doi:10.11887/j.cn.202106002 http://journal.nudt.edu.cn

黏弹性基体中挠曲电 Timoshenko 纳米梁振动特性分析*

张大鹏,吴 栋,雷勇军
(国防科技大学 空天科学学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:以黏弹性基体中的 Timoshenko 纳米梁为研究对象,综合考虑非局部效应、压电效应和挠曲电效应的影响,基于哈密顿原理建立了系统的振动控制方程和相应的边界条件,给出了两端简支边界条件下挠曲电纳米梁控制方程的求解方法,系统地研究了非局部参数、挠曲电系数以及黏弹性基体对挠曲电纳米梁振动特性的影响规律。结果表明:横向挠曲电系数能显著增加挠曲电纳米梁的结构刚度,而非局部效应和切向挠曲电系数则会降低系统的结构刚度。此外,通过研究黏弹性基体的影响规律,可得到挠曲电纳米梁不再发生往复振动时对应的黏弹性基体临界阻尼系数。相关研究结果可为挠曲电纳米梁在俘能器中的推广应用提供理论基础。

关键词:非局部理论;Timoshenko 梁模型;挠曲电效应;黏弹性基体
中图分类号:O345 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2021)06-008-09

Vibration characteristics analysis of flexoelectric Timoshenko nano-beam in viscoelastic medium

ZHANG Dapeng, WU Dong, LEI Yongjun
(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Based on the Hamiltonian principle and taking nonlocal effect, piezoelectric effect and flexoelectric effect into consideration, the vibration governing equation and boundary conditions of the Timoshenko nano-beam in the viscoelastic medium were established, and the method of solving the governing equation of flexoelectric nano-beam with simply supported boundary conditions was adopted. The effects of nonlocal parameters, flexoelectric effect and viscoelastic medium on the vibration characteristics of the flexoelectric nano-beam were systematically studied. The results show that the transverse flexoelectric coefficient can significantly increase the structural stiffness of the flexoelectric nano-beam, while the nonlocal parameters and the tangential flexoelectric coefficient can reduce the structural stiffness of the system. In addition, the critical damping coefficient of the viscoelastic medium, in which the flexoelectric nanobeam no longer reciprocating vibration, can be obtained by studying the effects of viscoelastic medium. Research results can provide a theoretical basis for the extension and application of flexoelectric nano-beam in energy harvester.

Keywords: nonlocal theory; Timoshenko beam model; flexoelectric effect; viscoelastic medium

压电俘能器[1]能收集环境中因振动产生的机械能并转换为可供纳米元件使用的电能,具有能量密度高和工作模式简单[2]等特性,在为纳米元件供电方面具有极大的应用潜力。挠曲电效应的研究是设计、分析和应用压电俘能器所涉及的基础性问题,针对挠曲电效应开展研究具有重要的工程意义和理论价值。

挠曲电效应考虑非均匀应变场与电场之间的耦合关系,认为非均匀应变介质材料的电极化强度受电场、应变和应变梯度的影响。研究压电纳米元件力学行为的主要方法有实验测量法、分子动力学模拟法和连续介质力学理论法。Ma 等[3-4]通过实验测得了镁铌酸盐陶瓷、钛酸锶钡陶瓷等材料具有较强的挠曲电效应,远高于早期的预测值。Ma 等[5-7]还通过实验研究了应变梯度和温度对锆钛酸铅陶瓷和钛酸钡材料的挠曲电系数的影响。Hu 等[8]基于变分原理,综合考虑静电力、应变梯度和极化梯度,建立了纳米介质的控制方程。Maranganti 等[9]开创性地将格林函数法用于求解挠曲电问题,该方法成为求解挠曲电问题的基本方法。实验方法和分子动力学模拟结果均表明,压电纳米元件的力学性能在纳米尺度

* **收稿日期**:2020-06-22
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11902348);湖南省自然科学基金资助项目(2020JJ5650);国防科技大学科研计划资助项目(ZK20-27)
作者简介:张大鹏(1989—),男,河南新乡人,副教授,博士,硕士生导师,E-mail:zhangdapenghit@126.com;
雷勇军(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:leijy108@nudt.edu.cn

下具有明显的尺度效应[10-11],经典连续介质力学因忽略了材料的尺度效应而难以准确表达压电纳米元件的力学特性[12]。非局部理论[13]的提出弥补了连续介质力学在尺度效应方面的不足,在描述纳米材料的力学行为方面得到广泛应用。有学者认为,为了更准确地预测压电纳米元件的力学性能,有必要将非局部理论与应变梯度理论相结合[14-16]。Lei 等[17-18]分别研究了外加黏弹性阻尼下非局部 Timoshenko 纳米梁和非局部 Euler-Bernoulli 梁的动力学特性。杨帆[19]考虑非局部效应,研究了表面效应对压电 Euler-Bernoulli 纳米梁弯曲变形的影响。Yan 等[20]考虑压电纳米材料的非局部效应,研究了表面应力、表面弹性和表面压电效应对 Euler-Bernoulli 梁屈曲行为和动力学特性的影响。此外,Yan 等[21]还基于非局部 Timoshenko 梁模型,得到非均匀边界条件下压电纳米梁的振动控制方程和谐振频率的显式表达式。实际工程中的纳米元件多置于黏弹性材料制成的基体中,其等效力学模型为黏弹性基体中的梁、板等元件的分析模型,而目前综合考虑尺度效应、挠曲电效应和基体黏弹性等因素的研究还相对较少。

本文基于非局部 Timoshenko 梁模型,研究挠曲电纳米梁在黏弹性基体中的振动特性,给出简支边界条件下挠曲电纳米梁控制方程的求解方法,并通过算例对非局部参数、挠曲电系数和黏弹性基体等因素对挠曲电纳米梁振动特性的影响进行分析,为压电纳米元件的设计、分析和应用提供理论依据。

1　振动控制方程与边界条件

黏弹性基体中的挠曲电 Timoshenko 纳米梁的力学模型如图 1 所示。以挠曲电纳米梁的中轴线左端点为坐标原点建立直角坐标系 $o-xz$,其中 x 轴沿挠曲电纳米梁中轴线指向右端,z 轴沿挠曲电纳米梁的横向振动方向与 x 轴正交。挠曲电纳米梁的长度、宽度和高度分别为 L、b 和 h。黏弹性基体采用经典的 visco-Pasternak 黏弹性基体模型[22]模拟,该模型在 Pasternak 弹性基体模型的基础上考虑了黏性阻尼的影响。基于 Majdoub 等[23-24]对压电纳米结构的研究,在压电材料连续介质理论的基础上考虑纳米材料的尺度效应和极化与应变梯度的耦合,忽略了高阶极化梯度的影响。

考虑非局部效应时,由内能密度导出的本构方程为:

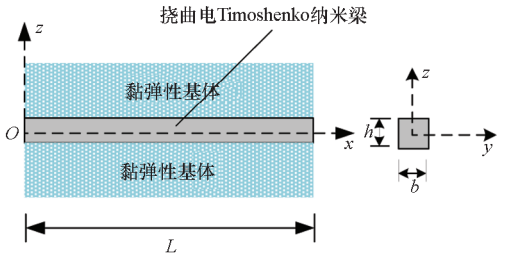


图 1　黏弹性基体中的挠曲电 Timoshenko 纳米梁

Fig. 1　Flexoelectric Timoshenko nano-beam in viscoelastic medium

$$[1-(e_0a)^2\nabla^2]\boldsymbol{\sigma}_{ij}=\boldsymbol{c}_{ijkl}\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}+\boldsymbol{d}_{ijk}\boldsymbol{P}_k \tag{1}$$

$$[1-(e_0a)^2\nabla^2]\boldsymbol{\tau}_{ijk}=\boldsymbol{f}_{ijkl}\boldsymbol{P}_l \tag{2}$$

$$\boldsymbol{E}_i=\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{P}_j+\boldsymbol{d}_{jki}\boldsymbol{\varepsilon}_{jk}+\boldsymbol{f}_{jkli}\boldsymbol{\varepsilon}_{jk,l} \tag{3}$$

其中,e_0a 和 $\boldsymbol{a}_{ij}$ 分别表示非局部参数和介电常数倒数;$\boldsymbol{\sigma}_{ij}$、$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{\tau}_{ijk}$ 分别表示非局部应力张量、经典应变张量和非局部高阶应力张量;$\boldsymbol{P}_k$ 和 $\boldsymbol{E}_i$ 分别表示极化张量和电场张量;$\boldsymbol{c}_{ijkl}$、$\boldsymbol{d}_{ijk}$ 和 $\boldsymbol{f}_{ijkl}$ 分别表示与挠曲电纳米梁材料相关的弹性系数、压电系数和挠曲电系数;$\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ 为 Laplace 算子。

假设压电材料的极化方向与 z 轴平行,为了简化问题,只考虑电场的 z 向分量,则电场可表示为:

$$E_z=-\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial z} \tag{4}$$

挠曲电纳米 Timoshenko 梁的位移场可表示为:

$$\begin{cases}u=-z\varphi(x,t)\\ w=w(x,t)\end{cases} \tag{5}$$

其中,u 和 w 分别表示位移沿 x 轴和 z 轴的分量,φ 为挠曲电纳米梁横截面相对于 y 轴的扭转角。

应变和应变梯度的非零分量可表示为:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_{xx}=-z\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xx,z}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\\ \boldsymbol{\gamma}_{xz}=-\varphi+\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ \boldsymbol{\gamma}_{xz,x}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\end{cases} \tag{6}$$

非局部应力张量、非局部高阶应力张量和电场的非零分量可表示为:

$$[1-(e_0a)^2\nabla^2]\boldsymbol{\sigma}_{xx}=c_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_{xx}+d_{31}P_z \tag{7}$$

$$[1-(e_0a)^2\nabla^2]\boldsymbol{\sigma}_{xz}=kc_{44}\boldsymbol{\gamma}_{xz} \tag{8}$$

$$[1-(e_0a)^2\nabla^2]\boldsymbol{\tau}_{xxz}=f_{3113}P_z \tag{9}$$

$$[1-(e_0a)^2\nabla^2]\boldsymbol{\tau}_{xzx}=f_{3131}P_z \tag{10}$$

$$E_z = a_{33}P_z + d_{31}\varepsilon_{xx} + f_{3113}\varepsilon_{xx,z} + f_{3131}\gamma_{xz,x} \tag{11}$$

其中，k 为 Timoshenko 梁的剪切修正系数，对于矩形截面梁，有 $k = 5/6$。

假设挠曲电纳米梁内部没有自由电势，由高斯定理可得：

$$\varepsilon_0 E_{z,z} + P_{z,z} = 0 \tag{12}$$

其中，$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ C/(V · m) 为真空或空气的介电常数。

电势的边界条件可表示为：

$$\begin{cases} \Phi\left(-\dfrac{h}{2}\right) = 0 \\ \Phi\left(\dfrac{h}{2}\right) = V \end{cases} \tag{13}$$

其中，V 是施加在挠曲电纳米梁的电压。

将式(4)和式(6)代入式(12)并综合考虑式(11)和式(13)，得到电势和极化强度沿 z 轴的分量 Φ_z 和 P_z 的表达式分别为：

$$\Phi_z = \frac{d_{31}}{1+\varepsilon_0 a_{33}}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{V}{h}z + \frac{V}{2} \tag{14}$$

$$P_z = \frac{\varepsilon_0 d_{31}}{1+\varepsilon_0 a_{33}} z\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{f_{3113}}{a_{33}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{f_{3131}}{a_{33}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \frac{V}{a_{33}h} \tag{15}$$

非局部应力和非局部高阶应力关于扭转角 φ 和挠度 w 的表达式为：

$$[1-(e_0 a)^2\nabla^2]\sigma_{xx} = \frac{d_{31}f_{3113}}{a_{33}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{d_{31}V}{a_{33}h} + \frac{d_{31}f_{3131}}{a_{33}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\varepsilon_0 d_{31}^2}{1+\varepsilon_0 a_{33}} - c_{11}\right) z\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{16}$$

$$[1-(e_0 a)^2\nabla^2]\sigma_{xz} = kc_{44}\left(-\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{17}$$

$$[1-(e_0 a)^2\nabla^2]\tau_{xxz} = \frac{\varepsilon_0 d_{31}f_{3113}}{1+\varepsilon_0 a_{33}} z\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{f_{3131}f_{3113}}{a_{33}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{f_{3113}^2}{a_{33}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{f_{3113}V}{a_{33}h} \tag{18}$$

$$[1-(e_0 a)^2\nabla^2]\tau_{xzx} = \frac{\varepsilon_0 d_{31}f_{3131}}{1+\varepsilon_0 a_{33}} z\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{f_{3113}f_{3131}}{a_{33}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{f_{3131}V}{a_{33}h} + \frac{f_{3131}^2}{a_{33}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{19}$$

外力对挠曲电纳米梁所做的虚功 δW 可表示为：

$$\int_0^t \delta W \mathrm{d}t\mathrm{d}V = \int_0^t (\bar{N}\delta w + \bar{M}\delta\varphi)\Big|_0^L \mathrm{d}t - \int_0^t\int_0^L bN_Q\delta w \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{20}$$

式中：$\bar{N}$ 和 $\bar{M}$ 分别为挠曲电纳米梁所受的横向力和弯矩；N_Q 为黏弹性基体对挠曲电纳米梁的作用力，对于 visco-Pasternak 黏弹性基体模型，其表达式[22]为：

$$[1-(e_0 a)^2\nabla^2]N_Q = k_w w - k_G\nabla^2 w + c_t\frac{\partial w}{\partial t} \tag{21}$$

式中，k_G、k_w 和 c_t 分别为黏弹性基体的剪切弹性模量、Winkler 弹性模量和阻尼系数。

挠曲电纳米梁的动能 Π_k 可表示为：

$$\Pi_k = \int_V \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}V \tag{22}$$

其中，ρ 为挠曲电纳米梁的质量密度。

挠曲电纳米梁的应变能 U 可表示为：

$$U = \frac{1}{2}\int_V (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + \tau_{ijk}\varepsilon_{ij,k})\mathrm{d}V \tag{23}$$

式(23)变分可得：

$$\begin{aligned}\int_0^t \delta U\mathrm{d}t &= \int_0^t\int_V (\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{xz}\delta\gamma_{xz})\mathrm{d}V\mathrm{d}t + \int_0^t\int_V (\tau_{xxz}\delta\varepsilon_{xx,z} + \tau_{xzx}\delta\gamma_{xz,x})\mathrm{d}V\mathrm{d}t \\ &= \int_0^t\int_0^L\left(\frac{\partial M}{\partial x} - Q + \frac{\partial M^\gamma}{\partial x}\right)\delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^t\int_0^L\left(\frac{\partial^2 M^\gamma}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \\ &\quad \int_0^t -(M + M^\gamma)|_0^L\delta\varphi\mathrm{d}t + \int_0^t\left[\left(Q - \frac{\partial M^\gamma}{\partial x}\right)\delta w + M^\gamma\frac{\partial\delta w}{\partial x}\right]\Big|_0^L\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{24}$$

其中，挠曲电纳米梁单位长度的弯矩 M、剪切力 Q 和扭矩 M^γ 的表达式分别为：

$$\begin{cases} M = \int_A (\sigma_{xx}z + \tau_{xxz})\mathrm{d}A \\ Q = \int_A \sigma_{xz}\mathrm{d}A \\ M^\gamma = \int_A \tau_{xzx}\mathrm{d}A \end{cases} \tag{25}$$

其中，A 为挠曲电纳米梁的横截面积。

根据哈密顿原理得到：

$$\int_0^t (\delta W + \delta\Pi_k - \delta U)\mathrm{d}t = 0 \tag{26}$$

将式(20)、式(22)和式(24)代入式(26)，并考虑到 δw 和 $\delta\varphi$ 在 $x \in [0, L]$ 的任意性，得到黏弹性基体中挠曲电 Timoshenko 纳米梁的控制方程表达式：

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 M^\gamma}{\partial x^2} - bN_Q = \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{27}$$

$$Q - \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial M^\gamma}{\partial x} = \rho I\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{28}$$

同时得到黏弹性基体中挠曲电 Timoshenko 纳米梁的边界条件表达式：

$$\varphi = 0 \text{ 或 } M + M^\gamma = -\bar{M} \tag{29}$$

$$w=0 \text{ 或 } Q-\frac{\partial M^{\gamma}}{\partial x}=\bar{N} \tag{30}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0 \text{ 或 } M^{\gamma}=0 \tag{31}$$

将弯矩 M、剪切力 Q 和扭矩 M^{γ} 的表达式(25)代入挠曲电纳米梁的控制方程中,可得挠曲电纳米梁控制方程的具体表达式:

$$\begin{aligned}&\frac{f_{3131}^2}{a_{33}}h\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-kc_{44}h\frac{\partial\varphi}{\partial x}+kc_{44}h\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\\&[1-(e_0a)^2\nabla^2]\left(k_w w-k_G\nabla^2 w+c_t\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\\&\left(\frac{f_{3113}f_{3131}}{a_{33}}+\frac{f_{3131}^2}{a_{33}}\right)h\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}\\&=[1-(e_0a)^2\nabla^2]\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{f_{3131}f_{3113}}{a_{33}}+\frac{f_{3131}^2}{a_{33}}\right)h\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+kc_{44}h\frac{\partial w}{\partial x}-\\&kc_{44}h\varphi-\left(\frac{\varepsilon_0 d_{31}^2}{1+\varepsilon_0 a_{33}}-c_{11}\right)\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\\&\frac{(f_{3131}+f_{3113})^2}{a_{33}}h\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\\&=[1-(e_0a)^2\nabla^2]\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{33}$$

同样地,挠曲电纳米梁边界条件可具体表示为:

$$\begin{aligned}&\varphi=0 \text{ 或 } -\left(\frac{f_{3131}^2}{a_{33}}+\frac{f_{3131}f_{3113}}{a_{33}}\right)A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\\&\left[\left(\frac{\varepsilon_0 d_{31}^2}{1+\varepsilon_0 a_{33}}-c_{11}\right)I+\frac{A(f_{3113}+f_{3131})^2}{a_{33}}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\\&\frac{AV}{a_{33}h}(f_{3113}+f_{3131})=-\bar{M}[1-(e_0a)^2\nabla^2]\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}&w=0 \text{ 或 } A\frac{f_{3131}^2}{a_{33}}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+Akc_{44}\frac{\partial w}{\partial x}-\\&A\left(\frac{f_{3113}f_{3131}}{a_{33}}+\frac{f_{3131}^2}{a_{33}}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\\&Akc_{44}\varphi=[1-(e_0a)^2\nabla^2]\bar{N}\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial w}{\partial x}=0 \text{ 或}\left(\frac{f_{3113}f_{3131}}{a_{33}}+\frac{f_{3131}^2}{a_{33}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\\&\frac{f_{3131}V}{a_{33}h}-\frac{f_{3131}^2}{a_{33}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\end{aligned} \tag{36}$$

为了便于计算和分析,引入以下无量纲参数:

$$\bar{x}=\frac{x}{L},\bar{w}=\frac{w}{L},\alpha=\frac{e_0a}{L},\bar{c}_{11}=c_{11}L,\bar{c}_{44}=c_{44}L,\eta=\frac{h}{L},$$

$$\bar{k}_w=\frac{k_w L^2}{\bar{c}_{44}},\bar{k}_G=\frac{k_G}{\bar{c}_{44}},\tau=\frac{t}{L}\sqrt{\frac{\bar{c}_{44}}{\rho L}},\bar{c}_t=\frac{c_t L}{\sqrt{\rho\bar{c}_{44}L}}。$$

将以上无量纲参数代入式(32)和式(33),可得挠曲电纳米梁控制方程的无量纲形式,其表达式为:

$$\begin{aligned}&E_1\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\bar{x}^4}+E_2\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}-E_3\frac{\partial^3\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}^3}-E_2\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}-\\&\left(1-\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}\right)\left(\bar{k}_w\bar{w}-\bar{k}_G\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}+\bar{c}_t\frac{\partial\bar{w}}{\partial\tau}\right)\\&=\left(1-\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}\right)\eta\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\tau^2}\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}&E_3\frac{\partial^3\bar{w}}{\partial\bar{x}^3}+E_2\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}-E_4\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}^2}-E_2\bar{\varphi}\\&=\left(1-\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}\right)\frac{\eta^3}{12}\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\tau^2}\end{aligned} \tag{38}$$

其中:

$$\begin{cases}E_1=\dfrac{f_{3131}^2\eta}{a_{33}\bar{c}_{44}L}\\E_2=k\eta\\E_3=\left(\dfrac{f_{3113}f_{3131}}{a_{33}\bar{c}_{44}L}+\dfrac{f_{3113}^2}{\bar{c}_{44}a_{33}L}\right)\eta\\E_4=\left[\dfrac{\varepsilon_0 d_{31}^2 L}{\bar{c}_{44}(1+\varepsilon_0 a_{33})}-\dfrac{\bar{c}_{11}}{\bar{c}_{44}}\right]\dfrac{\eta^3}{12}+\dfrac{(f_{3131}+f_{3113})^2\eta}{\bar{c}_{44}a_{33}L}\end{cases} \tag{39}$$

对于自由振动问题,施加电压 V、剪力 $\bar{N}$ 和弯矩 $\bar{M}$ 均为零,可得自由振动状态下挠曲电纳米梁边界条件的无量纲形式,其表达式为:

$$E_1\frac{\partial^3\bar{w}}{\partial\bar{x}^3}+E_2\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}-E_3\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}^2}-E_2\bar{\varphi}=0 \text{ 或 } \bar{w}=0 \tag{40}$$

$$E_4\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}-E_3\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}=0 \text{ 或 } \bar{\varphi}=0 \tag{41}$$

$$E_3\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}-E_1\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}=0 \text{ 或 } \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}=0 \tag{42}$$

2　振动控制方程求解

本节给出简支边界条件下挠曲电纳米梁控制方程的求解方法。设挠曲电纳米梁的无量纲控制方程式(37)和(38)的解形式为:

$$\begin{cases}\bar{w}(\bar{x},\tau)=\bar{W}(\bar{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega\tau}\\\bar{\varphi}(\bar{x},\tau)=\bar{\Phi}(\bar{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega\tau}\end{cases} \tag{43}$$

其中:$\bar{W}(\bar{x})$ 和 $\bar{\Phi}(\bar{x})$ 为相应的振型;i 为虚数单位且有 $\mathrm{i}^2=-1$;Ω 为挠曲电纳米梁的无量纲固有频率,与有量纲的固有频率 ω 的转换关系为:

$$\Omega=\omega L\sqrt{\frac{\rho L}{\bar{c}_{44}}} \tag{44}$$

将式(43)代入式(37)和式(38),可将挠曲电纳米梁的无量纲控制方程表示为:

$$\begin{aligned}&(E_1-\bar{k}_G\alpha^2)\frac{\mathrm{d}^4\bar{W}}{\mathrm{d}\bar{x}^4}-E_3\frac{\mathrm{d}^3\bar{\Phi}}{\mathrm{d}\bar{x}^3}+(E_2+\bar{k}_G+\bar{k}_w\alpha^2)\frac{\mathrm{d}^2\bar{W}}{\mathrm{d}\bar{x}^2}+\\&(\mathrm{i}\bar{c}_t\alpha^2\Omega-\eta\Omega^2\alpha^2)\frac{\mathrm{d}^2\bar{W}}{\mathrm{d}\bar{x}^2}+(\Omega^2\eta-\mathrm{i}\bar{c}_t\Omega-\bar{k}_w)\bar{W}-\\&E_2\frac{\mathrm{d}\bar{\Phi}}{\mathrm{d}\bar{x}}=0\end{aligned} \tag{45}$$

$$E_3\frac{\mathrm{d}^3\overline{W}}{\mathrm{d}\bar{x}^3}+E_2\frac{\mathrm{d}\overline{W}}{\mathrm{d}\bar{x}}+\left(\frac{\eta^3\Omega^2}{12}-E_2\right)\overline{\Phi}-\left(E_4+\frac{\eta^3\alpha^2\Omega^2}{12}\right)\frac{\mathrm{d}^2\overline{\Phi}}{\mathrm{d}\bar{x}^2}=0 \tag{46}$$

同样地,挠曲电纳米梁的无量纲边界条件式(40)~(42)可表示为:

$$E_1\frac{\mathrm{d}^3\overline{W}}{\mathrm{d}\bar{x}^3}+E_2\frac{\mathrm{d}\overline{W}}{\mathrm{d}\bar{x}}-E_3\frac{\mathrm{d}^2\overline{\Phi}}{\mathrm{d}\bar{x}^2}-E_2\overline{\Phi}=0 \text{ 或 } \overline{W}=0 \tag{47}$$

$$-E_3\frac{\mathrm{d}^2\overline{W}}{\mathrm{d}\bar{x}^2}+E_4\frac{\mathrm{d}\overline{\Phi}}{\mathrm{d}\bar{x}}=0 \text{ 或 } \overline{\Phi}=0 \tag{48}$$

$$E_3\frac{\mathrm{d}\overline{\Phi}}{\mathrm{d}\bar{x}}-E_1\frac{\mathrm{d}^2\overline{W}}{\mathrm{d}\bar{x}^2}=0 \text{ 或} \frac{\mathrm{d}\overline{W}}{\mathrm{d}\bar{x}}=0 \tag{49}$$

设简支边界条件下挠曲电纳米梁的振型 $\overline{W}(\bar{x})$ 和 $\overline{\Phi}(\bar{x})$ 的表达式为:

$$\begin{cases}\overline{W}(\bar{x})=\overline{W}_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\bar{x}}\\ \overline{\Phi}(\bar{x})=\overline{\Phi}_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\bar{x}}\end{cases} \tag{50}$$

将式(50)代入式(45)和式(46),挠曲电纳米梁的控制方程可表示为:

$$(E_2+\bar{k}_{\mathrm{w}}\alpha^2+\bar{k}_{\mathrm{G}}+\mathrm{i}\bar{c}_t\alpha^2\Omega-\eta\Omega^2\alpha^2)\beta^2\overline{W}_n+(E_1-\bar{k}_{\mathrm{G}}\alpha^2)\beta^4\overline{W}_n-\mathrm{i}(E_3\beta^3-E_2\beta)\overline{\Phi}_n+(\Omega^2\eta-\mathrm{i}\bar{c}_t\Omega-\bar{k}_{\mathrm{w}})\overline{W}_n=0 \tag{51}$$

$$\left[\beta^2\left(E_4+\Omega^2\alpha^2\frac{\eta^3}{12}\right)-\left(E_2-\frac{\eta^3}{12}\Omega^2\right)\right]\overline{\Phi}_n+\mathrm{i}(E_3\beta^3-E_2\beta)\overline{W}_n=0 \tag{52}$$

$\overline{W}_n$ 和 $\overline{\Phi}_n$ 的非零解可以通过令变量矩阵的行列式(即特征方程)为零得到,即

$$a_1\Omega^4+\mathrm{i}a_2\Omega^3+a_3\Omega^2+\mathrm{i}a_4\Omega+a_5=0 \tag{53}$$

其中:

$$a_1=\frac{\eta^4}{12}(1+\alpha^2\beta^2)^2 \tag{54}$$

$$a_2=-\frac{\eta^3}{12}\bar{c}_t(1+\alpha^2\beta^2)^2 \tag{55}$$

$$a_3=\eta(1+\alpha^2\beta^2)(E_4\beta^2-E_2)+\frac{\beta^2\eta^3}{12}(1+\alpha^2\beta^2)(E_1\beta^2-E_2)-(1+\alpha^2\beta^2)^2(\bar{k}_{\mathrm{w}}+\bar{k}_{\mathrm{G}}\beta^2) \tag{56}$$

$$a_4=-\bar{c}_t(1+\alpha^2\beta^2)(E_4\beta^2-E_2) \tag{57}$$

$$a_5=-(E_4\beta^2-E_2)(\bar{k}_{\mathrm{w}}+\bar{k}_{\mathrm{G}}\beta^2)(1+\alpha^2\beta^2)+\beta^2(E_4\beta^2-E_2)(E_1\beta^2-E_2)+(E_3\beta^3-E_2\beta)(E_2\beta-E_3\beta^3) \tag{58}$$

通过数值方法求解式(53),即可得到挠曲电纳米梁的无量纲固有频率。需要说明的是,对于式(40)~(42)给出的其他类型边界条件下挠曲电纳米梁振动特性分析问题,可以采用文献[16-18]等常使用的分布参数系统的传递函数方法较方便地得到问题的解。

3　算例分析

首先通过与文献计算结果进行对比,验证所建模型和控制方程求解方法的正确性。在此基础上,系统地研究非局部效应、挠曲电系数和黏弹性基体对挠曲电纳米梁振动特性的影响规律。如无特殊说明,挠曲电纳米梁的参数设置[25-27]如下:挠曲电纳米梁的长度 L、高度 h 和宽度 b 分别为 20 nm、2 nm 和 2 nm,挠曲电纳米梁材料的弹性模量 c_{11} 和 c_{14} 分别为 131 GPa 和 42.9 GPa,横向挠曲电系数 f_{3113} 和切向挠曲电系数 f_{3131} 分别为 5 V 和 4 V,质量密度 ρ、介电常数倒数 a_{33} 和压电系数 d_{31} 分别为 6 020 kg/m^3、0.79 × 10^8 (V · m)/C 和 1.87 × 10^8 V/m, visco-Pasternak 黏弹性基体的 Winkler 弹性模量 k_w、剪切模量 k_G 和阻尼系数 c_t 分别为 0.1 GPa/nm、0.25 GPa/nm 和 0.1 MPa · ns/nm。

3.1　模型验证

文献[25]针对具有表面效应和挠曲电效应的 Timoshenko 梁开展研究,利用变分原理和 Hamilton 原理,得到压电纳米梁的控制方程和边界条件,分别求解简支均匀载荷下压电纳米梁的静态弯曲和自由振动问题,但是其忽略了压电纳米元件的尺度效应和在实际工程应用时的工作环境。本节先忽略黏弹性基体的影响,通过对比本文提出的控制方程求解方法下计算得到的一阶无量纲固有频率和参考文献[25]得到的一阶无量纲固有频率,以验证本文控制方程求解方法的正确性。

表 1 给出简支边界条件下一阶无量纲固有频率本文解和文献[25]的解的对比情况。由表 1 可知,本文提出的控制方程求解方法在简支边界条件下一阶无量纲固有频率的解与文献[25]得到的解的相对误差均在 1% 以内,这验证了本文解法的正确性。此外,挠曲电纳米梁的一阶无量纲固有频率随着长细比的增大而减小,显然这是由于结构整体刚度随着长细比的增大而减小引起的。

3.2　参数影响分析

以上节分析为基础,本节系统分析非局部参数、挠曲电系数和黏弹性基体对挠曲电纳米梁振动特性的影响规律。

3.2.1　非局部参数影响分析

本节分析简支边界条件下非局部参数对挠曲电纳米梁振动特性的影响规律。不同非局部参数 α 下挠曲电纳米梁的一阶至三阶无量纲固有频率

见表 2。由表 2 可以看出,当挠曲电纳米梁置于黏弹性基体中时,无量纲固有频率的虚部非零。随着非局部参数 α 的增大,各阶无量纲固有频率实部呈下降趋势,这是因为非局部效应会减弱结构刚度;同时非局部参数 α 对不同阶无量纲固有频率虚部有微弱的影响。

表 1　简支边界条件下一阶无量纲固有频率解对比

Tab. 1　Comparison of solutions of first-order dimensionless intrinsic frequency under simply supported boundary conditions

方法	L/h					
	5	10	15	20	25	30
本文	0.531 36	0.279 63	0.188 35	0.141 78	0.113 62	0.094 77
文献[25]	0.531 15	0.279 60	0.188 34	0.141 77	0.113 61	0.094 77
相对误差/%	0.039 54	0.010 73	0.005 31	0.007 05	0.008 80	0

表 2　不同非局部参数下挠曲电纳米梁的无量纲固有频率

Tab. 2　Dimensionless natural frequencies of flexoelectric nano-beam with different nonlocal parameters

简支边界条件	无黏弹性基体			有黏弹性基体		
	$\alpha=0.0$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.0$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.4$
一阶	0.784 3	0.664 9	0.488 4	0.880 6+0.017 6i	0.775 5+0.017 6i	0.631 6+0.017 6i
二阶	3.247 4	2.022 1	1.200 6	3.276 5+0.017 8i	2.068 4+0.017 8i	1.277 1+0.017 7i
三阶	6.967 5	3.265 3	1.786 4	6.983 8+0.017 0i	3.299 8+0.017 0i	1.848 7+0.017 0i

挠曲电纳米梁无量纲固有频率实部之比随非局部参数 α 的变化曲线如图 2 所示。由图 2 可知,无论挠曲电纳米梁是否置于黏弹性基体中,各阶无量纲固有频率之比均随着非局部参数 α 的增大而减小,且减小幅度随着频率阶次的增加而增大。由于黏弹性基体的支撑作用在一定程度上增加了结构的刚度,因此相对于无黏弹性基体支撑的挠曲电纳米梁,置于黏弹性基体中的挠曲电纳米梁的固有频率之比减小幅度相对较小。

3.2.2　挠曲电系数影响分析

本节分析简支边界条件下挠曲电系数对挠曲电纳米梁振动特性的影响规律,其中非局部参数 α 设为 0.2,在分析横向挠曲电系数 f_{3113} 对挠曲电纳米梁振动特性的影响规律时,取切向挠曲电系数 $f_{3131}=1$ V;而在分析切向挠曲电系数 f_{3131} 对挠曲电纳米梁振动特性的影响规律时,取横向挠曲电系数 $f_{3113}=10$ V。

图 3 和图 4 分别是挠曲电纳米梁一阶至三阶无量纲固有频率实部随横向挠曲电系数 f_{3113} 和切向挠曲电系数 f_{3131} 的变化曲线。由于挠曲电 Euler-Bernoulli 纳米梁也会受到横向挠曲电系数 f_{3113} 的影响,图 3 中同时对比了横向挠曲电系数 f_{3113} 对挠曲电 Timoshenko 纳米梁和挠曲电 Euler-Bernoulli 纳米梁一阶无量纲固有频率实部的影响。由图 3 可知,挠曲电纳米梁的各阶无量纲固有频率实部随着横向挠曲电系数 f_{3113} 的增加近似

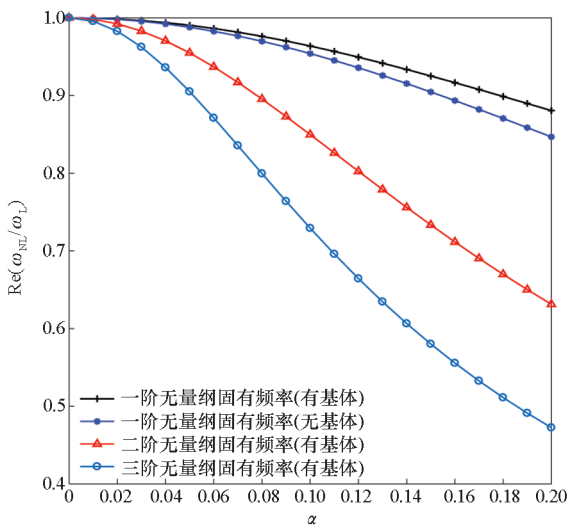


图 2　挠曲电纳米梁无量纲固有频率实部之比随非局部参数 α 的变化曲线

Fig. 2　Variation curves of the real part of the dimensionless natural frequency of flexoelectric nano-beam with nonlocal parameters α

呈线性增大趋势,且增大幅度随频率阶次的增加而增大,说明横向挠曲电系数 f_{3113} 有增加挠曲电纳米梁结构刚度的效果。挠曲电 Timoshenko 纳米梁的一阶无量纲固有频率实部大于挠曲电 Euler-Bernoulli 纳米梁的一阶无量纲固有频率实部,且横向挠曲电系数 f_{3113} 对挠曲电 Timoshenko 纳米梁一阶无量纲固有频率实部的影响幅度大于对挠曲电 Euler-Bernoulli 纳米梁一阶无量纲固有

频率实部的影响幅度。

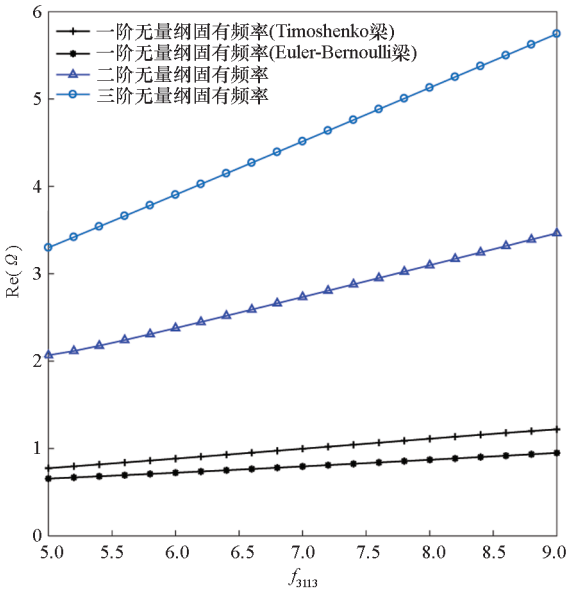


图 3　挠曲电纳米梁无量纲固有频率实部随横向挠曲电系数 f_{3113} 的变化曲线

Fig. 3　Variation curves of the real part of the dimensionless natural frequency of flexoelectric nano-beam with the transverse flexoelectric coefficient f_{3113}

由图 4 可知，挠曲电纳米梁的一阶至三阶无量纲固有频率均随着切向挠曲电系数 f_{3131} 的增大而减小，且减小幅度随着频率阶次的增加而增大，这说明切向挠曲电系数 f_{3131} 对挠曲电纳米梁的结构刚度有一定的削弱作用。

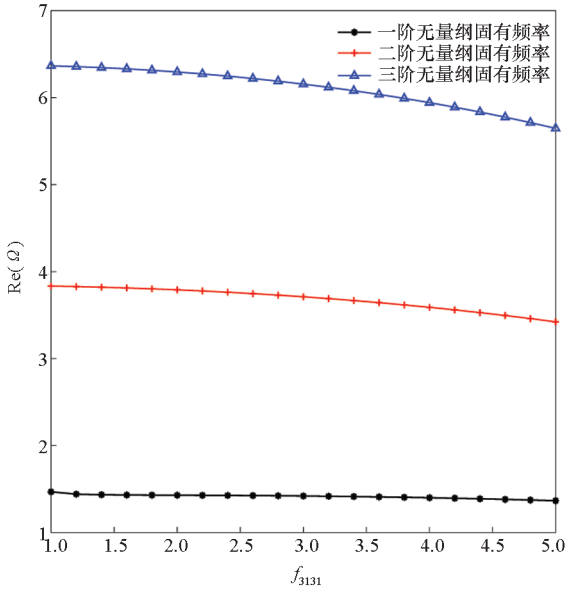


图 4　挠曲电纳米梁无量纲固有频率实部随切向挠曲电系数 f_{3131} 的变化曲线

Fig. 4　Variation curves of the real part of the dimensionless natural frequency of flexoelectric nano-beam with the tangential flexoelectric coefficient f_{3131}

3.2.3　黏弹性基体影响分析

本节分析简支边界条件下黏弹性基体对挠曲电纳米梁振动特性的影响规律，其中，非局部参数 α 设为 0.2，黏弹性基体的阻尼系数 c_t 的取值范围为[0 MPa · ns/nm，50 MPa · ns/nm]。

图 5 和图 6 分别是挠曲电纳米梁一阶至三阶无量纲固有频率实部和虚部随黏弹性基体的阻尼

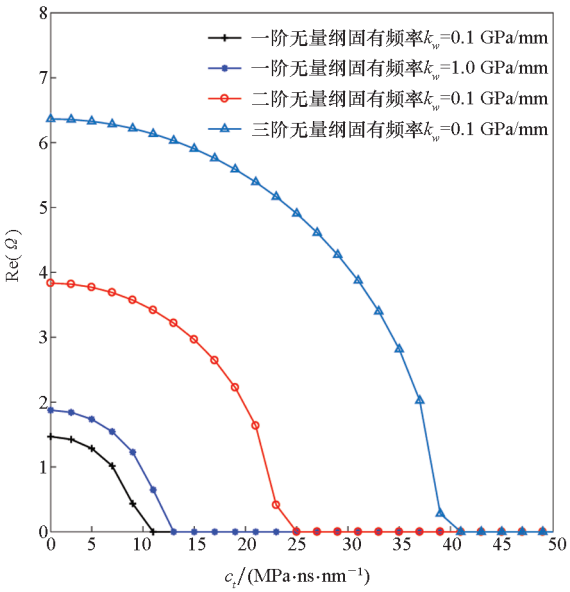


图 5　挠曲电纳米梁无量纲固有频率实部随黏弹性基体的阻尼系数 c_t 的变化曲线

Fig. 5　Variation curves of the real part of the dimensionless natural frequency of flexoelectric nano-beam with the damping coefficient c_t of viscoelastic medium

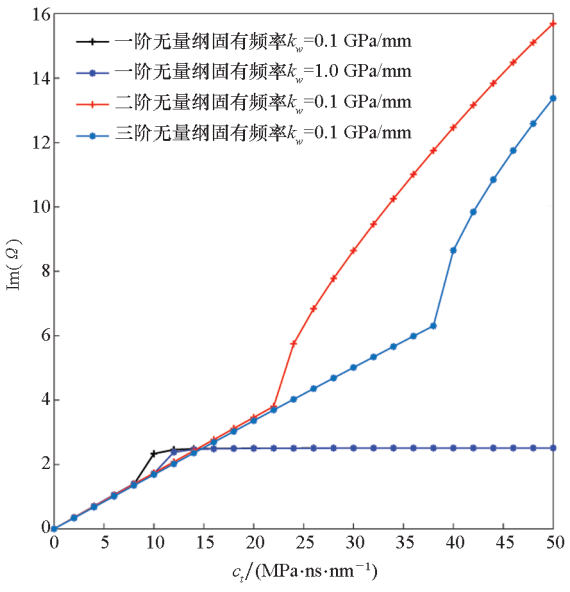


图 6　挠曲电纳米梁无量纲固有频率虚部随黏弹性基体的阻尼系数 c_t 的变化曲线

Fig. 6　Variation curves of the imaginary part of the dimensionless natural frequency of flexoelectric nano-beam with the damping coefficient c_t of viscoelastic medium

系数 c_t 的变化曲线。由图 5 可知,当黏弹性基体的阻尼系数 c_t 大于临界阻尼系数 c_{t_crit} 时,各阶无量纲固有频率实部降为零,这表明此时挠曲电纳米梁不再发生往复振动。临界阻尼系数 c_{t_crit} 随着频率阶次的增加而增大,且增大黏弹性基体的 Winkler 弹性模量 k_w 能增大临界阻尼系数 c_{t_crit}。当黏弹性基体的阻尼系数 c_t 小于各阶临界阻尼系数 c_{t_crit} 时,挠曲电纳米梁的无量纲固有频率实部随着黏弹性基体的阻尼系数 c_t 的增大而减小,且减小幅度逐渐增大。由图 6 可知,黏弹性基体的阻尼系数 c_t 对各阶无量纲固有频率的虚部影响曲线在各阶临界阻尼系数 c_{t_crit} 处发生突变。当黏弹性基体的阻尼系数 c_t 小于各阶的临界阻尼系数 c_{t_crit} 时,各阶无量纲固有频率虚部随着黏弹性基体的阻尼系数 c_t 的增大呈线性增大趋势。当黏弹性基体的阻尼系数 c_t 大于各阶的临界阻尼系数 c_{t_crit} 时,各阶固有频率的虚部随着黏弹性基体的阻尼系数 c_t 的增加而逐渐增大,但是增大幅度逐渐减小。

4　结论

本文以黏弹性基体中的 Timoshenko 纳米梁为研究对象,综合考虑了非局部效应、压电效应和挠曲电效应等因素的影响,基于哈密顿原理建立了系统的控制方程和相应的边界条件,给出了简支边界条件下挠曲电纳米梁控制方程的求解方法,并通过算例验证了本文模型和控制方程求解方法的正确性,并较系统地研究了简支边界条件下非局部参数、挠曲电系数和黏弹性基体对挠曲电纳米梁振动特性的影响规律。主要结论如下:

1)非局部效应会削弱挠曲电纳米梁的结构刚度,无量纲固有频率实部之比随着非局部参数 α 的增大而减小,且减小幅度随着频率阶次的增加而增大。

2)横向挠曲电系数 f_{3113} 能增加挠曲电纳米梁的结构刚度,且对 Timoshenko 梁的影响幅度大于对 Euler-Bernoulli 梁的影响幅度;切向挠曲电系数 f_{3131} 对挠曲电纳米梁的结构刚度有一定的削弱作用。

3)挠曲电纳米梁不发生往复振动对应的临界阻尼系数 c_{t_crit} 随着频率阶次和黏弹性基体的 Winkler 弹性模量 k_w 的增加而增大。当黏弹性基体的阻尼系数 c_t 小于各阶临界阻尼系数 c_{t_crit} 时,挠曲电纳米梁的各阶无量纲固有频率的实部随着黏弹性基体阻尼系数 c_t 的增大而减小,且减小幅度逐渐增大;而虚部随黏弹性基体阻尼系数 c_t 的增大呈线性增加。当黏弹性基体的阻尼系数 c_t 大于各阶临界阻尼系数 c_{t_crit} 时,挠曲电纳米梁的无量纲固有频率实部均为零;挠曲电纳米梁的无量纲固有频率的虚部随着黏弹性基体的阻尼系数 c_t 的增加而逐渐增大,但增大幅度逐渐减小。

参考文献(References)

[1] ZHAO N, ZHANG S, YU F R, et al. Exploiting interference for energy harvesting: a survey, research issues, and challenges[J]. IEEE Access, 2017, 5: 10403 – 10421.

[2] 陈春林, 李肇奇, 梁旭, 等. 悬臂梁挠曲电俘能器的力电耦合模型及性能分析[J]. 固体力学学报, 2020, 41(2): 159 – 169.
CHEN Chunlin, LI Zhaoqi, LIANG Xu, et al. Electromechanical coupling model and performance analysis of the unimorph cantilever beam-based flexoelectric energy harvester[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2020, 41(2): 159 – 169. (in Chinese)

[3] MA W H, CROSS L E. Observation of the flexoelectric effect in relaxor $Pb(Mg_{1/3}Nb_{2/3})O_3$ ceramics[J]. Applied Physics Letters, 2001, 78(19): 2920 – 2921.

[4] MA W H, CROSS L E. Flexoelectric polarization of barium strontium titanate in the paraelectric state[J]. Applied Physics Letters, 2002, 81(18): 3440 – 3442.

[5] MA W H, CROSS L E. Strain-gradient-induced electric polarization in lead zirconate titanate ceramics[J]. Applied Physics Letters, 2003, 82(19): 3293 – 3295.

[6] MA W H, CROSS L E. Flexoelectric effect in ceramic lead zirconate titanate[J]. Applied Physics Letters, 2005, 86(7): 072905.

[7] MA W H, CROSS L E. Flexoelectricity of barium titanate[J]. Applied Physics Letters, 2006, 88(23): 232902.

[8] HU S L, SHEN S P. Variational principles and governing equations in nano-dielectrics with the flexoelectric effect[J]. Science China Physics, Mechanics and Astronomy, 2010, 53(8): 1497 – 1504.

[9] MARANGANTI R, SHARMA N D, SHARMA P. Electromechanical coupling in nonpiezoelectric materials due to nanoscale nonlocal size effects: Green′s function solutions and embedded inclusions[J]. Physical Review B, 2006, 74: 014110.

[10] CHEN C Q, SHI Y, ZHANG Y S, et al. Size dependence of Young′s modulus in ZnO nanowires[J]. Physical Review Letters, 2006, 96(7): 075505.

[11] AGRAWAL R, PENG B, GDOUTOS E E, et al. Elasticity size effects in ZnO nanowires—a combined experimental-computational approach[J]. Nano Letters, 2008, 8(11): 3668 – 3674.

[12] 申志彬. 基于非局部弹性理论的微纳米质量传感器振动特性研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2012.
SHEN Zhibin. Vibration characteristics of micro/nano mass sensor via nonlocal elasticity theory[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2012. (in Chinese)

[13] DUHEM P. Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique[J]. Annales Scientifiques de l′École Normale Supérieure, 1893, 10: 183 – 230.

[14] LI Y S, FENG W J, CAI Z Y. Bending and free vibration of

functionally graded piezoelectric beam based on modified strain gradient theory[J]. Composite Structures, 2014, 115: 41 – 50.

[15] EBRAHIMI F, BARATI M R, DABBAGH A. A nonlocal strain gradient theory for wave propagation analysis in temperature-dependent inhomogeneous nanoplates [J]. International Journal of Engineering Science, 2016, 107: 169 – 182.

[16] ZHANG D P, LEI Y J, ADHIKARI S. Flexoelectric effect on vibration responses of piezoelectric nanobeams embedded in viscoelastic medium based on nonlocal elasticity theory[J]. Acta Mechanica, 2018, 229(6): 2379 – 2392.

[17] LEI Y, ADHIKARI S, FRISWELL M I. Vibration of nonlocal Kelvin-Voigt viscoelastic damped Timoshenko beams [J]. International Journal of Engineering Science, 2013, 66/67: 1 – 13.

[18] LEI Y, MURMU T, ADHIKARI S, et al. Dynamic characteristics of damped viscoelastic nonlocal Euler-Bernoulli beams[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2013, 42: 125 – 136.

[19] 杨帆. 表面效应对压电纳米梁弯曲行为的影响[J]. 电子元件与材料, 2016, 35(8): 46 – 49.
YANG Fan. Effect of surface energy on the bending of piezoelectric nanowires [J]. Electronic Components and Materials, 2016, 35(8): 46 – 49. (in Chinese)

[20] YAN Z, JIANG L Y. The vibrational and buckling behaviors of piezoelectric nanobeams with surface effects [J]. Nanotechnology, 2011, 22(24): 245703.

[21] YAN Z, JIANG L Y. Size-dependent bending and vibration behaviour of piezoelectric nanobeams due to flexoelectricity[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2013, 46(35): 355502.

[22] ZENKOUR A M, SOBHY M. Nonlocal piezo-hygrothermal analysis for vibration characteristics of a piezoelectric Kelvin-Voigt viscoelastic nanoplate embedded in a viscoelastic medium[J]. Acta Mechanica, 2018, 229(1): 3 – 19.

[23] MAJDOUB M S, SHARMA P, ÇAĞIN T. Erratum: dramatic enhancement in energy harvesting for a narrow range of dimensions in piezoelectric nanostructures [J]. Physical Review B, 2009, 79(15): 159901.

[24] MAJDOUB M S, SHARMA P, CAGIN T. Enhanced size-dependent piezoelectricity and elasticity in nanostructures due to the flexoelectric effect [J]. Physical Review B, 2008, 77(12): 125424.

[25] YUE Y M, XU K Y, CHEN T. A micro scale Timoshenko beam model for piezoelectricity with flexoelectricity and surface effects [J]. Composite Structures, 2016, 136: 278 – 286.

[26] YAN Z, JIANG L Y. Size-dependent bending and vibration behaviour of piezoelectric nanobeams due to flexoelectricity[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2013, 46(35): 355502.

[27] LI X J, LUO Y. Flexoelectric effect on vibration of piezoelectric microbeams based on a modified couple stress theory[J]. Shock and Vibration, 2017, 2017: 1 – 7.