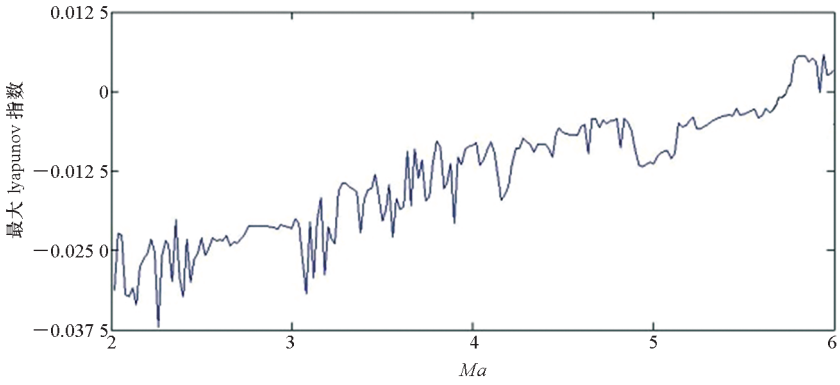
Fig. 7　Response of the system with various disturbance intensities and Poincare section($Ma=5$)



(a) $D=0.01$



(b) $D=0.1$



(c) $D=0.5$

图8 最大 lyapunov 指数变化曲线图

Fig. 8 The largest lyapunov exponent changes with *Ma*

从图6~8可以看出,在弱随机扰动、一般随机扰动强度作用下,无论是颤振前区还是颤振后区,系统的俯仰角随时间均呈无规律变化,同时庞加莱截面由分形结构的大量散点组成,且系统在 $Ma=3$、$Ma=5$ 时最大 Lyapunov 指数均为正值,说明系统进入了混沌运动状态;而在随机扰动强度为 0.5 时,系统在 $Ma=3$、$Ma=5$ 时最大 Lyapunov 指数均为负值,说明系统未进入混沌运动状态,验证了前文中 Kapitaniak 定义下的随机混沌分析结果,说明了本文近似解析定性分析方法的准确性和有效性。

6 结论

本文通过累积量截断法、非高斯截断法及 Edgeworth 展式等获得系统的联合概率密度函数,在 Kapitaniak 定义下研究了二元机翼的随机混沌特性,并通过数值方法对计算结果进行验证。主要研究结果如下:

1)采用第二类拉氏方程建立二元机翼随机非线性动力学方程,并通过三阶活塞理论推导二元机翼的非线性气动力和气动力矩。通过中心流形定理对系统进行降维,将2自由度下4维非线性系统的动力学方程成功降为2维,使系统的随机非线性动力学特性研究得到简化。

2)采用累积量截断法和非高斯截断法获得系统二维联合概率密度函数,利用 Kapitaniak 定义判断系统的随机混沌特性。研究发现,当随机扰动强度为0.01和0.1时,系统在颤振前区和颤振后区均进入了混沌运动状态;在随机扰动强度为0.5时,系统没有进入混沌运动状态。这说明外部随机扰动对系统具有很大影响。因此,在二元机翼气动弹性特性控制时,必须充分考虑外部随机激励强度的影响,以增加系统的稳定性和安全性。

3)通过时域响应曲线、庞加莱截面图和最大 Lyapunov 指数等数值方法对计算结果进行验证,两种具有较好的一致性,说明本文研究具有较高的研究精度。

参考文献(References)

[1] 杨超, 许赟, 谢长川. 高超声速飞行器气动弹性力学研究综述[J]. 航空学报, 2010, 31(1): 1-11.
YANG Chao, XU Yun, XIE Changchuan. Review of studies on aeroelasticity of hypersonic vehicles[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2010, 31(1): 1-11. (in Chinese)

[2] 胡海岩, 赵永辉, 黄锐. 飞机结构气动弹性分析与控制研究[J]. 力学学报, 2016, 48(1): 1-27.
HU Haiyan, ZHAO Yonghui, HUANG Rui. Studies on aeroelastic analysis and control of aircraft structures[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, 48(1): 1-27. (in Chinese)

[3] 赵永辉. 气动弹性力学与控制[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 1-10.
ZHAO Yonghui. Aeroelasticity and control[M]. Beijing: Science Press, 2007: 1-10. (in Chinese)

[4] 郑国勇, 鲁丽, 杨翊仁. 大气紊流作用下超音速二元机翼的脉动响应[J]. 振动与冲击, 2009, 28(4): 110-112.
ZHENG Guoyong, LU Li, YANG Yiren. Pulsation response of a two dimensional wing to atmosphere turbulence in supersonic flow[J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(4): 110-112. (in Chinese)

[5] POIREL D, PRICE S J. Structurally nonlinear fluttering airfoil in turbulent flow[J]. AIAA Journal, 2001, 39(10): 1960-1968.

[6] POIREL D, PRICE S J. Response probability structure of a structurally nonlinear fluttering airfoil in turbulent flow[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2003, 18(2): 185-202.

[7] POIREL D, PRICE S J. Random binary (coalescence) flutter of a two dimensional linear airfoil[J]. Journal of Fluids and Structures, 2003, 18(1): 23-42.

[8] POIREL D, PRICE S J. Bifurcation characteristics of a two

dimensional structurally nonlinear airfoil in turbulent flow[J]. Nonlinear Dynamics, 2007, 48(4): 423 – 435.

[9] 王洪礼, 许佳, 葛根. 机翼颤振的随机 Hopf 分岔研究[J]. 机械强度, 2008, 30(3): 368 – 370.
WANG Hongli, XU Jia, GE Gen. Research of stochastic Hopf bifurcation on airfoil flutter[J]. Journal of Mechanical Strength, 2008, 30(3): 368 – 370. (in Chinese)

[10] HU D L, HUANG Y, LIU X B. Moment Lyapunov exponent and stochastic stability of binary airfoil driven by non-Gaussian colored noise[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 70(3): 1847 – 1859.

[11] 黄勇, 刘先斌. 受宽带噪声激励的二元机翼随机振动系统的矩 Lyapunov 指数[J]. 空气动力学学报, 2012, 30(2): 137 – 144, 156.
HUANG Yong, LIU Xianbin. On the moment Lyapunov exponent of a binary airfoil subjected to the excitation of wide band noises[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2012, 30(2): 137 – 144, 156. (in Chinese)

[12] 李扬, 周丽, 杨秉才. 紊流激励条件下基于随机减量法的颤振边界预测研究[J]. 工程力学, 2017, 34(6): 9 – 16.
LI Yang, ZHOU Li, YANG Bingcai. Flutter boundary prediction of turbulence excitation response based on random decrement method[J]. Engineering Mechanics, 2017, 34(6): 9 – 16. (in Chinese)

[13] 肖艳平, 杨翊仁, 鲁丽. 长直机翼的颤振及混沌运动分析[J]. 飞行力学, 2015, 33(6): 510 – 513.
XIAO Yanping, YANG Yiren, LU Li. Analysis of flutter and chaos of long straight wing[J]. Flight Dynamics, 2015, 33(6): 510 – 513. (in Chinese)

[14] 张惠, 杨智春, 张新平, 等. 结构参数对机翼非线性颤振系统混沌运动特性的影响[J]. 振动与冲击, 2013, 32(12): 174 – 178, 184.
ZHANG Hui, YANG Zhichun, ZHANG Xinping, et al. Effects of structural parameters on chaotic motion behavior of nonlinear flutter for a two dimensional wing[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(12): 174 – 178, 184. (in Chinese)

[15] CAI M, LIU W F, LIU J K. Bifurcation and chaos of airfoil with multiple strong nonlinearities[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2013, 34(5): 627 – 636.

[16] 张伟伟, 樊则文, 叶正寅, 等. 超音速、高超音速机翼的气动弹性计算方法[J]. 西北工业大学学报, 2003, 21(6): 687 – 691.
ZHANG Weiwei, FAN Zewen, YE Zhengyin, et al. A better engineering method for computing aeroelastic characteristics of supersonic and hypersonic wings[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2003, 21(6): 687 – 691. (in Chinese)

[17] 赵德敏, 张琪昌, 王炜. 具有间隙非线性的二元机翼的随机分岔和功率谱分析[J]. 振动与冲击, 2009, 28(6): 86 – 89.
ZHAO Demin, ZHANG Qichang, WANG Wei. Random bifurcation and power spectrum analysis of a 2-dof airfoil with freeplay nonlinearity in pitch[J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(6): 86 – 89. (in Chinese)