积分展开定理及其应用

凌 德 海

提 要 本文推证了一个积分展开定理。根据这个定理，一个闭区间上定义的具有展成泰勒级数条件的函数，可以在一个特定的基函数上展开，而其展式的系数总含有这个函数在该区间上的多重积分。然后给出一个将该定理应用于制导的例子。

一、问 题 的 提 出

为了对系统实现控制，通常要分析过程的时间序列和估计系统的干扰运动。传统的方法是测算离散的函数值，再结合模型进行平滑，滤波或外推。

这里论证一个积分展开定理，基于这个定理可以确立一种积分展开方法，即通过量测值的积分来描述，估算和控制系统的运动，使得计算模式统一，逻辑结构简单，便于在自控系统中实现。

命题指出：滿足一定条件的，在闭区间上定义的連续可微函数$f(t)$，不失一般性可以视为[0 1]区间，可以进行积分展开

$$f(t)=\sum_{i=1}^{m} i! f_i f^i(m,t)+0(\varepsilon) \tag{1}$$

这就是说，任意给定允许偏差$\varepsilon>0$，总存在自然数m，相应有与m有关的m个基函数$f^i(m,t)$，$i=1,2,\cdots,m$，有不等式

$$|f(t)-\sum_{i=1}^{m} i! f_i f^i(m,t)|<\varepsilon$$

对于一切$t\in[0,1]$一致成立。其中f_i表示函数$f(t)$在定区间$[0,1]$上的i重积分，即

$$f_i=\int_0^1\int_0^{t_i}\cdots\int_0^{t_3}\int_0^{t_2} f(t_1)dt_1dt_2\cdots dt_i$$

$f^i(m,t)$是与m有关的t的函数。

从工程的观点看，一个连续的测量信号$f(t)$可以用t的多项式函数来逼近，现在我们说明当$f(t)$是t的多项式时，展开式(1)是严格成立的。不妨设$f(t)$是t的$m-1$次多项式

$$p(m,t)=\sum_{i=1}^{m} b_{i-1}(m)t^{i-1} \tag{2}$$

系数$b_{i-1}(m)$写成与m有关，是因为这里的$m-1$次多项式是对眞实信号的逼近，用不同的阶次逼近时，系数可以是不相同的。

$p(m,t)$的i重积分用$p_i(m)$来表示，则有

本文1982年8月3日收到

$$p_i(m)=f_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

此时多项式的系数，可以根据m个联立方程组确定

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{i!(j-1)!}{(i+j-1)!}b_{j-1}=i!f_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{3}$$

或写成矩阵运算形式

$$\begin{pmatrix} \frac{1!0!}{1!} & \frac{1!1!}{2!} & \cdots\frac{1!(m-1)!}{m!} \\ \frac{2!0!}{2!} & \frac{2!1!}{3!} & \cdots\frac{2!(m-1)!}{(m+1)!} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{m!0!}{m!} & \frac{m!1!}{(m+1)!} & \cdots\frac{m!(m-1)!}{(2m-1)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1!f_1 \\ 2!f_2 \\ \vdots \\ m!f_m \end{pmatrix} \tag{4}$$

(4)式左端的方阵用记号C表示。用数学方法可以证明$|C|\neq 0$于是C^{-1}是存在的。

由(3)式解出$b_i(i=0,1,\cdots,m-1)$代入(2)式得

$$P(m,t)=(1,t,\cdots,t^{m-1})C^{-1}\begin{bmatrix} 1!f_1 \\ 2!f_2 \\ \vdots \\ m!f_m \end{bmatrix}$$

如果令
$$(f^1(m,t),f^2(m,t)\cdots f^m(m,t))=(1,t,\cdots,t^{m-1})C^{-1} \tag{5}$$

则有

$$f(t)=(f^1(m,t),f^2(m,t),\cdots,f^m(m,t))\begin{bmatrix} 1!f_1 \\ 2!f_2 \\ \vdots \\ m!f_m \end{bmatrix} \tag{6}$$

即表达式(1)严格成立。

二、定 理 的 准 备

引理 1

设有$n-1$个$n\times n$变换矩阵$P_k(k=2,3,\cdots,n)$，它的第i行j列元素记为$P_k(i,j)$

$$P_k(i,j)=\begin{cases} -C_n^{k-i} & 当i<j,j=k时 \\ 0 & 当i<j,j\neq k时 \\ 1 & 当i=j时 \\ 0 & 当i>j时 \end{cases} \tag{7}$$

$n-1$个变换矩阵的乘积　　$R=\prod_{k=2}^{n}P_k$

则有

1.　$R(i,j)=\begin{cases} 0, & 当i>j时 \\ R_1, & 当i=j时 \\ R_{j-i+1}, & 当i<j时 \end{cases}$

2． 有递推关系

$$R_1=1 \quad R_j=\sum_{i=1}^{j-1}-C_n^{j-i}R_i \quad (j=2,3,\cdots,n)$$

3． 表达式

$$R_j=(-1)^{j-1}C_{n+j-2}^{j-1} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

这里C_n^i是通常表示组合的记号，即$C_n^i=\dfrac{n!}{i!(n-i)!}$。

证明 首先写出$P_k(k=2,3\cdots,n)$的结构形式

$$P_2=\begin{pmatrix}1 & -C_n^1 & 0\cdots0\\ 0 & 1 & 0\cdots0\\ 0 & 0 & 1\cdots0\\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots\\ 0 & 0 & \cdots1\end{pmatrix} \quad P_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & -C_n^2 & 0\cdots0\\ 0 & 1 & -C_n^1 & 0\cdots0\\ 0 & 0 & 1 & 0\cdots0\\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1\end{pmatrix}\cdots$$

$$\cdots P_k=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots\cdots-C_n^{k-1} & 0\cdots0\\ 0 & 1 & \cdots\cdots-C_n^{k-2} & 0\cdots0\\ 0 & 0 & 1\cdots-C_n^{k-3} & 0\cdots0\\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 1\end{pmatrix}$$

矩阵P_k是$n\times n$单位阵和在第k列加上一些元素。

考虑$n\times n$矩阵$W_{j-1}=\prod_{k=2}^{j-1}P_k$ $(3\leqq k\leqq n)$，设它的第一行元素记为$\overline{W}_{j-1}(1)$，则$\overline{W}_{j-1}(1)=(R_1\ R_2\ \cdots\ R_{j-1}\ 0\cdots0)$．根据定义$\overline{W}_j(1)=\overline{W}_{j-1}(1)P_j$，并利用矩阵$P_j$是单位阵加上第$j$列$\begin{pmatrix}-C_n^{j-1}\\ -C_n^{j-2}\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$这一性质，用数学归纳法不难证出

$$\overline{W}_j(1)=(R_1\ R_2\ \cdots R_j\ 0\cdots0)$$

和关系式

$$R_j=-C_n^{j-1}R_1-C_n^{j-2}R_2\cdots\cdots-C_n^1R_{j-1} \tag{8}$$

如果对第二行矢量进行分析，类似得到

$\overline{R}(2)=(0\ R_1\ R_2\ \cdots R_{n-1})$如此等等。故$R$的结构形式为

$$R=\begin{pmatrix}R_1 & R_2 & \cdots\cdots R_n\\ 0 & R_1 & \cdots\cdots R_{n-1}\\ 0 & 0 & R_1\ \cdots\cdots\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ 0\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & R_1\end{pmatrix}$$

这就是结论1，关系式(8)就是结论2．下面证明结论3，为此将结论2写成等价形式

$$Q_n\begin{bmatrix}R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\text{或}\begin{bmatrix}R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_n\end{bmatrix}=Q_n^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

其中Q_n为$n\times n$方阵，它的元素

$$O_n(i,j)=\begin{cases}0 & i<j\\ 1 & i=j\\ C_n^{i-j} & i>j\end{cases}$$

引入记号I_i表示$i\times i$单位阵，Q_{n-i}表示$(n-i)\times(n-i)$的上述Q阵。现在进行行列变换，变换过程的第一步为$(Q_n\bar{S}_1)$，

第二步为$\begin{pmatrix}I_1, 0, & \\ 0, Q_{n-1}, & \bar{S}_2\end{pmatrix}$，…第$k$步为$\begin{pmatrix}I_{k-1}, 0, & \\ 0, \quad Q_{n-k+1}, & \bar{S}_k\end{pmatrix}$，

其中$\bar{S}_1=\begin{pmatrix}1\\ \cdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ $\bar{S}_2=\begin{pmatrix}1 & j<2\\ \cdots\cdots\cdots & \\ -C_n^1 & j=2\\ \cdots\cdots\cdots & \\ \vdots & \\ -C_n^j & j>2\\ \cdots & \end{pmatrix}$ $\bar{S}_3=\begin{pmatrix}1 & j<3\\ -C_n^1 & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ C_{n+1}^2 & j=3\\ \cdots\cdots\cdots & \\ \vdots & \\ (j-2)\ C_{n+1}^{j-1} & j>3\\ \vdots & \end{pmatrix}$

一般地

$$\bar{S}_k=\begin{pmatrix}1 & \\ -C_n^1 & \\ \vdots & j<k\\ (-1)^{j-1}C_{n+j-2}^{j-1} & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ (-1)^{k-1}C_{n+k-2}^{k-1} & j=k\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \vdots & \\ \dfrac{(-1)^{k-1}(j-2)(j-3)\cdots(j-k+1)}{(k-2)!}C_{n+k-2}^{j-1} & \\ \vdots & j>k\end{pmatrix} \tag{9}$$

现在用归纳法证明上式结构对于$\bar{S}_{k+1}$也是正确的。将Q阵与$\bar{S}_k$并列为

$$\left(\begin{array}{cc|l}I_k & 0 & (-1)^{j-1}C_{n+j-2}^{j-1} \quad j<k\\ & & (-1)^{k-1}C_{n+k-2}^{k-1} \quad j=k\\ \hline 0 & Q_{n-k} & (-1)^{k-1}\dfrac{(j-2)(j-3)\cdots(j-k+1)}{(k-2)!}C_{n+k-2}^{j-1}\\ & & \qquad\qquad j>k\end{array}\right) \tag{10}$$

作$k+1$次变换得到$\bar{S}_{k+1}$，它的上面$j\leqq k$的元素不变，而$j>k$的元素会发生变化。设$\bar{S}_{k+1}$的第j个元素为S_{k+1}^j，则当$j>k$时有

$$S_{k+1}^j=(-1)^{k-1}\frac{(j-2)(j-3)\cdots(j-k+1)}{(k-2)!}C_{n+k-2}^{j-1}$$

$$-C_n^{j-k}(-1)^{k-1}C_{n+k-2}^{k-1}=\cdots\cdots=(-1)^kC_{j-2}^{k-1}C_{n+k-1}^{j-1}$$

注意到 $j=k+1$ 时代入上式有

$$S_{k+1}^{k+1}=(-1)^k C_{k+1-2}^{k-1} C_{n+k-1}^{j-1}=(-1)^k C_{n+k-1}^{j-1}$$

于是第 $k+1$ 步(10)式变为

$$\left[\begin{array}{cc|ll} I_{k+1} & 0 & (-1)^{j-1}C_{n+j-2}^{j-1} & j<k+1 \\ & & (-1)^{k-1}C_{n+k-1}^{k} & j=k+1 \\ \hline 0 & Q_{n-k-1} & (-1)^k C_{j-2}^{k-1} C_{n+k-1}^{j-1} & j>k+1 \end{array}\right]$$

因此作充分多次变换以后，可以求得

$$R_j=(-1)^{j-1}C_{n+j-2}^{j-1} \quad j=2,3,\cdots,n$$

故引理 1 得证。

引理 2

设有 $n-1$ 个 $n\times n$ 变换矩阵 $T_k(k=1,2,\cdots,n-1)$，它的第 i 行 j 列元素记为 $T_k(i,j)$

$$T_k(i,j)=\begin{cases} 0 & \text{当} i<j \text{时} \\ 1 & \text{当} i=j \text{时} \\ -1 & \text{当} i>j, i-j=1 \text{且} j>n-k \text{时} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$n-1$ 个变换矩阵的乘积 $V=\prod_{k=1}^{n-1} T_k$，它的第 i 行 j 列元素记为 $V(i,j)$。另外有 $n\times 1$ 列向量，记为 $T_n(M)$，这里 M 为整数 $0\leqslant M<n$.

$$T_n(M)=\begin{pmatrix} \dfrac{n}{n-M} \\ \dfrac{n}{n-m}\cdot\dfrac{n+1}{n-M+1} \\ \vdots \\ \dfrac{n}{n-M}\cdot\dfrac{n+1}{n-M+1}\cdots\dfrac{n+j-1}{n-M+j-1} \\ \vdots \\ \dfrac{n}{n-M}\cdot\dfrac{n+1}{n-M+1}\cdots\dfrac{2n-1}{2n+M-1} \end{pmatrix}$$

则有

$$1.\quad V(i,j)=\begin{cases} 0 & \text{当} i<j \text{时} \\ 1 & \text{当} i=j \text{时} \\ (-1)^{i+j}C_{i-1}^{j-1} & \text{当} i>j \text{时} \end{cases} \tag{11}$$

$$
2.\quad VT_n(M)=\begin{pmatrix}
\dfrac{n}{n-M} \\[2ex]
\dfrac{n}{n-M}\cdot\dfrac{M}{n-M+1} \\
\vdots \\
\dfrac{n}{n-M}\cdot\dfrac{M}{n-M+1}\cdot\dfrac{M-1}{n-M+2}\cdots\dfrac{M-j+2}{n-M+i-1} \\
\vdots \\
\dfrac{n}{n-M}\cdot\dfrac{M}{n-M+1}\cdot\dfrac{M-1}{n-M+2}\cdots\dfrac{M-n+2}{2n-M-1}
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
\vdots \\
\dfrac{n}{n-M}\quad\dfrac{C_M^{j-1}}{C_{n-M+j-1}^{j-1}}\quad j=1,2,\cdots,n \\
\vdots
\end{pmatrix}
$$

证明　设矩阵V的元素$V(i,j)$的表达式(11)对$n\times n$矩阵成立，相应的$(n+1)\times(n+1)$矩阵记为V^*，它的第i行j列元素为$V^*(i,j)$．按定义有

$$
V^*=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & T_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & T_2\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & T_{n-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & \\ 0 & T_{n-1}\\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & V\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & \\ 0 & T_{n-1}\\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}
$$

这里右乘矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & \\ 0 & T_{n-1}\\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$的变换特性是将矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & V\end{pmatrix}$的每一列减去后一列而构成新列，最后一列保持不变。于是对于$i,j\geqq 2$时有

$$
\begin{aligned}
V^*(i,j)&=V(i-1,j-1)-V(i-1,j)\\
&=(-1)^{i+j-2}C_{i-2}^{j-2}-(-1)^{i+j-1}C_{i-2}^{j-1}\\
&=(-1)^{i+j}(C_{i-2}^{j-2}+C_{i-2}^{j-1})\\
&=(-1)^{i+j}C_{i-1}^{j-1}
\end{aligned}
$$

另外当$i=j=1$时有$V^*(1,1)=1$和$V^*(i,1)=(-1)^{i+1}C_{i-1}^{0}$最后综合得到

$$
V^*(i,j)=\begin{cases}0 & 当i<j时\\ 1 & 当i=j时\\ (-1)^{i+j}C_{i-1}^{j-1} & 当i>j时\end{cases}
$$

当时这样就用数学归纳法证明了引理 2 的论断 1。

现在证明 2，首先写出$T_k(k=1,2,\cdots,n-1)$的结构形式

$$T_1=\begin{pmatrix}1&0&\cdots\cdots&0\\0&1&\cdots\cdots&0\\&\cdots\cdots\cdots&&\\0&\cdots\cdots&1&0\\0&\cdots\cdots&0&1\end{pmatrix}\quad T_2=\begin{pmatrix}1&0&\cdots\cdots&0&0&0\\0&1&\cdots\cdots&0&0&0\\&\cdots\cdots\cdots&&&&\\0&0&\cdots\cdots&0&1&0\\0&0&\cdots\cdots&0&-1&1\end{pmatrix}\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\quad T_k=\begin{pmatrix}1,&0,&\cdots0,&0,&0,&0\\0,&1,&\cdots0,&0,&0,&0\\&\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots&\cdots\cdots&\cdots&\\0,&\cdots\cdots\cdots&1,&0,&0,&0\\0,&\cdots\cdots&-1,&1,&0,&0\\0,&\cdots\cdots&0,&-1,&1,&0\\0,&\cdots\cdots&\underbrace{0,&0,&-1,&1}_{k\text{列}}\end{pmatrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}}\right\}k\text{行}$$

设Q_k为$k\times k$方阵，它的元素

$$Q_k(i,j)=\begin{cases}1 & \text{当}\,i=j\text{时}\\-1 & \text{当}\,i-j=1\text{时}\\0 & \text{其它}\end{cases}$$

于是

$$T_k=\begin{bmatrix}I_{n-k}&0\\0&Q_k\end{bmatrix}I_{n-k}\text{为}(n-K)\times(n-K)\text{单位矩阵。}$$

令

$$\bar{S}_1=T_{n-1}T_n(M),\cdots\cdots,\bar{S}_k=T_{n-k}\bar{S}_{k-1}\quad(k=2,3,\cdots,n-1)\tag{12}$$

$$\bar{S}_1=\begin{pmatrix}\dfrac{n}{n-M} \qquad j=1\\ \vdots\\ \dfrac{n}{n-M}\cdot\dfrac{n+1}{n-M+1}\cdots\dfrac{n+j-2}{n-M+j-2}\cdot\dfrac{M}{n-M+j-1}\quad 1<j\leqq n\\ \vdots\end{pmatrix}$$

$$\bar{S}_2=\begin{pmatrix}\dfrac{n}{n-M}\\ \dfrac{n}{n-M}\;\dfrac{M}{n-M+j-1}\quad j\leqq 2\\ \vdots\\ \dfrac{n}{n-M}\;\dfrac{n+1}{n-M+1}\cdots\dfrac{n+j-3}{n-M+j-3}\;\dfrac{M}{n-M+j-2}\;\dfrac{M-1}{n-M+j-1}\\ 2<j\leqq n\end{pmatrix}$$

$$\bar{S}_{k-1}=\left[\begin{array}{l} \frac{n}{n-M} \\ \vdots \\ \frac{n}{n-M}\,\frac{M}{n-M+1}\cdots\frac{M-j+2}{n-M+j-1} \quad j\leqq K-1 \\ \vdots \\ \frac{n}{n-M}\,\frac{n+1}{n-M+1}\cdots\frac{n+j-k}{n-M+j-k}\cdot\frac{M}{n-M+j-k+1}\cdots \\ \qquad\cdots\frac{M-k+2}{n-M+j-1} \quad k-1<j\leqq n \end{array}\right] \tag{13}$$

由(12)式利用(13)式得

$$\bar{S}_k=\left[\begin{array}{c:c} I_k & 0 \\ \hdashline 0 & Q_{n-k} \end{array}\right]\bar{S}_{k-1}=$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{n}{n-M} \\ \vdots \\ \frac{n}{n-M}\cdot\frac{M}{n-M+1}\cdots\cdots\frac{M+j-2}{n-M+j-1} \quad j\leqq k \\ \vdots \\ \hdashline \vdots \\ Q_{n-k}\left(\frac{n}{n-M}\cdot\frac{n+1}{n-M+1}\cdots\frac{n+j-k}{n-M+j-k}\cdot\frac{M}{n-M+j-k+1}\,\frac{M-k+2}{n-M+j-1}\right) \end{array}\right]$$

用记号$(\bar{S}_k)_j$表示$\bar{S}_k$的第j个元素($j>k$)，于是

$$(\bar{S}_k)_j=(\bar{S}_{k-1})_j-(\bar{S}_{k-1})_{j-1}=\frac{n}{n-M}\cdot\frac{n+1}{n-M+1}\cdots\cdots$$

$$\frac{n+j-k-1}{n-M+j-k-1}\cdot\frac{n+j-k}{n-M+j-k}\cdot\frac{M}{n-M+j-k+1}\cdots\cdots$$

$$\frac{M-k+3}{n-M+j-2}\cdot\frac{M-k+2}{n-M+j-1}-\frac{n}{n-M}\cdot\frac{n+1}{n-M+1}\cdots\cdots$$

$$\frac{n+j-k-1}{n-M+j-k-1}\cdot\frac{M}{n-M+j-k}\cdot\frac{M-1}{n-M+j-k+2}\cdots\frac{M-k+2}{n-M+j-2}$$

$$=\frac{n}{n-M}\,\frac{n+1}{n-M+1}\cdots\frac{n+j-k-1}{n-M+j-k-1}\cdot\frac{M}{n-M+j-k}$$

$$\cdot\frac{M-1}{n-M+j-k+1}\cdots\frac{M-k+2}{n-M+j-2}\cdot\frac{M-k+1}{n-M+j-1}$$

于是

$$S_k=\begin{pmatrix} \dfrac{n}{n-M} \\ \vdots \\ \dfrac{n}{n-M}\cdot\dfrac{M}{n-M+1}\cdots\dfrac{M-j+2}{n-M+j-1} \quad j\leq k \\ \vdots \\ \dfrac{n}{n-M}\cdot\dfrac{n+1}{n-M+1}\cdots\cdots\dfrac{n+j-k+1}{n-M+j-k-1}\cdot\dfrac{M}{n-M+j-k}\cdots \\ \cdots\dfrac{M-k+1}{n-M+j-1} \end{pmatrix}$$

如果 $k=n-1$ 得 $\bar{S}_{n-1}=T_1T_2\cdots\cdots T_{n-1}T_n(M)=VT_n(M)$

于是 $$VT_n(M)=\begin{pmatrix} \vdots \\ \dfrac{n}{n-M}\cdot\dfrac{C_M^{j-1}}{C_{n-M+j-1}^{j-1}} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

同时得到推论

推论 1 如果 $T_n(M)=T_n(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

则 $$VT_n(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

推论 2 如果 $T_n(M)=T_n^+(M)$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{n}{n+M} \\ \dfrac{n}{n+M}\ \dfrac{n+1}{n+M+1} \\ \vdots \\ \dfrac{n}{n+M}\ \dfrac{n+1}{n+M+1}\cdots\dfrac{n+j-1}{n+M+j-1} \\ \vdots \\ \dfrac{n}{n+M}\ \dfrac{n+1}{n+M+1}\cdots\dfrac{2n-1}{2n+M-1} \end{pmatrix}$$

则

$$VT_n^+(M)=\begin{pmatrix} & \vdots & \\ (-1)^{j-1}\dfrac{n}{n+M} & & \dfrac{C_{n+M}^{n+1}}{C_{n+M+j-1}^{n+1}} \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

引理 3

设A和P_1分别为$n\times n$矩阵，它的第i行j列元素分别记为$A(i,j)$和$P_1(i,j)$

$$A(i,j)=\frac{n}{j}\cdot\frac{n+1}{j+1}\cdots\frac{n+i-1}{j+i-1}$$

$$P_1(i,j)=\begin{cases}0 & \text{当}\ i+j\neq n+1\text{时}\\ C_{n-1}^{j-1} & \text{当}\ i+j=n+1\text{时}\end{cases}$$

并且按照引理 1 定义$P_k(k=2,3,\cdots,n)$，按照引理 2 定义$T_k(k=1,2,\cdots,n-1)$，则矩阵A可逆，并且逆矩阵按下面公式计算

$$A^{-1}=P_1P_2\cdots P_n\cdot T_1\cdot T_2\cdots T_{n-1}=P_1RV$$

证明　首先写出矩阵A的结构形式

$$A=\begin{pmatrix}\dfrac{n}{1}, & \dfrac{n}{2}, & \cdots\cdots, & \dfrac{n}{n},\\ \dfrac{n(n+1)}{1.2}, & \dfrac{n(n+1)}{2.3}, & \cdots, & \dfrac{n(n+1)}{n(n+1)},\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ \dfrac{n(n+1)\cdots(2n-1)}{1.2\cdots\cdots n}, & \cdots\cdots, & & \dfrac{n(n+1)\cdots(2n-1)}{n(n+1)\cdots(2n-1)},\end{pmatrix}$$

按照引理 2 中定义的$n\times 1$列向量$T_n(M)(M=0,1,2,\cdots,n-1)$．矩阵$A$可以表示为$A=[T_n(n-1),T_n(n-2),\cdots,T_1(1),T_n(0)]$ 于是$VA=[VT_n(n-1),VT_n(n-2),\cdots,VT_n(1),VT_n(0)]$

利用引理 2 的结果，矩阵VA的第i行j列元素为

$$[VA](i,j)=\begin{cases}0 & \text{当}\ i+j>n+1\text{时}\\ \dfrac{n}{j}\ \dfrac{n-j}{j+1}\ \dfrac{n-j+1}{j+2}\cdots\dfrac{n-j-i+2}{j+i-1} & \text{当}\ i+j\leqq n+1\text{时}\end{cases}\tag{14}$$

用矩阵P_n乘矩阵$[VA]$得P_nVA．P_n的作用是使得$[VA]$的第n行 1 列元素不变，其余的第 1 列元素变成零，再用P_{n-1}乘P_nVA又使得第$n-1$行 2 列元素不变，其余的第 2 列元素成零，一般地用P_i乘矩阵$\left(\prod_{k=i+1}^{n}P_k\right)VA$可以使第$i$行$n-i+1$列元素不变，其余的$n-i+1$列元素变成零，如此等等。最后得到矩阵$\left(\prod_{k=2}^{n}P_k\right)VA$，它的第$i$行$j$列元素记为

$$\left(\prod_{k=2}^{n} P_k\right) VA(i,j)=\begin{cases}[VA](i,j) & 当 i+j=n+1 时\\ 0 & 当 i+j\neq n+1 时\end{cases}$$

现在计算$i+j=n+1$时的$[VA](i,j)$，利用$i+j=n+1$代入(14)式得到

$$[VA](i,j)=\frac{n}{j}\cdot\frac{n-j}{j+1}\cdots\frac{1}{n}=\frac{(j-1)!\,(n-j)!}{(n-1)!}=\frac{1}{C_{n-1}^{j-1}}$$

最后用P_1去乘$\left(\prod_{k=2}^{n} P_k\right)VA$得到

$$\left(\prod_{k=1}^{n} P_k\right)VA=\begin{pmatrix} 0, & 0, \cdots\cdots, & 0, & C_{n-1}^{n-1}\\ 0, & 0, \cdots\cdots, & C_{n-1}^{n-2}, & 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ 0, & C_{n-1}^{1}, & \cdots\cdots\cdots, & 0\\ C_{n-1}^{0}, & 0, & \cdots\cdots\cdots, & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0\cdots\cdots\cdots\frac{1}{C_{n-1}^{n-1}} & 0\\ 0\cdots\cdots\cdots\frac{1}{C_{n-1}^{n-2}} & 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{1}{C_{n-1}^{0}} & 0\cdots\cdots 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{C_{n-1}^{n-1}}{C_{n-1}^{0}} & 0\cdots\cdots\cdots 0 & \\ 0 & \frac{C_{n-1}^{n-2}}{C_{n-1}^{1}} & \cdots\cdots 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0\cdots\cdots\cdots\cdots & & \frac{C_{n-1}^{0}}{C_{n-1}^{n-1}}\end{pmatrix}$$

由 $$C_{n-1}^{j-1}=C_{n-1}^{n-j}\text{得}\left(\prod_{k=1}^{n} P_k\right)VA=I_n$$

即 $$A^{-1}=\prod_{k=1}^{n} P_k V=P_1P_2\cdots P_n\cdot T_1\cdot T_2\cdots T_{n-1}=P_1RV$$

引理 3 得证

三、积 分 展 开 定 理

定理 任何一个在闭区间上定义的，满足展成泰勒级数条件的函数。可以在某一个基函数序列上展开。展成一致收敛到它自己的函数列。而它的展开系数正好含有这个函数在该区间上的 i 重积分。

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} i!\,f_i f^i(n,t)+0(\varepsilon)$$

$f^i(n,t)$是与n有关的基函数，由公式(5)确定，f_i是函数$f(t)$在区间上的i重定积分。证明不失一般性，该区间可以认为是［0 1］区间，它在该区间上的i重积分值记为$f_i(i=1,2,\cdots,n)$.

对函数$f(t)$可以用$n-1$次多项式$f(n,t)$一致逼近，余项为$r(n,t)$，即$f(t)=f(n,t)+r(n,t)$

其中 $$f(n,t)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i(n)t^i,\quad r(n,t)=\sum_{i=n}^{\infty}a_i(n)t^i$$

另构造 $n-1$ 次多项式 $P(n,t)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}b_i(n)t^i$ 使它的 i 重积分值 $P_i(n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 同 $f(t)$ 的 i 重积分值 f_i 相等，此时多项式的系数 b_i $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ 可以根据 n 个联立方程确定

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-1)!}{(i+j-1)!}b_{j-1}=f_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

或写成如下矩阵形式以便研究

$$A\begin{pmatrix}b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}nf_1\\ n(n+1)f_2\\ \vdots\\ n(n+1)\cdots(2n-1)f_n\end{pmatrix} \tag{15}$$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{n}{1}, & \frac{n}{2}, \cdots\cdots, & \frac{n}{n}\\ \frac{n(n+1)}{1.2}, & \cdots\cdots\cdots\cdots, & \frac{n(n+1)}{n(n+1)}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{n(n+1)\cdots(2n-1)}{1.2\cdots\cdots\cdots n}, & \cdots\cdots, & \frac{n(n+1)\cdots(2n-1)}{n(n+1)\cdots(2n-1)}\end{pmatrix}$$

类似地用 $f_i(n)$ 和 $r_i(n)$ 分别表示 $f(n,t)$ 和 $r(n,t)$ 在该区间上的 i 重积分，于是有 $f_i(n)+r_i(n)=f_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 经过简单计算，并利用引理 3 的结论，不难得到

$$\begin{pmatrix}b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \cdots\\ a_{n-1}\end{pmatrix}+P_1RV\begin{pmatrix}nr_1(n)\\ n(n+1)r_2(n)\\ \vdots\\ n(n+1)\cdots(2n-1)r_n(n)\end{pmatrix}$$

利用引理 2 的推论 2 的记号 $T_n^+(M)$ 和结果，我们有

$$\begin{pmatrix}nr_1(n)\\ n(n+1)r_2(n)\\ \vdots\\ n(n+1)\cdots(2n-1)r_n(n)\end{pmatrix}=\sum_{M=1}^{\infty}a_{n+M-1}T_n^+(M)$$

引入矢量记号 $\vec{d}=(d_1d_2\cdots d_n)^T$

$$\vec{d}=V\begin{pmatrix}nr_1(n)\\ n(n+1)r_2(n)\\ \vdots\\ n(n+1)\cdots(2n-1)r_n(n)\end{pmatrix}=\sum_{M=1}^{\infty}a_{n+M-1}VT_n^+(M)$$

于是 $\vec{d}$ 的第 j 个分量

$$d_j=\sum_{M=1}^{\infty}a_{n+M-1}(-1)^{j-1}\frac{n}{n+M}\cdot\frac{C_{n+M}^{n+1}}{C_{n+M+j-1}^{n+1}} \tag{16}$$

由可展成泰勒级数的条件可知，$f(t)$ 在该区间上的任意阶导数有界，因此，有关于系数 a_{n+M-1} 的估计式

$$|a_{n+M-1}| \leqslant \frac{K_1}{(n+M-1)!}$$

其中 K_1 为正常数。再用 $n!$ 同乘(16)式的两端得到 $n!\,d_j$的级数

$$n!\,d_j=\sum_{M=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{n\cdot n!}{n+M}a_{n+M-1}\frac{C_{n+M}^{n+1}}{C_{n+M+j-1}^{n+1}} \tag{16$'$}$$

利用关于系数 a_{n+M-1} 的估计式可以证明 $j=1$ 时

$$n!\,d_1=\sum_{M=1}^{\infty}\frac{n\cdot n!}{n+M}a_{n+M-1}$$

是收敛的。另一方面级数（16）$'$可以看成是级数 $\sum\limits_{M=1}^{\infty}\frac{n\cdot n!}{n+M}a_{n+M-1}$ 与数列$\left\{\frac{C_{n+M}^{n+1}}{C_{n+M+j-1}^{n+1}}\quad M=1,2,\cdots\right\}$对应项的乘积。

由于$n!\,d_1=\sum\limits_{M=1}^{\infty}\frac{n\cdot n!}{n+M}a_{n+M-1}$ 是收敛的，数列$\left\{\frac{C_{n+M}^{n+1}}{C_{n+M+j-1}^{n+1}}\quad M=1,2,\cdots\right\}$是单调有界序列，根据数学上乘积级数收敛性的判别定理，可以断定级数（16）$'$是收敛的。

取大于收敛值的正数K，便有 $|n!\,d_j|\leqslant K$即 $|d_j|\leqslant\frac{K}{n!}$

$$\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\\vdots\\b_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0\\a\\\vdots\\a_{n-1}\end{pmatrix}+P_1R\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_n\end{pmatrix}$$

令

$$r^*(n,t)=(1\ \ t\cdots t^{n-1})P_1R\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_n\end{pmatrix} \tag{17}$$

则有 $$|f(t)-P(n,t)|\leqq|r(n,t)|+|r^*(n,t)|$$

由于$r(n,t)$是泰勒级数的余项，可以充分小。现在需要对$r^*(n,t)$ 进行估计。如果将P_1R 视为一个 $n\times n$ 方阵，在(17) 式中经过左右乘以后得到 n^2 项，它的每一项取上界为$\max\limits_j S(n,j)$其中

$$S(n,j)=C_{n-1}^{j-1}C_{n+j-2}^{j-1}\frac{K}{n!}$$

可见，证明$r^*(n,t)$的收敛性，等价于证明

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{\substack{j\\j<n}}\frac{n^2(n+j-2)!}{[(j-1)!]^2(n-j)!\,n!}\right\}=0 \tag{18}$$

记

$$S(n,j)=\frac{n^2(n+j-2)!}{[(j-1)!]^2(n-j)!n!}.$$

$$S(n)=\max_{j<n}S(n,j)$$

可以求出极值点为

$$j(n)=\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{n(n-1)}{2}} \tag{19}$$

记 $j^*=j(n+1)$，此时有

$$\frac{S(n+1)}{S(n)}=\frac{n+1}{n^2}\cdot\frac{(n+j^*-1)!}{(n+j-2)!}\cdot\frac{[(j-1)!]^2}{[(j^*-1)!]^2}\cdot\frac{(n-j)!}{(n-j^*+1)!} \tag{20}$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}J^*-J=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{n(n+1)}{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(20)式中的阶乘号作为伽马函数来理解，即

$$(x+1)!=\Gamma(x)$$

利用斯特林公式 $x!\approx 2\pi x^{x+0.5}e^{-x}$，不难证明，当 n 充分大时

$$\frac{S(n+1)}{S(n)}<P<1$$

P为常数。

于是有
$$\lim_{n\to\infty}S(n)=0$$

即 $r^*(n,t)$ 的展式绝对收敛。从而得到

$$\lim_{n\to\infty}P(n,t)=f(t) \tag{21}$$

另一方面，对 $P(n,t)$ 作 1 至 n 重积分，系数 b_i $i=0,1,\cdots,n-1$ 所满足的方程可以写成

$$C\begin{pmatrix}b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1!f_1\\ 2!f_2\\ \vdots\\ n!f_n\end{pmatrix} \tag{22}$$

其中 C 为 $n\times n$ 矩阵

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1!0!}{1!} & \frac{1!1!}{2!}\cdots\cdots & \frac{1!(n-1)!}{n!}\\ \frac{2!0!}{2!} & \frac{2!1!}{3!}\cdots\cdots & \frac{2!(n-1)!}{(n+1)!}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{n!0!}{n!} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \frac{n!(n-1)!}{(2n-1)!}\end{pmatrix}$$

由(15)式和(22)式用数学方法不难证明 $|C| \neq 0$.于是得到

$$P(n,t)=(1\ t\cdots t^{n-1})C^{-1}\begin{pmatrix}1!f_1\\2!f_2\\\vdots\\n!f_n\end{pmatrix} \tag{23}$$

如果设 $(f^1(n,t)\cdots f^n(n,t))=(1\ t\cdots t^{n-1})C^{-1}$ 则有

$$f(t)=(f^1(n,t)f^2(n,t)\cdots f^n(n,t))\begin{pmatrix}1!f_1\\2!f_2\\\vdots\\n!f_n\end{pmatrix}+0(\varepsilon) \tag{24}$$

这就是定理的结论。利用更高级的数学技巧，可能将定理的条件进一步减弱，但是作为工程应用，这里的结论已经够用了。

四、应 用 举 例

利用积分展开方法，可以综合利用飞行器上的量测信息，提供简便有效地估算参数偏差的方法，现在通过雷达中制导来说明这个问题，而在理论上这种方法是普遍有效的（如图1）。

飞行器在主动段飞行结束以后便进入被动飞行，这时飞行器上安装的雷达高度表开始工作，它可以相对于地面或陆标测量获得信息。例如获得测高数据。如果飞行器严格在标准轨道上运动，并且测高沒有误差，那么测高数据也将是一系列理想值。实际上，飞行器或多或少会偏离标准轨道。高度表也会有量测噪声，现在通过测高数据来估计主动段熄火点参数的偏离，进而计算飞行器落点的终端参数，如射程的偏差。这就是我们将要解决的问题。

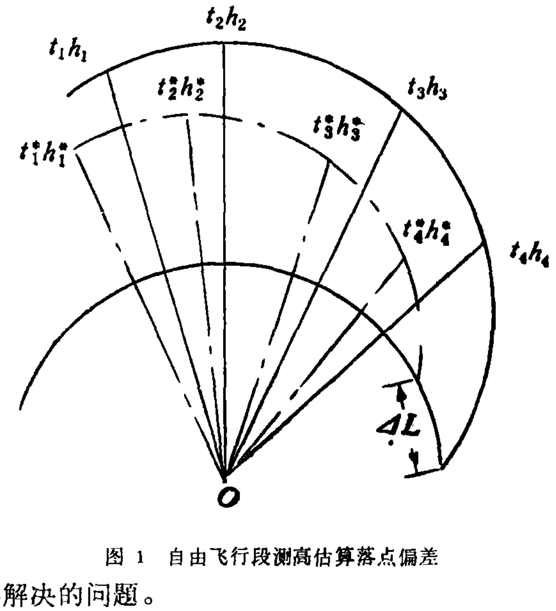

图 1　自由飞行段测高估算落点偏差

现在飞行器系统采用如下模型

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}&=\bar{f}(\bar{x},\bar{w},t)\\ \bar{w}&=\bar{g}(\bar{x},\bar{u})\end{aligned} \tag{25}$$

这里 $\bar{w}$ 是惯性感测的输出信息，它是 m 維矢量。

另一方面飞行器上的辐射传感装置，获得量测信息

$$\tilde{z}=\bar{h}(\bar{x},t)+\tilde{v} \tag{26}$$

其中 $\tilde{z}$ 是量测输出，它是 l 維矢量，$\tilde{v}$ 是量测噪声。

相对于标准轨道，可以建立如下状态干扰方程和量测干扰方程

$$\begin{aligned} \delta\dot{\bar{x}} &= A\delta\bar{x} + B\delta\bar{w} \\ \delta\tilde{z} &= C\delta\bar{x} + \tilde{v} \end{aligned} \tag{27}$$

这里 $A=\left[\dfrac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{x}}\right]$ 为 $n\times n$ 矩阵，$B=\left[\dfrac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{w}}\right]$ 为 $n\times m$ 矩阵，$C=\left[\dfrac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{x}}\right]$ 为 $l\times n$ 矩阵.

如果量测过程由时刻 t_b 开始到时刻 t_e 结束，终端指标函数为

$$l=l(\bar{x},t)$$

标准轨道终端时刻 $t=t_e, \bar{x}=\bar{x}(t_e)$。

系统偏离标准状态以后，终端时刻有状态偏差 $\delta\bar{x}(t_e)$，相应有指标偏差

$$\Delta l=\bar{l}_x\delta\bar{x}+l_t\delta t \tag{28}$$

这里 $\bar{l}_x$ 是函数 l 对状态 $\bar{x}$ 的分量的偏导数组成的行矢量，l_t 是函数 l 对 t 的偏导数。

下面我们利用量测信息 $\tilde{z}$，通过最小平方估计来计算 $\delta\bar{x}(t_e)$，以下简写成 $\delta\bar{x}_e$.

由方程(27)和终端条件 $\delta\bar{x}_e$ 可以计算任意一点的 $\delta\bar{x}(t)$

$$\delta\bar{x}(t)=e^{\int_{t_e}^{t}A(\xi)d\xi}\left[\delta\bar{x}_e+\int_{t_e}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}A(\xi)d\xi}B(\tau)\delta\bar{w}(\tau)d\tau\right] \tag{29}$$

最小平方估计的条件是

$$\int_{t_b}^{t_e}(C\delta\bar{x}-\delta\tilde{z})^T R^{-1}(C\delta\bar{x}-\delta\tilde{z})dt=\min \tag{30}$$

其中 R^{-1} 是权矩阵，由量测过程的方差 R 所确定，在等精度测量时，R 可以取成单位矩阵。

令

$$D=Ce^{\int_{t_e}^{t}A(\xi)d\xi},\quad E=C\int_{t_e}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}A(\xi)d\xi}B(\tau)\delta\bar{w}(\tau)d\tau$$

$$\delta\tilde{z}^*=\delta\tilde{z}+E$$

则

$$C\delta\bar{x}=D\delta\bar{x}_e-E(t) \tag{31}$$

方程(30)变为

$$\int_{t_b}^{t_e}(D\delta\bar{x}_e-\delta\tilde{z}^*)^T R^{-1}(D\delta\bar{x}_e-\delta\tilde{z}^*)dt=\min \tag{32}$$

即

$$\delta\bar{x}_e^T\left[\int_{t_b}^{t_e}D^T R^{-1}Ddt\right]\delta\bar{x}_e-2\delta\bar{x}_e^T\left[\int_{t_b}^{t_e}D^T R^{-1}\delta\tilde{z}^*dt\right]+\delta\tilde{z}^{*T}R^{-1}\delta\tilde{z}^*=\min \tag{33}$$

最后得到

$$\delta\bar{x}_e=\left[\int_{t_b}^{t_e}D^T R^{-1}Ddt\right]^{-1}\left[\int_{t_b}^{t_e}D^T R^{-1}\delta\tilde{z}^*dt\right] \tag{34}$$

$$\Delta l=\bar{l}_x\left[\int_{t_b}^{t_e} D^T R^{-1} D dt\right]^{-1}\int_{t_b}^{t_e} D^T R^{-1}\delta\tilde{z}^* dt+\varepsilon(\delta t) \tag{35}$$

引入 $\delta\tilde{z}$ 和 $\delta\bar{w}$ 的 i 阶干扰矢 $\delta\tilde{z}_i$ 和 $\delta\bar{w}_i$ 并利用干扰定理和积分展开定理，经过不十分复杂的计算得到

$$\Delta l=\sum_{i=1}^{m}\psi^i\delta\tilde{z}_i+\sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}^i\delta\bar{w}_i+\varepsilon(\delta t) \tag{36}$$

这里ψ^i和$\bar{\lambda}^i$是根据标准轨道计算的装定系数 $\varepsilon(\delta t)=\varepsilon_0+\varepsilon_1\delta t$，其中 ε_0 和 ε_1 是拟合常数。

令
$$l_0=\sum_{i=1}^{m}\psi^i\tilde{z}_i+\sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}^i\bar{w}_i$$

则
$$\Delta l=\sum_{i=1}^{m}\psi^i\tilde{z}_i^*+\sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}^i\bar{w}_i^*+\varepsilon_0+\varepsilon_1\delta t-l_0 \tag{37}$$

公式(37)中 $\tilde{z}_i^*$，$\bar{w}_i^*$ 是实时感测值 $\tilde{z}^*$ 和 $\bar{w}^*$ 的 i 重积分，l_0 是根据标准感测计算出来的装定常数。利用公式(37)可以简便地进行射程修正了。

An Integral Expansion Theorem and Its Application

Ling De-hai

Abstract

An integral expansion theorem is derived in this paper. On the basis of the theorem, a defining function in closed interval with condition of expansion in Taylor Series can be expanded in basis eigenfuction. And that expansion coefficient always contains i—integral of the function in the closed interval. Then an example on applying the theorem for guidance is given.