

截顶圆锥薄壳振动特性的计算

周 科 健

提 要 用有限单元法计算,单元为轴对称截锥壳。法向位移函数 w 和周向位移函数 v 采用三次多项式,纵向位移函数 u 为线性多项式。其节圆自由度选取节圆上三个位移,一个转角和一个剪应变。计算结果与文献 [1]、[2] 和 [3] 作了比较。这方法和程序可以应用于计算截顶圆锥壳的振动特性。

一、单元刚度矩阵和单元质量矩阵

用有限单元法^[4]计算结构上轴对称的截顶圆锥壳的振动特性——固有频率和振型。首先是把它离散成有限个截锥壳单元(图1),写出单元的应变能和动能表达式。然后直接组集起来,成为总体结构的应变能和动能。再应用 Lagrange 方程,得到固有振动的矩阵方程。考虑边界条件后,就可以求解。因此大量的推导工作是从单元的应变能和动能表达式中求出单元刚度和质量矩阵。

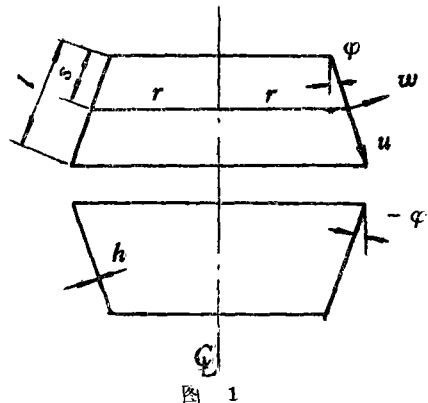


图 1

截锥壳单元的应变能和动能表达式

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l [e]^T [E] [e] r ds d\theta \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) r ds d\theta \quad (2)$$

上两式中, ρ 为壳体的质量密度, h 为壳体的厚度, θ 为周向坐标, “ \cdot ” 表示对时间的一阶导数, 弹性矩阵

$$[E] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & & & & \\ \nu & 1 & & & & \\ & & \frac{1-\nu}{2} & & & \\ & & & \frac{h^2}{12} & \frac{\nu h^2}{12} & \\ & & & \frac{\nu h^2}{12} & \frac{h^2}{12} & \\ & & & & & \frac{(1-\nu)h^2}{12} \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中 E 为杨氏模量, ν 为泊松系数, 空白的元素表示零, 下同。[ϵ] 为几何矩阵, 由 Новожилов 的应变和位移关系式^[5]导出, 即

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s} \\ \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} \cos \varphi \\ \epsilon_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r} \sin \varphi \\ \chi_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ \chi_\theta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos \varphi - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \sin \varphi \\ \chi_{s\theta} &= -\frac{1}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \varphi \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由此可以看出, 选取合理和简便的位移函数是关键的一步。

对圆柱壳($\varphi=0$)的振动特性研究表明^[6], 它的较低阶振动中的同一阶振型间的关系为

$$w \simeq jv, \quad v > u \quad (5)$$

其中 j 为周向全波数。由此, 本文选取单元的位移函数为

$$\begin{aligned} u &= (a_1 + a_2 s) \cos j\theta \\ v &= (a_3 + a_4 s + a_5 s^2 + a_6 s^3) \sin j\theta \\ w &= (a_7 + a_8 s + a_9 s^2 + a_{10} s^3) \cos j\theta \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $a_i (i=1, 2, \dots, 10)$ 为广义坐标。

从能量法的观点来看, 选取的位移函数只要求满足几何边界条件。但是, 如果能够同时满足一部份 (最好是全部的) 力的边界条件, 那么, 所得的结果会具有较好的精度。因此, 选取合适的节点 (节圆) 自由度是另一个重要的步骤。本文不引入内自由度^[7], 而选取节圆上的位移, 转角和剪应变为节圆自由度, 即

$$\{\hat{u}\} = \left[u_0 \quad v_0 \quad (\epsilon_{s\theta})_0 \quad w_0 \quad \beta_0 = \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_0 \quad u_l \quad v_l \quad (\epsilon_{s\theta})_l \quad w_l \quad \beta_l \right]^T$$

其中 0、 l 表示单元的两端, 使自由边界 (飞行器中是大量的) 能满足顺剪力为零的条件。节圆自由度列阵 $\{\hat{u}\}$ 与广义坐标列阵 $\{a\}$ 的关系式为

$$\{\hat{u}\} = [L]\{a\} \quad (7)$$

其中 $[L] =$

其中 $c = \frac{s}{r} \sin \varphi$. 当 $j=0$ 时, $n=2$; 当 $j \geq 1$ 时, $n=1$. 将式(7)代入式(6), 再代入式(2), 就可得到单元质量矩阵

$$[m] = n\pi\rho h[L]^{-T} \left(\int_0^l [S]^T [S] r ds \right) [L]^{-1} \tag{10}$$

式中

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & s & & & & \\ & 1 & s & s^2 & s^3 & \\ & & & & & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix}$$

对圆柱——圆锥组合壳或用截锥壳单元逼近任意母线的迴转壳, 在单元刚度和质量矩阵组集到总体结构刚度和质量矩阵以前, 需要将单元坐标系转换到总体结构坐标系. 其变换矩阵

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & & & \sin\varphi & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & -\sin\varphi & & \cos\varphi & & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

二、计算结果比较

我们曾对不同尺寸以及各种边界条件下的迴转壳在 441-B(Ⅲ)和 SIEMENS 7·738 型机上进行过大量计算, 表明编制的源程序是可靠的, 计算方法是可应用的.

单元刚度及质量矩阵组集后, 用一维数组变带宽存贮. 用子空间迭代法^[8]解广义特征值问题. 求迭代矢量时, 对总体结构矩阵进行三重因子分解, 可节省机时. 投影矩阵的特征值用广义 Jacobi 法或二次 Jacobi 法求解. 下面举三个例子.

(1) 圆柱壳

如图 2 所示悬臂圆柱壳. $E = 2.11 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$, $\nu = 0.3$, $\rho = 8.02 \times 10^{-6} \text{kg}\cdot\text{s}^2/\text{cm}^4$, 壳体尺寸单位为 cm(下同), 取 10 个单元. 其固有频率见表 1.

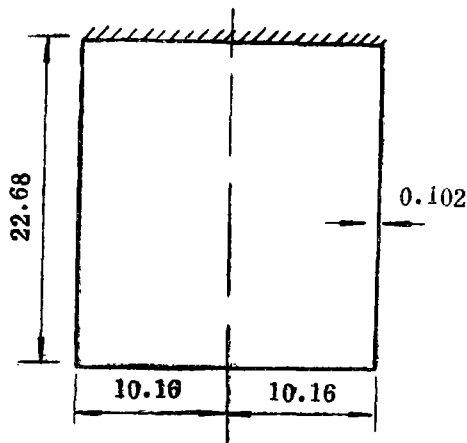


图 2

固有频率 (Hz)

表 1

i	j	0	1	2	3	4	5	6	7
本文	1	3506	2034	982.5	562.3	482.2	615.8	858.0	1166
	2	5790	5414	3402	2235	1588	1276	1228	1381
	3	7977	6951	5720	4317	3287	2605	2211	2068
文献[1]	1	3506	2032	980.6	562.5	485.2	619.9	861.7	
	2	5479	5412	3396	2228	1587	1287	1251	
	3	7954	6943	5720	4312	3280	2606	2229	
文献[2]	1	5486	2033	982.0	564.9	486.9	621.3	863.1	1170
	2	8055	5431	3409	2243	1598	1295	1258	1419
	3	8123	6986	5783	4378	3318	2632	2250	2126

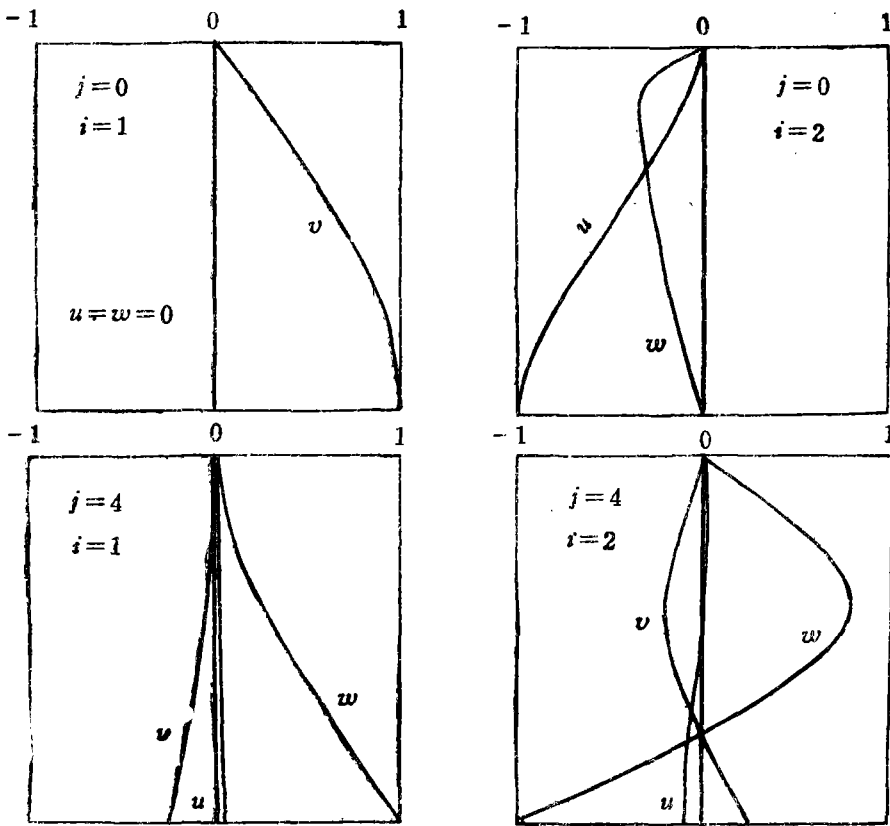


图 8

表中 i 是频率从低到高排列的序号(下同)。文献[1]中指出文献[2]中遗漏了一组反对称的扭转振动 ($j=0, i=1$)，本文也得此结果。文献[1]总自由度为 52，半带宽为 16。本文总自由为 50，半带宽为 10。从表 1 可见，本文的结果与文献[1]和[2]基本一致，在低频段本文的结果稍低于文献[1]和[2]。固有振型见图 3。

(2) 圆锥壳

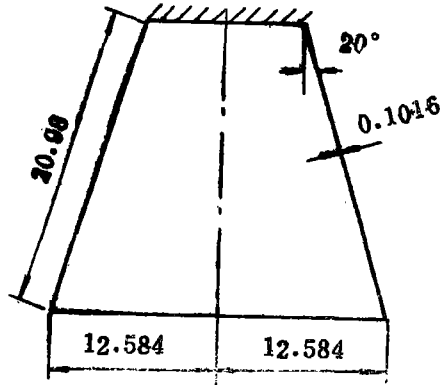


图 4

如图 4 所示悬臂圆锥壳。 E, ν 和 ρ 同例(1)，取 10 个单元。其固有频率见表 2。文
固有频率 (Hz) 表 2

	$i \setminus j$	2	3	4
本 文	1	544.6	331.9	353.3
	2	3134	2004	1436
	3	5691	4350	3302
文献[2]	1	544.8	335.3	361.2
	2	3140	2008	1455

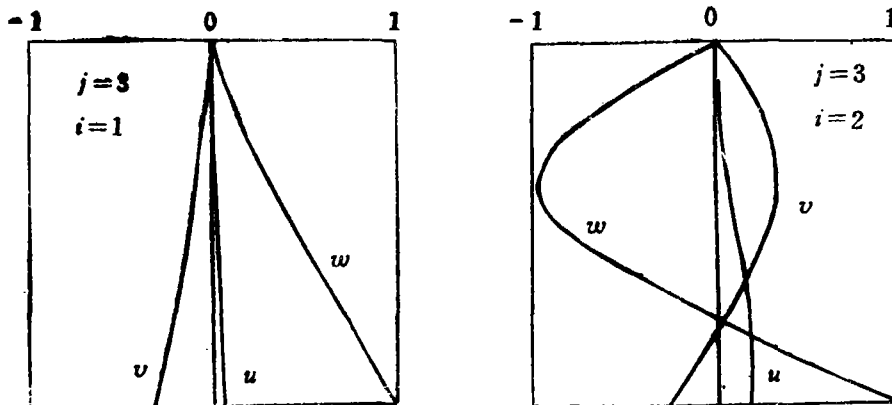


图 5

献[2]取8个单元,用高次位移函数,每单元自由度大于20,最后减缩为10.固有振型见图5.

(3) 圆柱——圆锥壳

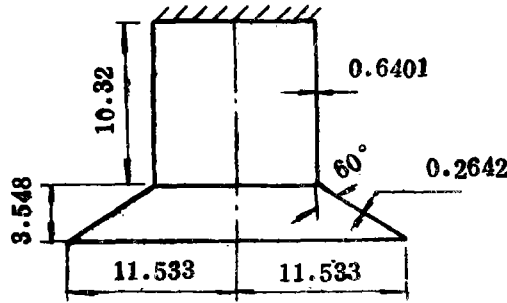


图 6

如图6所示悬臂圆柱——圆锥壳。 $E = 4.5712 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$, $\nu = 0.35$, $\rho = 1.7328 \times 10^{-6} \text{kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}^4$, 取20个单元,圆柱与圆锥部份各取10个单元.其固有频率见表3.

固有频率 (Hz) 表 3

	$i \setminus j$	2	3	4
本	1	943.0	827.9	1092
	2	3478	4449	4590
文	3	5072	6550	9457
文献[3]	1	870.9	871.7	

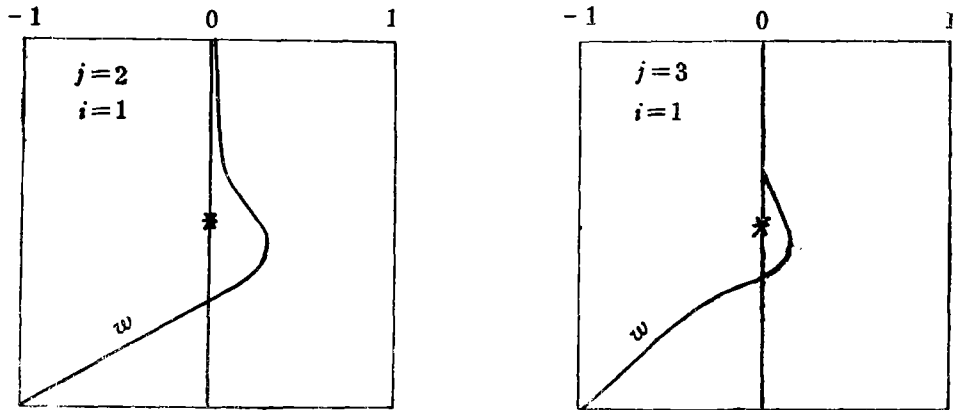


图 7

固有振型见图7. 图中*表示柱与锥的分界点,*的下部为锥壳. 图中的振型 w 是对总体结构坐标系画出的. 文献[3]中 u 与 v 取线性多项式, w 为三次多项式,每单元8个自由度,取32个单元.本文结果与文献[3]略有不同,最低频率相差4.9%,出现最低频率的周向波数亦不同.文献[3]中图11上没有柱壳部份的振型,且看不出柱与锥连接

圆附近的 w 值, 此值似应不等于零的。

从上面三个例子的比较中, 可以看出由于选取周向位移函数为三次多项式, 又引入了剪变应节点自由度, 使满足顺剪力为零的边界条件, 因此得到了比较好的结果。

本文承徐后华同志审阅, 并得到了于晏悦、张连举等同志不少帮助, 特致以谢意。

参 考 文 献

- [1] 北京大学固体力学教研室, 旋转壳的应力分析, 水利电力出版社, 1979.
- [2] Subir, K. S. and Philip, L. G., Free Vibration of Shells of Revolution Using FEM, ASCE, EM2, 283 (1974).
- [3] Ross, C. T. F., Finite Element for the Vibration of Cones and Cylinders, Int. J. Num. Meth. Engng, 9, 833 (1975).
- [4] Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method, 1977.
- [5] Новожилов, В. В., Теория тонких оболочек, 1962.
- [6] Warburton, G. B., The Dynamical Behaviour of Structures, 1976.
- [7] Brebbia, C. A. et al., Vibration of Engineering Structures, 1976.
- [8] Bathe, K. J. and Wilson, E. L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, 1976.

A Computation of the Vibration Characteristics of Conical Frustum Shell

Zhou Ke-jian

Abstract

The finite element method is adopted for computation of axisymmetrical conical frusta. The normal displacement function w and circumferential displacement function v are given by two cubic polynomials, the longitudinal displacement function u is given by linear polynomial. Nodal degrees of freedom can extract three displacements, one rotation and one shear strain on the nodal circle. The computed results had compared with referencies[1], [2] and [3]. This method and computer program are applicable to find vibration characteristics of conical frustum shell.