根轨迹法解高阶代数方程

（3—5 阶方程的解）

邵 秀 明

提 要 本文采用根轨迹法解高阶代数方程。其基本思想是沿着相应的开环极点和根轨迹走向用迭代法求出部分根，从而降低方程阶次。方法本身对方程性态不提出任何要求，对重根和复根不需作专门处理，是一种比较简便而实用的方法。

一、引 言

解高阶代数方程目前已成为多学科的共同要求。通常采用数值解法，即从初值开始，经过迭代过程趋于精确解。

迭代法的主要问题是初值的确定和迭代过程的收斂性、收斂速度。当方程沒有实根时，确定初值是很费事的。收斂条件一般与方程的性态（在解案附近的性质及根的分布状况等）和初值的近似度有关。[1]

目前关于代数方程数値解的迭代方法已很多。各种方法的差别在于其迭代过程，因而就有不同的收斂速度。为了收斂，有些迭代方法要求初值很接近于解案，但有些方法对于某些问题即使初值很接近解案，结果还是不收斂。因此往往对方程的性态提出某些约束条件。若方程为$F(x)=0$，则收斂最快的牛顿法要求$F'(x)$在解案附近不为0，而区间分半法虽无此限制但只能确定单实根。对方程性态无任何约束条件的是“格拉哀夫根平方法”[2]，它不必确定初值，迭代过程也是收斂的。但其迭代方法本身不具备纠错特性，一步运算出错，答案就错。而且要涉及大量的数字运算，重根、复根要作专门处理而且较烦。

本文介绍的根轨迹法也是一种求代数方程数値解的迭代法。其迭代过程基本属于区间分半法，但它应用了控制学原理，将问题化为求解控制系统闭环极点的问题。从而利用根轨迹来指示初値和迭代方向，以保证迭代过程的最终收斂。将四阶代数方程分解为两个二阶方程，其系数由根轨迹指导保证为实数，以使迭代过程能够收斂。该方法对方程性态无任何约束条件，重根或复根不需作专门处理，初值指示对于复杂问题也是一样简单，便于用计算器随时求解。其不足之处是目前仅限于五阶以下的代数方程求解，对简单的问题显得解法冗长。

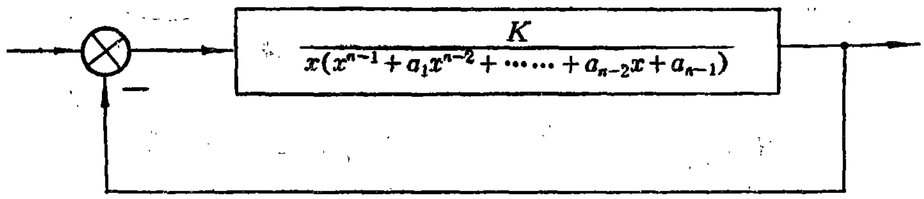
本文1982年5月29日收到

二、解 法 原 理

设 n 阶代数方程的一般形式为

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad a_n\neq 0 \tag{1}$$

当 $a_n>0$ 构成如下负反馈系统

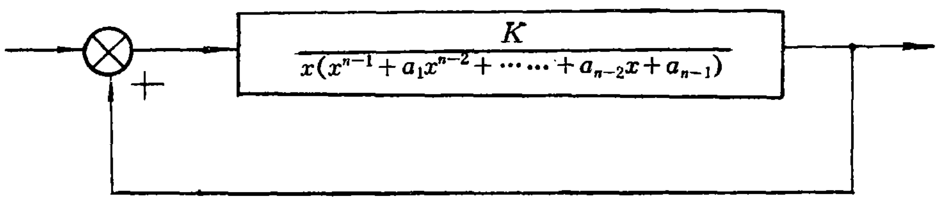


其闭环极点由特征方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+K=0 \quad 0\leqslant K<+\infty$$

求得。当 $k=a_n$ 时即得方程 (1) 之解。

当 $a_n<0$ 构成如下正反馈系统



其闭环极点由特征方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x-K=0 \quad 0\leqslant K<+\infty$$

求得。当$K=|a_n|$ 时即得方程 (1) 之解。

当$0\leqslant K<+\infty$连续变化时，闭环极点所形成的轨迹叫根轨迹。根据 11 条规则[3]，在复平面内可以作出根轨迹的概略形状。而根轨迹上对应$K=|a_n|$ 之点即方程 (1) 之根。

作根轨迹必须预知开环极点，上述 n 阶反馈系统亦有 n 个开环极点，并统一由方程

$$x(x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1})=0 \tag{2}$$

给出。这实际上是一个 $(n-1)$ 阶方程，再用根轨迹法求解又可构成一个 $(n-1)$ 阶的反馈系统。进而它的开环极点又由低一阶方程

$$x(x^{n-2}+a_1x^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-3}x+a_{n-2})=0 \tag{3}$$

给出。如法炮制最后构成三阶反馈系统，而其开环极点由方程

$$x(x^2+a_1x+a_2)=0 \tag{4}$$

给出。而这是可以直接求解的。

解 n 阶方程 (1) 的过程是上述过程的逆推即：

(1) 先解二阶方程　$x^2+a_1x+a_2=0$

加上零极点便得三阶系统之开环极点

(2) 用迭代法解三阶方程 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$

加上零极点便得四阶系统开环极点。

(3) 用迭代法解四阶方程 $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$

加上零极点便得五阶系统开环极点。

(4) 依次下去直至解出 n 阶方程 (1) 之一个或二个根将方程降阶。

(5) 解降阶方程也是在新系数下重复上述步骤。

三、具 体 解 法

(一) 三阶代数方程的解

1. 设方程形式为

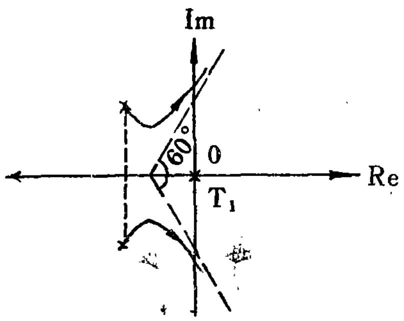
$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \quad a_3\neq 0$

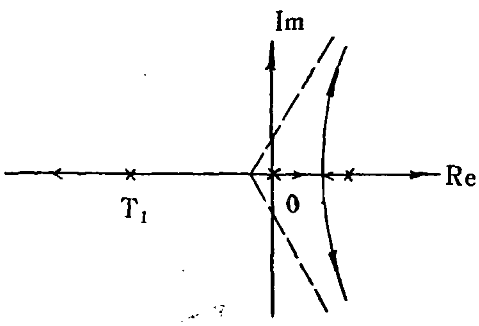
其开环极点为 x_{30}、x_{20}、x_{10}，并用符号"×"表示。则

$$x_{30}=0, x_{1,20}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_2}}{2}$$

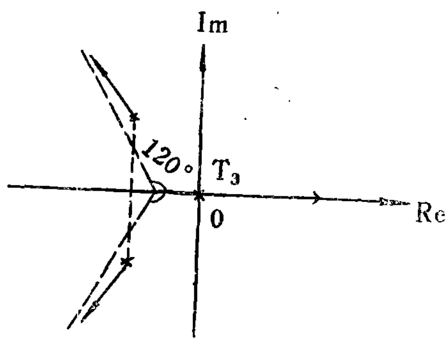
2. 典型根轨迹图及其分析

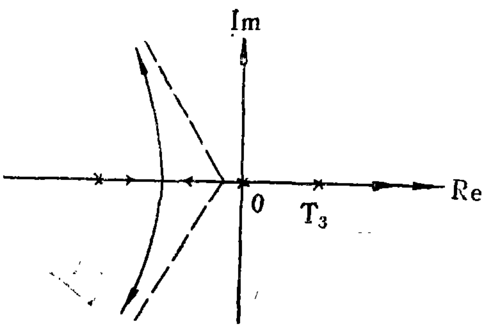
(1) $a_3>0$ 负反馈系统





(2) $a_3<0$ 正反馈系统





图中 T_1 为开环最小实极点，T_3 为开环最大实极点。

从根轨迹图清楚地看出，根轨迹总有一支始终在实轴上，说明三阶方程必有实根，这与代数学基本定理一致。但从根轨迹图还能进一步看到，$a_3>0$ 时必有一负实根，从 T_1 开始在 $(-\infty \quad T_1]$ 区间内。而 $a_3<0$ 时必有一正实根，从T_3开始在$[T_3 \quad +\infty]$区间内。

另外由根轨迹性质可知：沿根轨迹前进（箭头）方向K值是单调增加的，且在起点（T_1或T_3）对应$K=0$，在终点$(-\infty$或$+\infty)$对应$K\to+\infty$。故必能在上述区间内找到一点使$K=|a_3|$，从而得方程的一个单实根。而另两根由降阶方程求得。

3． 迭代公式及步骤

(1) 单实根迭代公式： $Q=P(P(P+a_1)+a_2)$

(2) 判别式： $|Q|\gtreqless|a_3|$

(3) 结束条件： $|Q|=|a_3|$ 或 ① $|Q+a_3|\leqslant R$

② $|P(I)-P(I-1)|=|\Delta(I)|\leqslant R$

这里I为迭代次数，$P(I)$为第 I 次迭代值。R为给定精度要求。

(4) 迭代步骤

① 确定初值 $P(1)$

为方便起见，引入D、F两参量。其赋值如下：

$$D=\begin{cases}T_1 & a_3>0\\ T_3 & a_3<0\end{cases}\qquad F=\begin{cases}-1 & a_3>0\\ 1 & a_3<0\end{cases}$$

则 $P(1)=D+F$

② 第一阶段迭代找出含根的有限区间$[E \quad T_1]$或$[T_3 \quad E]$

(i) 令 $P=D+F$

(ii) 计算Q

(iii) 若 $|Q|>|a_3|$ 令 $E=P$ 转③

$|Q|<|a_3|$ 令 $F=2F$ 返(i)

③ 第二阶段迭代为区间分半法最后求出根

(iv) 令 $P=(D+E)/2$

(v) 计算 Q

(vi) 若 $|Q|>|a_3|$ 令 $E=P$ 返 (iv)

$|Q|<|a_3|$ 令 $D=P$ 返 (iv)

$|Q+a_3|\leqslant R$ 或 $\Delta(I)\leqslant R$ 结束

4． 举例①： 解 $x^3+0.1x^2+0.03x+0.4=0$

给 $R=0.001$

解 (1) 解 $x^2+0.1x+0.03=0$ 得开环极点

$x_{1\cdot 20}=-0.05\pm j0.1658$ 及 $x_{30}=0$

(2) 确定 T_1、T_3

$T_1=T_3=0$

(3) 确定$D\cdot F$ 及 $P(1)$

$\because$ $a_3=0.4>0$ $\therefore$ $D=T_1=0$ $F=-1$ 则 $P(1)=-1$

(4) 迭代公式：　$Q=P(P(P+0.1)+0.03)$

判别式：　$|Q|\gtrless 0.4$

(5) 迭代过程如下表

D	F	E	P表达式	I	$P(I)$	$\|\Delta(I)\|$	$\|\Delta(I)\|\gtrless 0.001$	$Q(I)$	$\|Q(I)\|\gtrless 0.4$
0	-1		$D+F$	1	-1	/	/	-0.93	>
		-1	$(D+E)/2$	2	-0.5	0.5	>	-0.115	<
-0.5				3	-0.75	0.25	>	-0.388	<
-0.75				4	-0.875	0.125	>	-0.6196	>
		-0.875		5	-0.8125	0.0625	>	-0.4947	>
		-0.8125		6	-0.7813	0.0318	>	-0.4392	>
		-0.7813		7	-0.7656	0.0156	>	-0.4131	>
		-0.7656		8	-0.7578	0.0078	>	-0.4005	>
		-0.7578		9	-0.7539	0.0039	>	-0.3943	<
-0.7539				10	-0.7559	0.002	>	-0.3974	<
-0.7559				11	-0.7569	0.001	=	-0.3990	<
-0.7569				12	-0.7574	0.0005	<	-0.3998	结　束

得　$x_3=P(12)=-0.7574$　及　$x^2-0.6574x+0.5281=0$

解得：　$x_{1,2}=+0.3287\pm j0.6481$

(二) 四阶代数方程的解

1. 设方程形式为

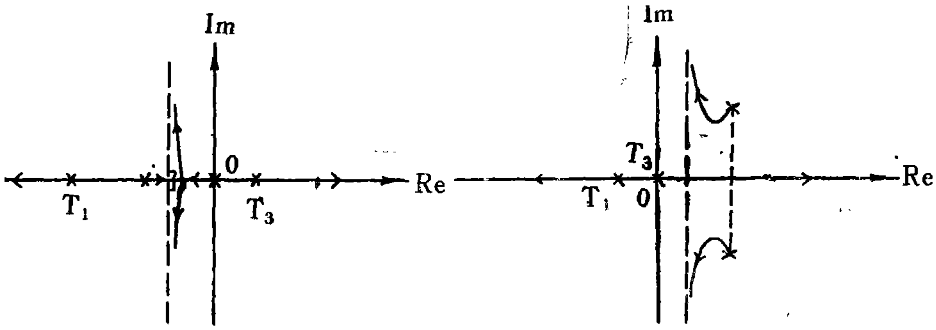
$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a^3x+a_4=0 \quad a_4\neq 0$

其开环极点为　x_{40}、x_{30}、x_{20}、x_{10}。则

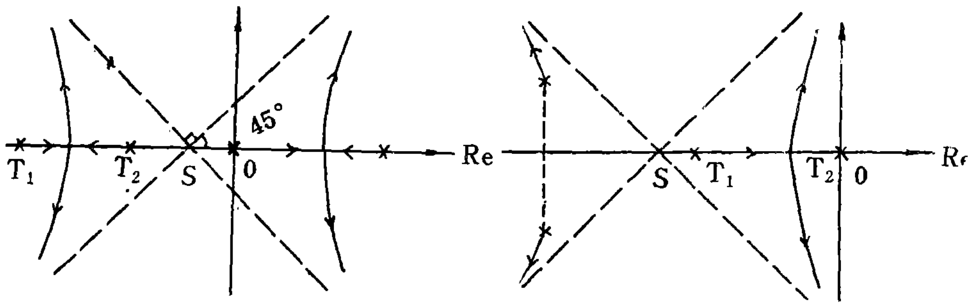
$x_{40}=0$，其余由方程　$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 求得。

2. 典型根轨迹图及其分析

(1) $a_4<0$ 正反馈系统



(2) $a_4>0$ 负反馈系统



观察根轨迹图，$a_4<0$ 时方程必有两个实根。一为负实根在 $(-\infty \quad T_1]$ 之内，另一为正实根在 $[T_3 \quad +\infty)$ 之内。因而可用单实根迭代公式求得这对正、负实根。而得降阶方程为二阶，可直接求得其余两根。将 $a_4<0$ 的情况从四阶方程中区别开来从而用简单迭代求解，这是根轨迹分析的贡献。

对于 $a_4>0$ 的情况，方程不一定有实根，故单实根迭代公式不能直接应用。为此作如下分解：

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=(x^2+B_1x+B_2)(x^2+B_3x+B_4)$$

其系数关系为：

$$a_1=B_1+B_3 \tag{5}$$

$$a_2=B_2+B_1B_3+B_4 \tag{6}$$

$$a_3=B_2B_3+B_1B_4 \tag{7}$$

$$a_4=B_2B_4 \tag{8}$$

这种分解如果纯粹从数学角度出发，对解决问题并无多大帮助，因为系数 B_1、B_2、B_3、B_4 不一定是实数。如果以根轨迹图作指导，将 T_1, T_2 出发的两支根轨迹组合起来，则 B_1、B_2、B_3、B_4 必为实数。这里 T_2 定义为只比 T_1 大（或等于 T_1）的开环实极点。因此这一分解是根轨迹指导下的特殊分解，它避免了实根与复根及不共轭的两复根的组合。从而可以用迭代实根的公式来求解 B_1、B_2、B_3、B_4。

3. 迭代公式及步骤

$a_4<0$时迭代与三阶方程迭代完全类似，不再赘述。下面讨论$a_4>0$的情况。

(1) 双根迭代公式：以B_1为赋值变量，由(5)—(7)式解得

$$B_3=a_1-B_1 \tag{9}$$

$$B_2=\frac{B_1(a_2-B_1B_3)-a_3}{B_1-B_3} \tag{10}$$

$$B_4=\frac{a_3-B_3(a_2-B_1B_3)}{B_1-B_3} \tag{11}$$

(2) 判别式：　$B_2B_4\gtrless a_4$

(3) 结束条件：　$B_2B_4=a_4$ 或 ①　$|B_2B_4-a_4|\leqslant R$

②　$|\Delta(I)|\leqslant R$

(4) 迭代步骤

① 确定初值 $B_1(1)$

$D=-(T_1+T_2)$。为了确定F再引入参量S，它是根轨迹渐近线与实轴交点。此特殊情况下（开环无有限零点）有$S=-\frac{a_1}{4}$。观察轨迹图，当$(T_1+T_2)/2=-\frac{D}{2}<S$时（左图），根轨迹向左行，有$F=1$。反之如右图有$F=-1$。则$B_1(1)=D+F$。

② 下面迭代过程与前述相同为区间分半法。

4. 举例②：解　$x^4-7x^3+14x^2-8x+2=0$

给　$R=0.001$

解　(1) 解　$x^2-7x+14=0$ 得

$x_{1.20}=3.5\pm j1.3229$ 及令 $x_{30}=0$ 形成三阶系统开环极点。

(2) 再解　$x^3-7x^2+14x-8=0$ 得

$x_{30}=4, x_{20}=2, x_{10}=1$ 及令 $x_{40}=0$ 形成该四阶系统开环极点。

(3) 确定 T_1、T_2、T_3

$T_1=0$，$T_2=1$，$T_3=4$

(4) 确定迭代公式

∵　$a_4>0$ 故迭代公式为

$$B_3=-7-B_1$$

$$B_2=\frac{B_1(14-B_1B_3)+8}{B_1-B_3}$$

$$B_4=\frac{-8-B_3(14-B_1B_3)}{B_1-B_3}$$

判别式：$B_2B_4\gtrless 2$

(5) 迭代初值 $B_1(1)$

$$D=-(T_1+T_2)=-1$$

$$-\frac{D}{2}=0.5\quad S=\frac{7}{4}=1.75\quad \therefore\quad F=1$$

(6) 迭代过程如下表

I	$B_1(I)$	$\|\Delta(I)\|$	$\|\Delta(I)\|$ $\gtrless 0.001$	$B_3(I)$	$B_2(I)$	$B_4(I)$	$B_2(I)\cdot B_4(I)$	$B_2(I)\cdot B_4(I)$ $\gtrless 2$
1	0	/	/	-7	1.1429	12.8571	14.6944	>
2	-0.5	0.5	>	-6.5	0.4375	10.3125	4.5117	>
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	-0.7149	0.0055	>	-6.2851	0.2161	9.2907	2.0077	>
10	-0.7169	0.002	>	-6.2831	0.2143	9.2813	1.989	<
11	-0.7159	0.001	=	-6.2841	0.2152	9.2860	1.9984	<
12	-0.7154	0.0005	<	-6.2846	0.2156	9.2884	2.0026	结　束

得　$B_1(12)=-0.7154$　　$B_2(12)=0.2156$

$B_3(12)=-6.2846$　　$B_4(12)=9.2884$

(7) 解降阶方程

$x^2-0.7154x+0.2156=0$　得　$x_{1,2}=0.3577\pm j0.2961$

$x^2-6.2846x+9.2884=0$　得　$x_3=2.377, x_4=3.9076$

5. 特殊情况的计算公式

双根迭代公式在 $B_1=B_3$ 时出现奇点，这与区间分半法对确定偶重根无效的结论是吻合的。但此时有公式可利用。

将 $B_1=B_3$ 代入 (5)-(7) 便得到：

$$B_1=B_3=a_1/2 \tag{12}$$

$$B_2+B_4=a_2-a_1^2/4 \tag{13}$$

$$B_2+B_4=2a_3/a_1 \tag{14}$$

因此得使 $B_1=B_3$ 的必要条件是：

$$a_2-a_1^2/4=2a_3/a_1 \quad 或 \quad a_1(a_2-a_1^2/4)=2a_3 \tag{15}$$

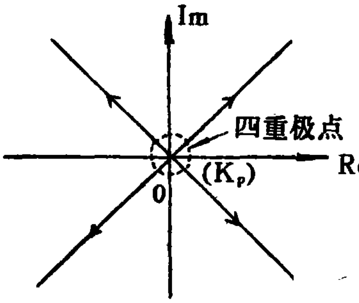
考虑到 $a_1=0$ 的情况也适用，由 (8) 和 (13) 式解得：

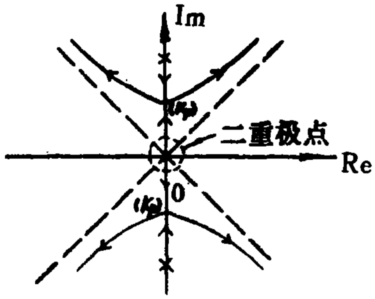
$$B_{2,4}=\frac{(a_2-a_1^2/4)\pm\sqrt{(a_2-a_1^2/4)^2-4a_4}}{2} \tag{16}$$

当 $(a_2-a_1^2/4)^2\geqslant 4a_4$ (17)

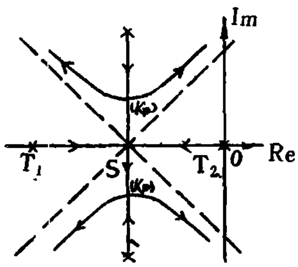
B_2、B_4 为实数，说明 $B_1=B_3$ 假设成立。当 $(a_2-a_1^2/4)^2<4a_4$ 时，B_2、B_4 为共轭复数，说明不属于 $B_1=B_3$ 的特殊情况，仍可由迭代求解。

从根轨迹图可以清楚说明，共有五种特殊情况如下：

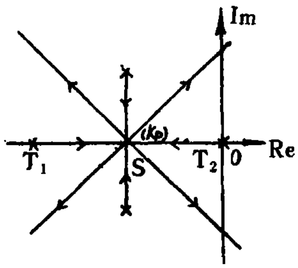




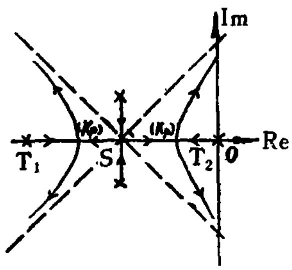
情况（1） $K_p=0$ $B_1=-B_3$ 情况（2） $B_1=\begin{cases} B_3=0 & K\leqslant K_p \\ -B_3 & K>K_p \end{cases}$



情况（3）



情况（4）



情况（5）

在根轨迹图上特殊情况是 $S=-\dfrac{D}{2}=(T_1+T_2)/2$，使 F 无法确定。这说明方程系数满足条件（15）式。但又存在着一个临界的 K 值 K_p，当 $K\leqslant K_p$ 才有 $B_1=B_3$，即与条件（17）式对应。此时按公式（12）、（16）计算 B_1、B_2、B_3、B_4。当 $K>K_p$ 时，实际上 $B_1\neq B_3$，但又有其特点，即根轨迹在以 $\mathrm{Re}Z=S$ 分界的两半复平面内是对称的（Z 为复数平面坐标）。所以判别 F 的公式失效，而 $F=\pm1$ 均可。临界 K_p 值可由（17）式求得

$$K_p=a_{4p}=\frac{1}{4}(a_2-a_1^2/4)^2$$

（三）五阶代数方程的解

与三阶方程解法完全类似。只是降阶方程为四阶，仍需迭代求解。

四、问题和分析

（一）收敛问题

1. 单实根迭代过程的收敛性

包括三、五阶方程及 $a_4<0$ 的四阶方程迭代过程收敛问题。

代数方程 $Q(x)+a_n=0$ 以 $a_n<0$ 为例

迭代方程　$Q(p)+a_n=F(p)$

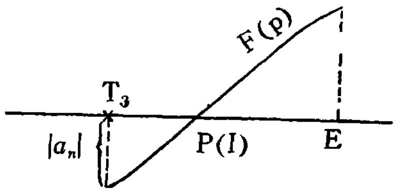
根轨迹方程　$Q(p)-K=0$

由于迭代是沿根轨迹进行的，即 $P\in[T_3\quad +\infty)$

且　$P=T_3$　　$K=0$　　则　$Q=0$　　$F(P)=a_n<0$

　　$P\to+\infty$　　$K\to+\infty$　　$Q\to+\infty$　　$F(P)\to+\infty$

∴　$Q\geqslant 0$，$Q\in[0\quad +\infty)$。故必有$P=E$使$F(P)=Q+a_n>0$，若在$[T_3\quad E]$内根轨迹走向不变，则$F(p)$在此区间内有下图所示特点



区间分半法的迭代结果必导至$F(p)=0$，从而迭代过程收敛。

若在 $[T_3\quad E]$ 内根轨迹走向不一致，说明此区间内存在多个解案，但，下面举例证明区间分半的结果必导至最后的区间$[D\quad E]$，使$F(p)$在其内具有上述特性，从而迭代过程也是收敛的。只是该区间不是唯一的。

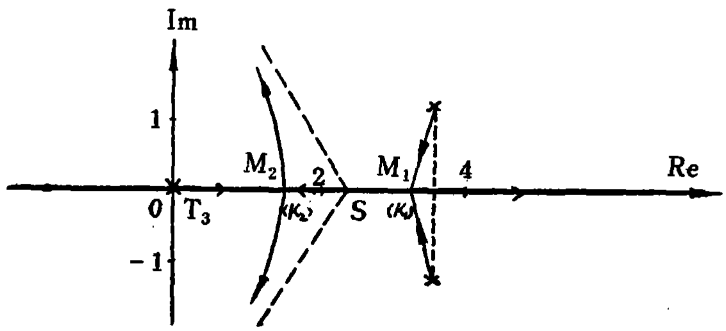
举例③：解　$x^3-7x^2+14x+a_3=0$　$a_3<0$

　　　　给　$R=0.001$

解　(1) 开环极点　$x_{30}=0$，$x_{1\cdot 20}=3.5\pm j1.32$　$T_3=0$　$F>0$

　　(2) 根轨迹图

$S=\frac{7}{3}=2.33$



M_1为会合点，M_2为分离点。用K极值法求得$M_1=3.2153$对应$K_1=5.8874$

$M_2=1.4514$对应$K_2=8.6311$

在$[M_2M_1]$内根轨迹走向与初始走向相反。

① 当$K<K_1$　最后区间$[D\quad E]\in[T_3\ M_2]$。∵　$[M_2\quad +\infty)$内有$K>K_1$。

② 当$K_1<K<K_2$最后区间$[D\quad E]\in[T_3\ M_2]$　或　$[D\quad E]\in[M_1\ +\infty)$而不会属于$[M_2M_1]$，因为该段轨迹走向与判别原则矛盾，试验点必从该区间向两边区间之一移动。

③ $K>K_2$ 最后区间 $[D\quad E]\in[M_1+\infty)$。

④ $K=K_1$（或K_2）最后区间$[D\ E]\in[T_3\ M_2]$（或$[M_1+\infty)$）或在
$P(I)=M_1$（或M_2）处单点符合$|Q+a_3|=0$。

分析表明：虽然初始区间$[T_3\ E(1)]$包含多个解案，迭代结果必导致只含一个解的区间$[D\ E]$，且$F(p)$在此区间具有上述特点（单调变化），因此迭代收敛。

(3) 迭代公式 $Q=P(P(P-7)+14)$，$D(1)=T_3=0$，$F>0$。结果如下表

a_3	F	$E(1)$	$P(1)$	I	$\lvert\Delta(I)\rvert$	$P(I)(x_3)$	x_2	x_1
-4	1	1	1	12	0.0005	0.3414	3.3293±	j0.7951
-6	1	1	1	12	0.0005	0.5856	3.4078	3.0067
	3.1	6.2	3.1	14	0.0008	3.4142	0.5858	3.0000
-10	1	8	1	17	0.0005	4.2692	1.3654±	j0.6914

2. 双根迭代过程的收敛性

前面已论述：B_1、B_2、B_3、B_4均为实数。而$B_1\in[D\ +\infty)$或$B_1\in(-\infty\ D]$

现在证明B_2、B_4均为正数。

B_2、B_4均为两根之积。由于B_2、B_4为实数，因而它们只可能是两实根之积或两共轭复根之积。后者必有B_2、B_4为正数。前者由于开环"零极点"的分割，两实根必处于"零极点"同一边，即为同号实根之结合，故B_2、B_4也为正数。

根轨迹方程　$Q(B_1)+K=0$　此处 $-Q(B_1)=B_2(I)\cdot B_4(I)>0$

起点　$K=0$　$-Q=B_2B_4=0$　$B_1(0)=-(T_1+T_2)$

终点　$K\to+\infty$　$-Q=B_2B_4\to\infty$　$B_1\to\pm\infty$

与单实根迭代过程类似，若在$[D\ +\infty)$或$(-\infty\ D]$内解案唯一，迭代收敛。若解案不唯一，迭代后必导致最后区间$[D\ E]$（或$[E\ D]$），使该区间内解案唯一。

举例④：解　$x^4+4x^3+5.25x^2+2.5x+a_4=0$　$a_4>0$

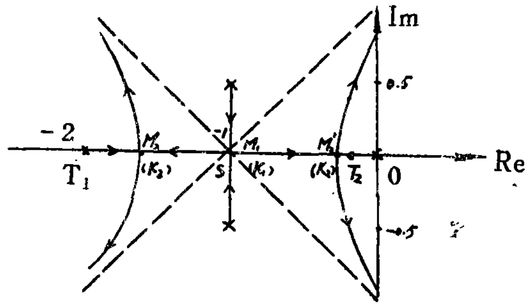
给　$R=0.001$

解 (1) 开环极点　$x_{40}=0$，$x_{30}=-2$，$x_{1\cdot 20}=-1\pm j0.5$

(2) $T_1=-2$，$T_2=0$，$D(1)=2$

(3) 根轨迹图

$S=-1$



属于特殊情况（5）

用K极值法求得会合点　$M_1=-1(K_1=0.25)$,

分离点　$M_2=-1.6124$, $M_2'=-0.3876$　$(K_2=0.3906)$

当 $K\leqslant K_1=0.25$ 用公式 (12),(16) 求解.

当 $K>K_2=0.3906$ 用迭代法解案唯一.

当 $K_1<K<K_2$ 用迭代法有两个可能的解案。

设 $a={}_4 0.3$ 则 $K_1<a_4<K_2$ 得两解案如下表

F	I	$B_1(I)$	$B_2(I)$	$B_3(I)$	$B_4(I)$
1	12	3.0948	2.3191	0.9052	0.1295
-1	12	0.9052	0.1295	3.0948	2.3191

（二）重根迭代情况

1. 四重根

只能发生在$a_4>0$，属于特殊情况(4)，且 $a_4=K_p$。故由公式求解。

2. 三重根

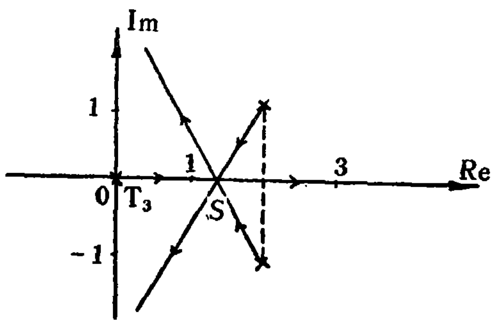
三阶方程当$a_3<0$可能有三重正实根，$a_3>0$ 可能有三重负实根。区间分半法可以迭代奇重根，只是收敛速度慢。对重根逼近程度取决于R值。

举例⑤：解　$x^3-3.9x^2+5.07x-2.197=0$（有三重根 1.3）

解　(1) 开环极点　$x_{30}=0, x_{1,20}=1.95\pm j1.1258$

(2) 根轨迹图

$S=1.3$



根轨迹特点是：一对开环共轭复极点之实部落在实轴根轨迹上，而虚部较小实部绝对值较大。

下面是R为不同值时的迭代结果

R	I	$P(I)(x_3)$	x_2	x_1
0.1	6	1.3125	1.2938±	j0.0108
0.01	9	1.3047	1.2977±	j0.0041
0.001	12	1.29983	1.30085±	j0.00015

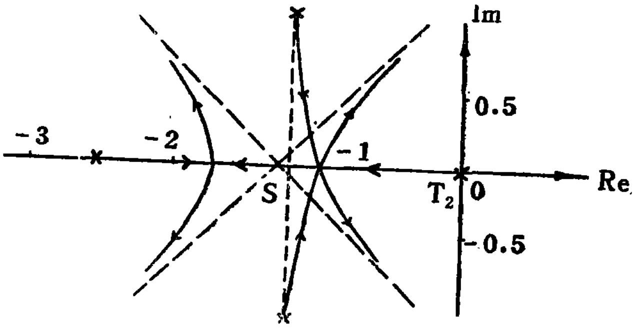
四阶方程当 $a_4>0$ 时，三重根与第四根同号，$a_4<0$ 时，三重根与第四根异号。迭代情况与三阶类似。

举例⑥：解 $x^4+5x^3+9x^2+7x+2=0$（有三重根 -1 及单根 -2）

解 (1) 开环极点 $x_{40}=0$，$x_{30}=-2.5435$，$x_{1,20}=-1.2283\pm j1.158$

(2) 根轨迹图

$S=-1.25$



与特殊情况 (5) 接近。

(3) 迭代结果

R	I	$B_1(I)$ / x_1	$B_2(I)$ / x_2	$B_3(I)$ / x_3	$B_4(I)$ / x_4
0.1	5	2.981	1.9621	2.019	1.0193
		-1.9999	-0.9811	$-1.0095\pm$	$j0.0145$
0.01	8	3.0201	2.0402	1.9799	0.9803
		-2	-1.0201	$-0.98995\pm$	$j0.0173$
0.001	12	3.0197	2.0394	1.9803	0.9807
		-2	-1.0197	$-0.9902\pm$	$j0.0173$

由于计算器位数不够，逼近过程不明显。

3. 二重根

二重实根含于降阶方程与 R 有关。

二重复根只发生在 $a_4>0$ 的特殊情况(2) 及 (3)，且 $K<K_p$，故由公式求解。

（三）方法误差

1. 迭代误差

迭代法只能求得以一定精度逼近解案的近似解。这是各种迭代法的共同特点。这里特殊性在于解法是从低阶到高阶链条式的，误差是否会积累和扩大，结论是不会的。开环极点指示误差，只是使根轨迹起点有微小变化，只要解案还在根轨迹上，则总误差只取决于最后一次迭代。若还需用迭代解降阶方程，则前次迭代误差会积累。

2. 开环极点指示误差

可能将两邻近的实极点迭代成一对共轭复极点或相反。但这对根轨迹影响也只在起

点微小区域。如该处不含解案，并不影响求解。

当 $a_n=0$ 时，其开环极点就是闭环极点，毋须迭代，以免上述指示误差造成错误。考虑这一情况，R应比绝对值最小的方程系数为小。

五、部分上机结果

(DJS—130 机 BASIC 语言)

(1) $N=3$　　$R=·01$

·1　10　100

1·92876　J 4·64201

1·92876　J 4·64201

-3·95752　J 0

(2) $N=3$　　$R=·01$

·2　·4　-·8

-·467188　J ·933326

-·467188　J ·933326

·734375　J 0

(3) $N=4$　　$R=·01$

-7　14　-8　-2

1·55396　J ·493231

1·55396　J ·493231

4·07666　J 0

-·18457　J 0

(4) $N=4$　　$R=·001$

9·33　28　32　11

-1·68344　J 0

-2·29426　J 0

-·599159　J 0

-4·75341　J 0

(5) $N=4$　　$R=·001$

9·33　28　32　15

-·856711　J ·589642

-·856711　J ·589642

-3·01135　J 0

-4·60523　J 0

(6) $N=4$　　$R=·001$

9·33　28　32　25

-·589988　J　1·06342

-·589988　J　1·06342

-4·07501　J　·546362

-4·07501　J　·546362

(7) $N=5$　　$R=·01$

1　·1　1　·1　1

-·316704　J ·824576

-·316704　J ·824576

·578125　J ·717028

·578125　J ·717028

-1·52284　J 0

(8) $N=5$　　$R=·01$

-7　14　-8　·1　1

·583984　J　·285436

·583984　J　·285436

3·98537　J 0

2·12596　J 0

-·279297　J 0

(9) $N=5$　　$R=·01$

-7　14　-8　1　·1

3·95534　J 0

2·2163　J 0

·591341　J 0

·29952　J 0

-·0625　J 0

(10) $N=5$　　$R=·01$

-15　54　-40　1　12

9.9959　J 0

4·0539　J 0

·685425　J ·484143

·685425　J ·484143

-·420654　J 0

六、结　语

利用根轨迹法解三、四、五阶代数方程，确是一种可行之法。初值指示和迭代过程均较简单。由于根轨迹指导，迭代过程最终是收敛的。解法是链条式的，对于复杂问题可看出方法的简便，而对于简单问题求解显得较烦。方法是否完善有待更广泛的实践检验，这就是本文之目的。

参考文献

[1] 冯康等编，数值计算方法，国防工业出版社。

[2] 郑　均著，线性系统分析，科学出版社。

[3] [美] S·M·欣内尔斯著，现代控制系统理论及应用，机械工业出版社。

The Solution of High Order Algebraic Equations by Using the Root Locus Approach

(Solution of 3rd to 5th order equation)

Shao Xiu—ming

Abstract

This paper introduces the solution of high order algebraic equations by using the root locus method. The main idea of this paper is to reduce the order of the equation by first finding some roots through using the iterative process which starts from the corresponding open-loop poles and then continues along the root locus. This method imposes no restraint upon the characteristics of the equations to be solved and needs no special treatment with equal and complex roots. So this method is a comparatively simple and practical one.