Tychonoff 定理的又一个证法

余　滨

提要　本文给出了 Tychoncff 定理的又一个证法。在证明中，我们基于Zorn引理，利用紧空间的等价命题之一——任一网都有丛点——来证明的。首先，我们引进了万有网的概念，并给出了一个例子。其次，我们证明了万有网的几个性质（即引理1，2，3，4）。最后，我们证明了一般拓扑学中著名的定理——Tychonoff 定理。

一、引　言

Tychonoff 定理是一般拓扑学中最著名的定理之一。它叙述了一族紧空间的乘积，在乘积拓扑的意义下，仍是紧的。这是一个比较经典的定理；在 J.L.Kelley 著的《一般拓扑学》中，给出这个定理的两个比较典型的证明；一个是基于 Alexander 定理的结论，从乘积空间的定义子基中的每个复盖有有限子复盖来证明乘积空间是紧的；另一个证明是 Bourbaki 给出的，它基于 Tukey 引理，通过紧空间的等价命题之一——具有有限交性质的闭集族必有非空交——来证明乘积空间是紧的。一九六五年，P.A.Loeb发表了《Tychonoff 定理的一个新证法》，它是基于在指标集上定义良序，通过紧空间的另一等价命题——由开集组成的有限不足够的每个族是不足够的——来证明乘积空间是紧的。

现在，我们将给出这个定理的另外一个证明；它是利用紧性的又一等价条件——任一网必有丛点——并基于Zorn 引理来证明的。

我们知道，在一般拓扑学中，拓扑空间X是紧的，当且仅当X中每个网必有一子网，它收敛到X中某点；这实际上就是数学分析中的 B. Bolzano—C. Weierstrass 定理的一个直接推广。但是，我们并不能将上述定理的证明方法进行直接推广，因为拓扑空间(X，$\mathcal{I}$) 不一定是可度量的。然而，其证明方法也启发了我们通过构造集族来证明定理。因此，我们将通过引进万有网的概念来达到这一目的。

二、证　明

本文的证明方法是基于 Zorn 引理，即："如果偏序集中每一个链都有一个上界，则该集必有极大元"，利用紧空间的性质："拓扑空间X是紧的，当且仅当X中每个网必

本文1982年8月22日收到

有一丛点，”来证明 Tychonoff 定理的。

定义 集X中的网称为万有的是指：对于X的每个子集A，网或者以A为归宿或者以$X\sim A$为归宿。

例 设X是自然数集，$\mathbf{N}$是X所有子集的族，则$(\mathbf{N},\supset)$是一个有向集。作函数S：$\mathbf{N}\to X$，对任一$A\in\mathbf{N}$，令

$$S_A=\inf\{x:x\in A\},$$

由于X是良序集，故S有意义。则$S=\{S_A:A\in\mathbf{N}\}$是X中的网。下面，我们说明S是X中的万有网。事实上，对X的任一子集A，倘若$1\in A$，则对任意的$B\in\mathbf{N}$且$B\supset A$，均有

$$S_B=1,$$

即S以A为归宿；若$1\notin A$，则令$C=A\cup\{1\}$，于是，对任意的$B\in\mathbf{N}$且$B\supset C$，均有

$$S_B=1\in X\sim A,$$

即S以$X\sim A$为归宿。由万有网的定义知，S是A中的万有网。

引理 1 设X是集，S是X中的网，则必存在X的子集族$\mathbf{C}$，满足条件：

1) S常返至$\mathbf{C}$的每个成员；

2) $\mathbf{C}$中两个成员之交仍属于$\mathbf{C}$；

3) 对于X的每个子集A，$A\in\mathbf{C}$和$X\sim A\in\mathbf{C}$必有一式成立。

证明 设$S=\{S_n,\ n\in D\}$是X中的一个网，记

$$A_n=\{S_m:m\in D\text{ 且 }m\geqq n\},\ n\in D,$$

则$\mathbf{A}=\{A_n:n\in D\}$是$X$的子集族，且$S$以$\mathbf{A}$中每个成员为归宿。令

$$\Theta=\{\mathbf{D}:\mathbf{D}\text{是}X\text{的子集族，}\mathbf{A}\subset\mathbf{D}\text{且 }\mathbf{D}\text{ 具有有限交性质}\},$$

以$\subset$作为序，则$\subset$是Θ中的偏序。且若Φ是Θ中的一个链，令$\mathbf{F}=\cup\Phi$，则

(1) $\mathbf{A}\subset\mathbf{F}$;

(2) $\mathbf{F}$具有有限交性质，

所以$\mathbf{F}\in\Theta$且$\mathbf{F}$是Φ的上界。由 Zorn 引理，Θ中必有一极大元，记为$\mathbf{C}$。则$\mathbf{C}$具有性质：

i) 若$A,B\in\mathbf{C}$，则有$A\cap B\in\mathbf{C}$;

ii) 若$A\in\mathbf{C}$，B是X的子集且$B\supset A$，则有$B\in\mathbf{C}$;

iii) 设A是X的子集，若A与$\mathbf{C}$的每个成员相交，则$A\in\mathbf{C}$;

iv) S常返于$\mathbf{C}$的每个成员；

v) 对X的任意子集A，$A\in\mathbf{C}$和$X\sim A\in\mathbf{C}$必有一式成立。

事实上，性质 i), ii), iii) 可由$\mathbf{C}$的极大性推出。我们只证性质 iv) 和 v)：

对性质 iv)，由于$\mathbf{A}\subset\mathbf{C}$，故对任意$C\in\mathbf{C}$，及任意的$n\in D$，由于$\mathbf{C}$具有有限交性质，故必有$A_n\cap C\neq 0$；即存在$m\in D$且$m\geqq n$使得$S_m\in C$，或即$S$常返至$C$。

对性质 v)，用反证法证之。假若不然，存在X的子集A使得$A\notin\mathbf{C}$和$X\sim A\notin\mathbf{C}$同时成立，由性质 iii) 可知，必存在U，$V\in\mathbf{C}$使得$A\cap U=0$且$(X\sim A)\cap V=0$，或即$V\subset A$且$U\subset X\sim A$，从而有$U\cap V=0$，此与$\mathbf{C}$的性质 i) 矛盾。从而性质 v) 成立。

由性质 i), iv), v)，即可推出$\mathbf{C}$满足性质 1), 2), 3)。故引理 1 的结论成立。

引理 2 X中每一个网存在万有子网。

证明 设S是X中的网，由引理1，存在X的子集$\mathbf{C}$，满足：

1) S常返至$\mathbf{C}$的每个成员；

2) $\mathbf{C}$中两个成员之交仍属于$\mathbf{C}$;

3) 对于X的每个子集A，$A\in\mathbf{C}$和$X\sim A\in\mathbf{C}$必有一式成立。

由性质1) 2)，知存在S的子网T使得T以$\mathbf{C}$的每个成员为归宿(参看注记(1))。由性质3)，知对于X的每个子集A，T或者以A为归宿或者以$X\sim A$为归宿；即T是万有网。

引理 3 若S是X中的一个万有网，f是X映入Y的函数，则$f\circ S$是Y中的万有网。

证明 显然，$f\circ S$是Y中的网。下证$f\circ S$是Y中的万有网。

对于Y的每个子集A, 则有$f^{-1}[A]\cup f^{-1}[Y\sim A]=X$且$f^{-1}[A]\cap f^{-1}[Y\sim A]=0$. 由于$S$在$X$中是万有的，故$S$或者以$f^{-1}[A]$为归宿或者以$f^{-1}[Y\sim A]$为归宿，即$f\circ S$或者以$A$为归宿或者以$Y\sim A$为归宿。由万有网的定义，即知$f\circ S$是$Y$中的万有网。

引理 4 设$(X,\mathbf{I})$是拓扑空间，S是X中的一个万有网，若s是S的一个丛点，则S必$\mathbf{I}$—收斂到s.

证明 对s的任意一个邻域U，由S是万有的，故S或者以U为归宿或者以$X\sim U$为归宿。由于s是S的丛点，故S常返至s的每个邻域，即S常返至U，或即S不以$X\sim U$为归宿，从而S以U为归宿。由U的任意性，即知S必$\mathbf{I}$—收斂到s.

Tychonoff 定理 设$\{(X_a,\mathbf{I}_a):a\in A\}$是一族紧拓扑空间，记$X=X\{X_a:a\in A\}$，则乘积空间$(X,\mathbf{I})$是紧的。

证明 欲证$(X,\mathbf{I})$是紧的，只需证X中的每个网必有一丛点即可。

设S是X中的网，由引理2，S必存在一万有子网T. 又设$P_a:X\to X_a$是X到X_a上的射影($a\in A$)。由引理3，$P_a\circ T$是X_a中的万有网。由于X_a是紧的，故$P_a\circ T$在X_a中有丛点，设为x_a ($a\in A$). 由引理4，$P_a\circ T$必$\mathbf{I}_a$—收斂到$x_a(a\in A)$. 取X中的点x使得$P_a(x)=x_a(a\in A)$. 由于对任意的$a\in A$，$P_a\circ T\ \mathbf{I}_a$—收斂到$x_a=P_a(x)$；故$T\ \mathbf{I}$—收斂到x(参看注记(2))，即x是S的丛点。

三、注 记

在证明中，我们利用了如下两个结论：

(1) 设S是网，$\mathbf{A}$是这样的集族，使得S常返至$\mathbf{A}$中每一个成员，并且使得$\mathbf{A}$中两个成员之交必包含$\mathbf{A}$的一个成员。则必存在S的子网，它以$\mathbf{A}$中每一个成员为归宿。

(2) 乘积空间中的网S收斂到点s，当且及当它在每个坐标空间中的投影收斂到s的投影。

关于这两个结论的证明，可参看 J.L.Kelley 著的《一般拓扑学》；本文所采用的一系列术语，也均根据 J.L.Kelley 所给出的定义。引理1的证明，也可应用 Hausdorff 极大原理的其它等价命题(如 Tukey 理引，Kuratowski 引理等)，在这里就不一一叙述了。

参考文献

[1] J.L'Kelley，“一般拓扑学”，汪浩译，1981，国防科技大学。
[2] 关肇直，“拓扑空间概论”，1958，科学出版社。
[3] P.E.Loeb, “A New Proof of Tychonoff Theorem”, American Mathematical Monthly, 1965, NO. VI.

Another Proof of Tychonoff Theorem

Yu Bin

Abstract

This paper gives out another proof for Tychonoff Theorem. In proof, we based on Zorn's lemma, make use of that any net there is a cluster point, that is one of the equivalent propesitions of compact space. First, we lead in a concept of univesal net, and give out an example for it. Then, we proved a few properties of universal net (That is lemma 1, 2, 3, 4,). At the end, we proved Tychonoff Theorem, a famous theorem in general topology.