

α - β 法中数据粗量化输入时输出 误差上限的分析

郭九汉 孙仲康

提 要 本文从 α - β 恒增益滤波器的估值递推方程出发, 推导了数据粗量化输入时, 该系统因量化误差引起的输出估值误差的上限公式, 并针对 α - β 滤波系统稳定域中三个不同区域的粗量化误差上限进行了数值计算。计算结果表明, 这三个区域的误差上限数值范围略有不同, 但总的来说, 该系统在稳态工作情况下输出粗量化误差的上限在 $(0.5q \sim 0.75q)$ 之间。显然由这种方法计算出的误差上限比实际输出的粗量化误差要大, 但对于输入量化误差不能被看作均匀分布白噪声的粗量化输入的情况, 这种分析方法可供误差分析的参考。

前 言

对雷达输出的目标数据(距离、角度等)进行数字处理前, 必须将数据由连续的模拟量经过采样保持、分层量化后转换为离散的二进制数码。在量化过程中, 由于是将连续模拟量用若干个离散的分层值来逼近, 这就不可避免地将引入量化误差, 或称之为量化噪声。

通常, 当目标数据分层量化的间隔(又称量化单位) q 很小, 且采样周期很短时, 可以把量化误差 e_q 看作为在 $(-\frac{q}{2}, \frac{q}{2})$ 区间里均匀分布的白噪声, 则量化噪声的方差:

$$\sigma_q^2 = \frac{q^2}{12}$$

从上可见, 这相当于在数据的随机误差中附加了一项随机的量化误差 e_q 。 e_q 是方差为 σ_q^2 , 均匀分布的白噪声。经过数据处理, 方差得到进一步压缩, 这时量化噪声对总随机误差的影响较小, 而且是可以估算出来的。

在实际问题中, 还会碰到另一种情况: 量化单位 q 很大(例如要求测距精度为 10 米, 而 $q=40$ 米), 而且目标运动状态变化很慢, 采样周期很长(例如从几秒到十几

秒)。在这种情况下,不能把量化误差再看作是各点互不相关的白噪声了。一些滤波估值方法的结果是在输入误差为白噪声的情况下导出的,对这种粗量化的误差不再适用。而由于 q 很大,由粗量化所引起的对滤波系统的影响又不容忽略。怎样分析和估量一个滤波系统对这种粗量化误差的输出响应呢?这是本文所要探讨的问题。

下面讨论经过粗量化的目标数据加至 α - β 恒增益滤波器输入端时,滤波器输出的瞬时误差上限的估算问题。

一、误差上限公式的推导

画出恒增益 α - β 滤波系统流程图。

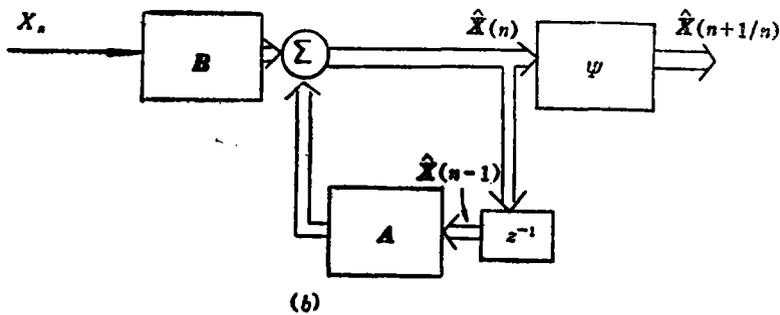
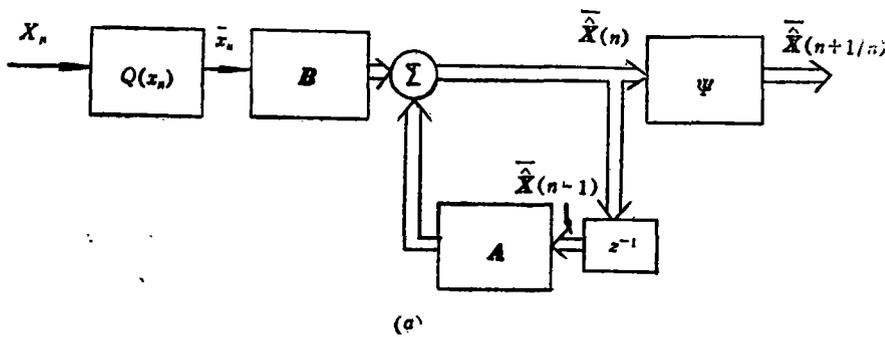


图1 α - β 滤波系统流程图

X_n 为雷达所提供的测量数据(例如距离)。

图1(a)为输入数据经过量化的滤波系统流程图。图中 $Q(X_n)$ 为量化器, x_n^* 为量化的目标数据。 A 和 B 为两矩阵。

$$A = \begin{bmatrix} (1-\alpha) & (1-\alpha)T \\ -\frac{\beta}{T} & (1-\beta) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{\beta}{T} \end{bmatrix}$$

经过量化滤波处理后的第 n 次迭代估值为:

$$\widehat{\mathbf{X}}_{(n)} = [\widehat{X}_{(n)} \widehat{\dot{X}}_{(n)}]^T = \widehat{\mathbf{X}}_n$$

由图 1 (a) 可得:

$$\overline{\hat{X}}_n = A \overline{\hat{X}}_{n-1} + B \bar{X}_n \quad (1)$$

图 1 (b) 为在滤波系统中不加量化器 (即假设输入数据不经过量化) 的情况, 则有

$$\hat{X}_n = A \hat{X}_{n-1} + B X_n \quad (2)$$

有量化与无量化估值之间的差, 即为由数据量化所引起的系统输出的估值误差, 我们简称之为粗量化误差。粗量化误差 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 可由 (1) 式减去 (2) 式得到:

$$\overline{\hat{X}}_n - \hat{X}_n = A (\overline{\hat{X}}_{n-1} - \hat{X}_{n-1}) + B (\bar{X}_n - X_n)$$

即

$$\begin{bmatrix} \overline{\hat{X}}_n - \hat{X}_n \\ \overline{\hat{X}}_{n-1} - \hat{X}_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \overline{\hat{X}}_{n-1} - \hat{X}_{n-1} \\ \overline{\hat{X}}_{n-2} - \hat{X}_{n-2} \end{bmatrix} + B (\bar{X}_n - X_n)$$

令

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \overline{\hat{X}} - \hat{X} & \varepsilon_{\dot{x}} &= \overline{\hat{X}} - \hat{X} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_{\dot{x}}]^T & & (n \text{ 采样时刻输出粗量化误差}) \\ \varepsilon_{q_n} &= \bar{X}_n - X_n & & (n \text{ 采样时刻输入量化误差}) \end{aligned}$$

则有

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = A \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1} + B \varepsilon_{q_n} = A \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1} + \mathbf{U}_n \quad (3)$$

式中

$$\mathbf{U}_n = \begin{bmatrix} U_x \\ U_{\dot{x}} \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} \alpha \varepsilon_{q_n} \\ \frac{\beta}{T} \varepsilon_{q_n} \end{bmatrix} \quad (4)$$

(3) 式可视为由量化所引起的 (输出) 粗量化误差 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的递推传播方程, 而其中 \mathbf{U}_n 为量化所引起的扰动。

下面分析估算稳态时的粗量化误差即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的值。

先求解一阶差分方程 (3)。分别依次令 $n=1, n=2, \dots, n=n$ 代入 (3) 式, 即可推演得到 (3) 式的通解:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = A^n \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \sum_{p=1}^n A^{n-p} \mathbf{U}_p \quad (5)$$

则稳态粗量化误差为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varepsilon}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n A^{n-p} \mathbf{U}_p \quad (6)$$

(6) 式中第一项实际上为起始量化误差 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ 对稳态粗量化误差的响应分量。由于我们所考虑的 α - β 滤波系统是一个稳定系统 (后面讨论), 而且它对位置阶跃输入是无稳态误差的, 因此当 n 趋近于无穷大时, 初始误差的影响已消失, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n \varepsilon_0 = 0$$

故有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \varepsilon_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n A^{n-p} U_p$$

令 $A^n = \Phi(n)$, 且令 $m = n - p$, 则上式写成

$$\varepsilon_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{n-1} \Phi(m) U_{n-m} \quad (7)$$

(7)式中

$$U_{n-m} = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix}_{n-m} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ T \end{bmatrix} \varepsilon_{q, n-m}$$

其中 $\varepsilon_{q, n-m}$ 为在 $(n-m)$ 采样时刻系统输入的量化误差。由量化原理知, 在量化时, 以量化间隔 (等于量化单位 q) 的中线为界, 数据超过中线归上层, 低于中线归下层, 故数据的量化误差值 (在任意采样时刻) 都不会超出 $(-\frac{q}{2}, \frac{q}{2})$ 区间范围, 则:

$$-\frac{q}{2} \leq \varepsilon_{q, n-m} \leq \frac{q}{2}, \quad \text{即 } |\varepsilon_{q, n-m}| \leq \frac{q}{2}$$

(7)式两边取绝对值, 并代入 U_{n-m} , 得:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_\infty| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{n-1} \Phi(m) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ T \end{bmatrix}^T \varepsilon_{q, n-m} \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{n-1} \left| \Phi(m) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ T \end{bmatrix}^T \right| \cdot \left| \varepsilon_{q, n-m} \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{n-1} \left| \Phi(m) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ T \end{bmatrix}^T \right| \frac{q}{2} \end{aligned}$$

因此得

$$|\varepsilon_\infty| \leq \frac{q}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \Phi(n) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ T \end{bmatrix}^T \right| \quad (8)$$

(8)式即为估算粗量化误差上限的公式。

(8)式中的 $\Phi(n)$ 可求解得出为 (见附录一):

$$\Phi(n) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(n) & \phi_{12}(n) \\ \phi_{21}(n) & \phi_{22}(n) \end{bmatrix}$$

$$\phi_{11}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z - (1 - \beta)}{z^2 - (2 - \alpha - \beta)z + (1 - \alpha)} z^n dz \quad (9)$$

$$\phi_{12}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{(1 - \alpha)T}{z^2 - (2 - \alpha - \beta)z + (1 - \alpha)} z^n dz \quad (10)$$

$$\phi_{21}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{-\frac{\beta}{T}}}{z^2 - (2 - \alpha - \beta)z + (1 - \alpha)} z^n dz$$

$$\phi_{22}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z - (1 - \alpha)}{z^2 - (2 - \alpha - \beta)z + (1 - \alpha)} z^n dz$$

我们主要对位置数据的粗量化误差感兴趣(速度数据粗量化误差也可作类似讨论), 而位置数据的粗量化误差上限只与 $\phi_{11}(n)$ 和 $\phi_{12}(n)$ 有关。由(8)式得位置数据粗量化误差上限公式:

$$|\varepsilon_{x\infty}| \leq \frac{q}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \phi_{11}(n)\alpha + \phi_{12}(n)\frac{\beta}{T} \right| \quad (11)$$

我们将从(11)式出发来具体求粗量化误差上限。从上式可见粗量化误差上限的计算, 归结到对 $\phi_{11}(n)$ 和 $\phi_{12}(n)$ 的计算问题。(9)和(10)式分母特征方程是:

$$z^2 - (2 - \alpha - \beta)z + (1 - \alpha) = 0$$

可化为

$$(z - p_1)(z - p_2) = 0$$

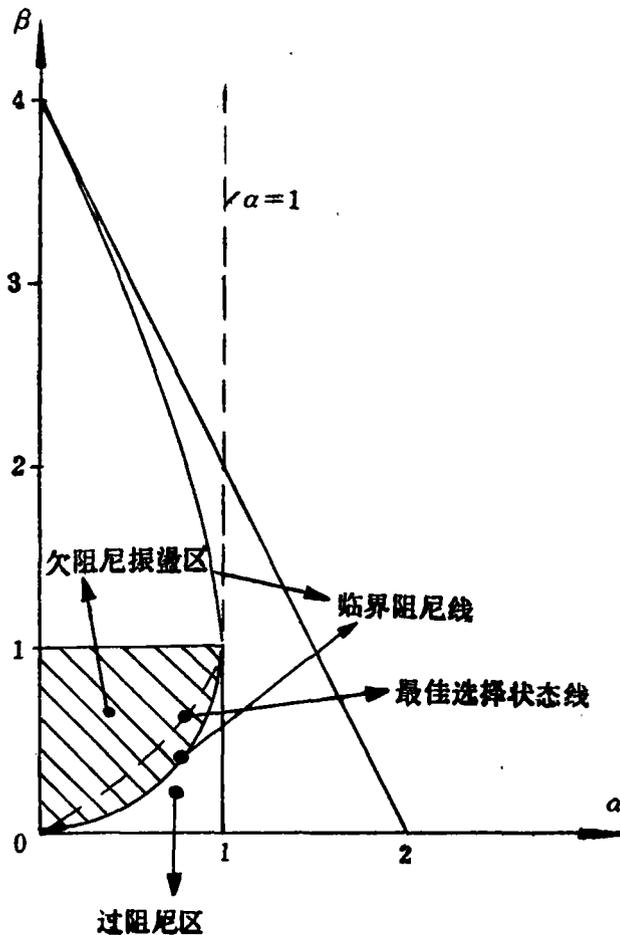


图 2 $\alpha-\beta$ 滤波器三角形稳定线

其中 p_1 、 p_2 为特征方程的两个根。

$$p_{1,2} = \frac{(2 - \alpha - \beta) \pm \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\beta}}{2} \quad (12)$$

p_1 和 p_2 有三种不同情况：

(1) $(\alpha + \beta)^2 - 4\beta > 0$, p_1 、 p_2 为两不等实根。

(2) $(\alpha + \beta)^2 - 4\beta = 0$, p_1 、 p_2 为两相等实根。

(3) $(\alpha + \beta)^2 - 4\beta < 0$, p_1 、 p_2 为一对共轭复根。

这三种不同情况刚好对应着 α - β 滤波系统三角形稳定域的三个不同的区域（见图 2）。

第一种情况对应于过阻尼区，第二种情况对应于临界阻尼线，第三种情况则对应于欠阻尼振荡区。

对于实际的 α - β 系统来讲， α 、 β 的取值一般都满足下面关系：

$$0 < \alpha < 1$$

$$0 < \beta < 1$$

即 α 、 β 都落在图 2 中的边长为 1 的正方形中。

显然对应于这三个区域由 (9) 和 (10) 式计算出的 $\phi_{11}(n)$ 与 $\phi_{12}(n)$ 是不同的，因而代入到 (11) 式得到的粗量化误差上限计算公式也不同。下面我们按照欠阻尼振荡区、临界阻尼线和过阻尼区这三种情况来计算粗量化误差上限。

二、三种状态下的粗量化误差上限

(一) 过阻尼状态

此时由 (12) 式得：

$$p_{1,2} = a \pm b \quad \text{为两不等实根}$$

式中

$$a = \frac{2 - \alpha - \beta}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\beta}}{2}$$

将 p_1 、 p_2 代入 (9) 和 (10) 式求出 $\phi_{11}(n)$ 和 $\phi_{12}(n)$ ，再将 $\phi_{11}(n)$ 和 $\phi_{12}(n)$ 代入 (11) 式，经过化简，最后可得过阻尼状态下的粗量化误差上限的计算公式（见附录二）：

$$|\varepsilon_{X\infty}| \leq \frac{q}{4b} \left\{ \frac{(\alpha - \beta - \alpha p_2)}{1 - p_2} (1 - 2p_2^{K+1}) - \frac{(\alpha - \beta - \alpha p_1)}{1 - p_1} (1 - 2p_1^{K+1}) \right\} \quad (13)$$

上式中 K 由下式确定：

$$S = \frac{\lg \frac{(\alpha - \beta - \alpha p_2)}{(\alpha - \beta - \alpha p_1)}}{\lg \frac{p_1}{p_2}} \quad (14)$$

由上式求出 S ， K 取小于 S 的最大正整数。

现将过阻尼区中几个点的计算结果列表如下：

表 一

α	β	b	P_1	P_2	S	K	$ \varepsilon_{X\infty} \leq$
0.5	0.06	0.136	0.856	0.584	6.57	6	0.574 q
0.6	0.1	0.15	0.8	0.5	4.9	4	0.568 q
0.7	0.1	0.245	0.845	0.355	4.3	4	0.543 q
0.8	0.1	0.32	0.87	0.23	3.65	3	0.524 q
0.8	0.2	0.223	0.723	0.276	2.956	2	0.541 q
0.85	0.3	0.175	0.6	0.25	2.74	2	0.543 q
0.9	0.1	0.387	0.887	0.113	3	3	0.510 q
0.9	0.2	0.32	0.77	0.13	2.48	2	0.519 q
0.9	0.3	0.245	0.645	0.155	2.2	2	0.526 q
0.9	0.4	0.15	0.5	0.2	2.2	2	0.53 q

(二) 临界阻尼状态

此时 P_1, P_2 为相等重根:

$$P_1 = P_2 = \frac{2 - \alpha - \beta}{2} = a$$

代入(9)和(10)式求出

$$\begin{aligned} \phi_{11}(n) &= (n+1)a^n - n(1-\beta)a^{n-1} \\ \phi_{12}(n) &= n(1-\alpha)Ta^{n-1} \end{aligned}$$

将 $\phi_{11}(n)$ 和 $\phi_{12}(n)$ 代入(11)式, 经过化简后得到临界阻尼状态下的粗量化误差上限的计算公式:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{X\infty}| \leq \frac{q}{2} \left\{ \frac{(\alpha - \beta - a\alpha)}{\beta} \left[2(K+1)a^K - 2Ka^{K+1} - 1 \right] \right. \\ \left. + \frac{\alpha(1-2a^{K+1})}{1-a} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

上式中的 K 由下式确定:

$$S = \frac{a\alpha}{\alpha - \beta - a\alpha} \quad (16)$$

由(16)式求出 S , K 取小于 S 的最大正整数。

现将临界阻尼线上诸点粗量化误差上限计算结果列表如下:

表二

α	β	a	K	$ \varepsilon_{x\infty} \leq$
0.2	0.01	0.895	16	0.613 q
0.3	0.027	0.837	11	0.617 q
0.4	0.051	0.775	7	0.606 q
0.5	0.086	0.707	5	0.594 q
0.6	0.135	0.632	4	0.583 q
0.7	0.204	0.548	3	0.572 q
0.8	0.305	0.447	2	0.558 q
0.9	0.467	0.316	1	0.536 q
0.95	0.6	0.225	1	0.528 q
0.973	0.7	0.164	1	0.518 q
0.988	0.8	0.106	1	0.509 q
0.997	0.9	0.052	1	0.503 q

(三) 欠阻尼振荡状态

这时 P_1 和 P_2 为一对共轭复根:

$$P_{1,2} = \frac{(2 - \alpha - \beta) \pm j\sqrt{4\beta - (\alpha + \beta)^2}}{2} = C \pm jd$$

将 P_1 和 P_2 代入(9)、(10)式求出 $\phi_{11}(n)$ 和 $\phi_{12}(n)$, 再将 $\phi_{11}(n)$ 和 $\phi_{12}(n)$ 代入(11)式, 经过变换化简后, 得到欠阻尼振荡状态下粗量化误差上限计算公式:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{x\infty}| &\leq \frac{rq}{2d} \sum_{n=0}^K R^n |\sin(n\psi + \theta)| \\ &\quad + \frac{rq}{2d} \times \frac{R^{K+1}}{1-R} \\ &= F + G \end{aligned} \quad (17)$$

式中:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{4\beta - (\alpha + \beta)^2} / 2 \\ R &= \sqrt{1 - \alpha} (< 1), \quad r = \beta R \\ \psi &= \sin^{-1} \frac{d}{R}, \quad \theta = \sin^{-1} \frac{\alpha d}{r} \end{aligned}$$

式中 K 为正整数, 其取值可根据(17)式中级数的收敛快慢来定。当 R 大时, 收敛慢, K 应取大些, 否则反之。

按照给定暂态平方差使速度估值方差压缩系数最小的准则所得到的 α - β 最佳选择状态线就位于欠阻尼振荡区。在此最佳状态线上, α 与 β 满足下面关系式:

$$\beta = \frac{\alpha^2}{2-\alpha}$$

现将最佳选择状态线上各点的粗量化误差上限计算结果以表列出如下：

表 三

α	β	d	R	K	ψ°	θ°	F	G	$ \varepsilon_{x_\infty} \leq$
0.1	0.005	0.0473	0.948	100	2.86	87	0.718 q	0.0044 q	0.722 q
0.2	0.022	0.0983	0.894	100	6.3	89.4	0.696 q	$1.15 \times 10^{-5}q$	0.696 q
0.3	0.053	0.148	0.837	100	10.18	89.94	0.681 q	$1.4 \times 10^{-8}q$	0.681 q
0.4	0.1	0.194	0.775	50	14.48	90	0.667 q	≈ 0	0.667 q
0.5	0.167	0.236	0.707	50	19.51	89.88	0.654 q	≈ 0	0.654 q
0.6	0.257	0.270	0.632	50	25.36	89.96	0.639 q	≈ 0	0.639 q
0.7	0.377	0.295	0.548	50	32.58	90	0.616 q	≈ 0	0.616 q
0.8	0.53	0.296	0.447	50	41.5	89.51	0.59 q	≈ 0	0.59 q
0.9	0.736	0.26	0.316	50	54.86	89.95	0.561 q	≈ 0	0.561 q

三、结 束 语

以上对三种状态的粗量化误差上限进行了分析和计算。计算结果已分别列入表中。

粗量化误差上限的含义是，当对输入数据进行粗量化时，从 $\alpha-\beta$ 滤波系统输出数据的、因量化而产生的瞬时误差，不会大于此粗量化误差上限。此误差上限是要比实际的粗量化误差要大。但通过分析和计算，使我们对粗量化误差的大小有了数量级的概念。

估算各种状态下粗量化误差上限的目的有二，其一是对选择 α 、 β 值提供参考，再一点是根据所要求的精度对选择量化单位 q 的大小提供参考。

附录一 $\Phi(n)$ 的求解

已知

$$\Phi(n) = A^n = \begin{bmatrix} (1-\alpha) & (1-\alpha)T \\ -\frac{\beta}{T} & (1-\beta) \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \phi_{11}(n) & \phi_{12}(n) \\ \phi_{21}(n) & \phi_{22}(n) \end{bmatrix}$$

重写(5)式： $\varepsilon_n = A^n \varepsilon_0 + \sum_{p=1}^n A^{n-p} U_p$

令系统输入 $X_p = 0 (p=1 \sim n)$ ，则 $U_p = 0$ ，(5)式仍成立，于是有：

$$\varepsilon_n = A^n \varepsilon_0 = \Phi(n) \varepsilon_0 = A \varepsilon_{n-1} \tag{*}$$

上式两边求 z 变换：

$$z[\epsilon_n] = z[A\epsilon_{n-1}] = Az[\epsilon_{n-1}]$$

由 z 变换定义得:

$$z[\epsilon_{n-1}] = \epsilon_{-1} + z^{-1}z[\epsilon_n]$$

则:

$$\begin{aligned} z[\epsilon_n] &= A\{\epsilon_{-1} + z^{-1}z[\epsilon_n]\} \\ &= \epsilon_0 + Az^{-1}z[\epsilon_n] \end{aligned}$$

移项整理得:

$$z[\epsilon_n] = [I - Az^{-1}]^{-1}\epsilon_0$$

对上式求 z 反变换得:

$$\epsilon_n = z^{-1}\{[I - Az^{-1}]^{-1}\}\epsilon_0$$

上式与(*)式比较得:

$$\Phi(n) = A^n = \begin{bmatrix} \phi_{11}(n) & \phi_{12}(n) \\ \phi_{21}(n) & \phi_{22}(n) \end{bmatrix} = z^{-1}\{[I - Az^{-1}]^{-1}\}$$

将 A 矩阵代入得方形矩阵:

$$\begin{aligned} [I - Az^{-1}]^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 - (1-\alpha)z^{-1} & -(1-\alpha)Tz^{-1} \\ \frac{\beta}{T}z^{-1} & 1 - (1-\beta)z^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 1 - (1-\beta)z^{-1} & (1-\alpha)Tz^{-1} \\ -\frac{\beta}{T}z^{-1} & 1 - (1-\alpha)z^{-1} \end{bmatrix}}{\det[I - Az^{-1}]} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} z^2 - (1-\beta)z & (1-\alpha)Tz \\ -\frac{\beta}{T}z & z^2 - (1-\alpha)z \end{bmatrix}}{z^2 - (2-\alpha-\beta)z + (1-\alpha)} \end{aligned}$$

采用留数法对方阵 $[I - Az^{-1}]^{-1}$ 的四个元求 z 反变换, 即得

$$\phi_{11}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{z - (1-\beta)}{z^2 - (2-\alpha-\beta)z + (1-\alpha)} z^n dz$$

$$\phi_{12}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{(1-\alpha)T}{z^2 - (2-\alpha-\beta)z + (1-\alpha)} z^n dz$$

$\phi_{21}(n)$ 和 $\phi_{22}(n)$ 也可类似得到, 不写了。

附录二 三种状态粗量化误差上限计算公式的推导

一、过阻尼状态

α 、 β 满足如下条件: (1) $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$

(2) $(\alpha + \beta)^2 > 4\beta$

此时特征方程的两个根 P_1 、 P_2 为两不等实根:

$$P_{1,2} = \frac{1}{2} [(2-\alpha-\beta) \pm \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\beta}] = a \pm b$$

不难证明下面两点: (1) $\alpha > \beta, a > b > 0$

(2) $0 < P_2 < P_1 < 1$

由(9)式和(10)式得

$$\begin{aligned} \phi_{11}(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{z - (1-\beta)}{(z - P_1)(z - P_2)} z^n dz \\ &= (z - P_1) \times \frac{z - (1-\beta)}{(z - P_1)(z - P_2)} z^n \Big|_{z=P_1} \\ &\quad + (z - P_2) \times \frac{z - (1-\beta)}{(z - P_1)(z - P_2)} z^n \Big|_{z=P_2} \\ &= \frac{P_1 - (1-\beta)}{P_1 - P_2} P_1^n + \frac{P_2 - (1-\beta)}{P_2 - P_1} P_2^n \\ \phi_{12}(n) &= \frac{(1-\alpha)T}{P_1 - P_2} P_1^n + \frac{(1-\alpha)T}{P_2 - P_1} P_2^n \end{aligned}$$

将 $\phi_{11}(n)$ 和 $\phi_{12}(n)$ 式代入(11)式并化简得:

$$\begin{aligned} |e_{x\infty}| &\leq \frac{q}{4b} \sum_{n=0}^{\infty} \left| (\alpha - \beta - \alpha P_2) P_2^n - (\alpha - \beta - \alpha P_1) P_1^n \right| \\ &= \frac{q}{4b} \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| \end{aligned} \quad (**)$$

由于和式各项带有绝对值符号, 这使此无限项和式运算出现困难。必须设法将和式内的绝对值符号去掉。为此需先分析函数 $f(n)$ 随 n 变化的取值趋势。

我们作函数

$$g(n) = \lg \frac{(\alpha - \beta - \alpha P_2) P_2^n}{(\alpha - \beta - \alpha P_1) P_1^n}$$

显然 $g(n)$ 与 $f(n)$ 有如下对应关系:

当 $g(n) > 0$ 时, $f(n) > 0$.

当 $g(n) = 0$ 时, $f(n) = 0$.

当 $g(n) < 0$ 时, $f(n) < 0$.

这样, 我们可以用对 $g(n)$ 的分析来代替对 $f(n)$ 的分析。

$$g(n) = \lg \frac{\alpha - \beta - \alpha P_2}{\alpha - \beta - \alpha P_1} + n \lg \frac{P_2}{P_1}$$

显然第一项为大于零的常数, 而第二项为斜率为负的直线。作出 $g(n) \sim n$ 图形。

从图可见 $g(n)$ 为一条斜率为 $\frac{dg(n)}{dn} = -\lg \frac{P_1}{P_2}$ 的直线, 它与 n 轴相交于 S 点。在

图 3 的具体情况下 $S = 4.9$ 。令 $g(s) = 0$, 求得:

$$C = \frac{1}{2}(2 - \alpha - \beta), \quad d = \sqrt{4\beta - (\alpha + \beta)^2}$$

这时 $\phi_{11}(n)$ 、 $\phi_{12}(n)$ 具有与过阻尼状态完全一样的形式，只是 P_1 和 P_2 为一对共轭复根。将 $\phi_{11}(n)$ 与 $\phi_{12}(n)$ 代入(11)式，得：

$$|e_{x\infty}| \leq \frac{q}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{P_1 - P_2} [(\alpha P_1 - \alpha + \beta)P_1^n - (\alpha P_2 - \alpha + \beta)P_2^n] \right|$$

进行化简：

令 $P_1 = C + jd = Re^{j\psi}$, $P_2 = C - jd = Re^{-j\psi}$

$$R = \sqrt{C^2 + d^2} = \sqrt{1 - \alpha} < 1, \quad \psi = \sin^{-1} \frac{d}{R}$$

$$\alpha P_1 - \alpha + \beta = \alpha C - \alpha + \beta + jad = re^{j\theta}$$

$$\alpha P_2 - \alpha + \beta = \alpha C - \alpha + \beta - jad = re^{-j\theta}$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{ad}{r}$$

$$r = \sqrt{(\alpha C - \alpha + \beta)^2 + (ad)^2} = \beta R$$

将以上各参数代入上面 $|e_{x\infty}|$ 式中，经化简得：

$$\begin{aligned} |e_{x\infty}| &\leq \frac{q}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{Re^{j\psi} - Re^{-j\psi}} [rR^n e^{j(n\psi+\theta)} - rR^n e^{-j(n\psi+\theta)}] \right| \\ &= \frac{rq}{2d} \sum_{n=0}^{\infty} R^n |\sin(n\psi + \theta)| \end{aligned}$$

上式很难化成集总的求和公式。只能取有限项逐项计算后再相加。至于取的项数多少，由级数收敛情况来定，当 $R (< 1)$ 大时，收敛的慢，项数应取多些， R 小时，取的项数可少。为了估算取有限项计算所造成的误差，可以令余项和式各项的 $|\sin(n\psi + \theta)|$ 为 1，于是可将略去余项和式所造成的误差估算出来。

$$\begin{aligned} |e_{x\infty}| &\leq \frac{rq}{2d} \sum_{n=0}^K R^n |\sin(n\psi + \theta)| + \frac{rq}{2d} \sum_{n=K+1}^{\infty} R^n \\ &= \frac{rq}{2d} \sum_{n=0}^K R^n |\sin(n\psi + \theta)| + \frac{rq}{2d} \times \frac{R^{K+1}}{1-R} \\ &= F + G \end{aligned}$$

上式便为欠阻尼振荡状态的粗量化误差上限计算公式。

三、临界阻尼状态

α 、 β 满足下面条件：(1) $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$

$$(2) (\alpha + \beta)^2 = 4\beta$$

此时 $P_1 = P_2 = a = \frac{1}{2}(2 - \alpha - \beta)$ 为相等实根，且 $0 < a < 1$ ，则可求出：

$$\begin{aligned} \phi_{11}(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{z^{n+1} - (1-\beta)z^n}{(z-a)^2} dz \\ &= (n+1)a^n - n(1-\beta)a^{n-1} \end{aligned}$$

$$\phi_{12}(n) = n(1-\alpha)T a^{n-1}$$

将 $\phi_{11}(n)$ 与 $\phi_{12}(n)$ 代入(11)式中, 经化简得:

$$|\varepsilon_{X\infty}| \leq \frac{q}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha(n+1)a^n - (\alpha-\beta)na^{n-1}|$$

$$= \frac{q}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |W(n)| \quad (***)$$

设法去掉和式内绝对值符号, 先分析函数 $W(n)$ 随 n 变化的取值趋势。为此作函数:

$$V(n) = \lg \frac{\alpha(n+1)a^n}{(\alpha-\beta)na^{n-1}} = \lg \frac{n+1}{n} + \lg \frac{\alpha}{\alpha-\beta} + \lg a$$

显然当 $V(n) > 0$, $V(n) = 0$, $V(n) < 0$ 时 $W(n)$ 也有对应关系, 故可以用对 $V(n)$ 的分析来代替对 $W(n)$ 分析。

上面 $V(n)$ 式的第一、二项大于零, 第三项小于零。 $V(n) \sim n$ 曲线如图 4 所示。

从图可见 $V(n)$ 为单调下降的曲线, 其斜率 $\frac{dV(n)}{dn} = -\frac{1}{n(n+1)}$, 它与 n 轴只有一个交点 S 。

由 $V(s) = 0$, 得:

$$S = \frac{\alpha\alpha}{\alpha - \beta - \alpha\alpha}$$

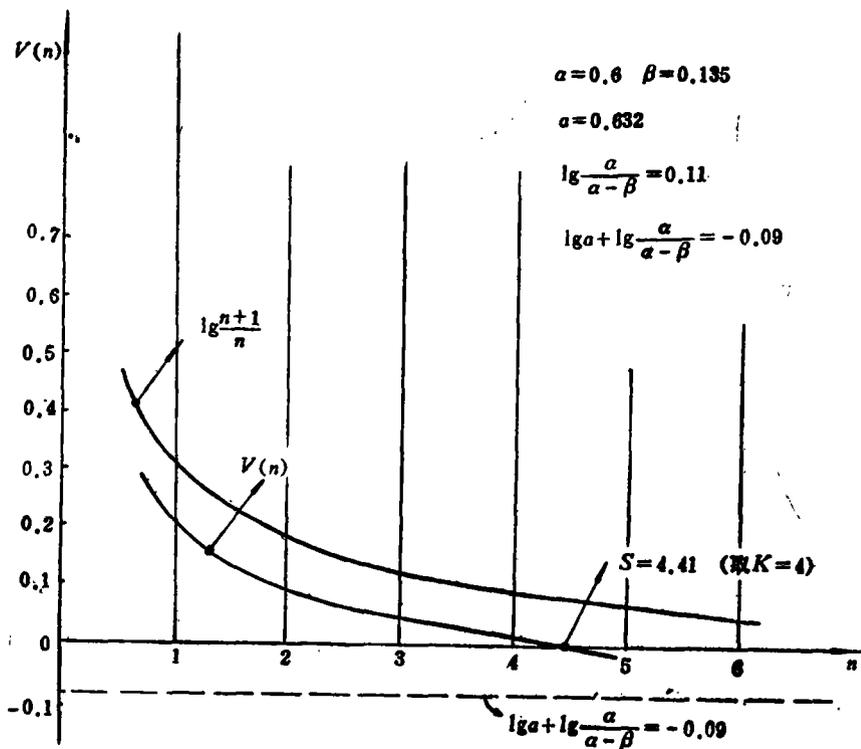


图 4

取 K 为小于 S 的最大正整数, 则显然当 $n \leq K$ 时, $W(n) > 0$; $n > K$ 时, $W(n) < 0$, 即

$$\begin{aligned} n \leq K \text{ 时, } & |W(n)| = W(n) \\ n > K \text{ 时, } & |W(n)| = -W(n) \end{aligned}$$

代入(*)式, 则:

$$\begin{aligned} |e_{X\infty}| &\leq \frac{q}{2} \sum_{n=0}^K W(n) - \frac{q}{2} \sum_{n=K+1}^{\infty} W(n) \\ &= \frac{q}{2} \sum_{n=0}^K [\alpha(n+1)a^n - (\alpha - \beta)na^{n-1}] \\ &\quad - \frac{q}{2} \sum_{n=K+1}^{\infty} [\alpha(n+1)a^n - (\alpha - \beta)na^{n-1}] \end{aligned}$$

不难证明下列各级数求和公式: ($a < 1$)

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad \sum_{n=0}^K a^n = \frac{1-a^{K+1}}{1-a}, \quad \sum_{n=K+1}^{\infty} a^n = \frac{a^{K+1}}{1-a}$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} na^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$$

$$(3) \sum_{n=0}^K na^{n-1} = \frac{1-a^K}{(1-a)^2} - \frac{Ka^K}{1-a}$$

$$(4) \sum_{n=K+1}^{\infty} na^{n-1} = \frac{(K+1)a^K - Ka^{K+1}}{(1-a)^2}$$

$$(5) \beta = (1-a)^2$$

将以上各公式代入 $|e_{X\infty}|$ 式中, 经化简, 最后可得临界阻尼状态粗量化误差上限计算公式:

$$\begin{aligned} |e_{X\infty}| &\leq \frac{q}{2} \left\{ \frac{(\alpha - \beta - \alpha a)}{\beta} [2(K+1)a^K - 2Ka^{K+1} - 1] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(1-2a^{K+1})}{1-a} \right\} \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] D. P. Lindorff, "Theory of Sampled-Date Control Systems", John-Wiley & Sons Inc., 1965.
- [2] 史令悟, "雷达数据数字处理", 国防科大, 1978.5.
- [3] 史令益, "雷达信号数字处理", 长沙工学院, 1977.7.

The Upper Limit of Output Estimation Error for Coarse Quantized Input in $\alpha - \beta$ Filter

Guo Jiu-han Sun Zhong-kang

Abstract

Utilizing the recursive equation of estimation of the constant gain $\alpha - \beta$ filter, the upper limit of the output estimation error is derived for coarse quantized input data. Numerical results of the upper limit of output estimation error for three different regions in the stable triangle of $\alpha - \beta$ filter are evaluated. Although the detail values of upper limit in respect to the three different regions are slightly different, numerical results express that the upper limit values of output estimation error are in the range of $(0.5q \sim 0.75q)$. Obviously, the computed upper limit values of output estimation error are always larger than the instantaneous values of output error; but the concept of this upper limit is useful for error analysis when input quantization error can not be treated as a white noise with uniform distribution.