# 单点次限制的第二棵最小树的简单算法

陈 庆 华

**提 要** 给定赋权连通图 $G=(V,E)$，正整数 $k$，以及特别指定顶点 $v_0\in V$，一棵支撑树 $T$，满足 $v_0$ 在 $T$ 中恰关联 $k$ 条边，使得 $T$ 具有尽可能小的权，树 $T$ 称为具单点次限制的第一棵最小树。求单点次限制的第一棵最小树已经有好的算法，本文给出求具单点次限制的第二棵最小树的简单算法。由于 Matroid 的基也具有本文所用到的关于支撑树的性质，因而本文的结果也无困难地推广到 Matroid 上去。

## §1 引 言

大家知道，在连通图上求最小权的支撑树，有好多算法，其中著名的是"greedy"算法[1]。在连通图上特别指定了一个顶点，求在该顶点具次限制的最小权的支撑树，Glover—Klingman 也给出了好算法[2]。本文主要结果是给出求具次限制的第二棵最小树的简单算法。

## §2 预 备 知 识

设 $G=(V,E)$ 是连通图，$v_0\in V$ 是特别指定的一个顶点，$k$ 为给定的正整数，对于每条边 $e\in E$，赋权 $w(e)\geqslant 0$. 对 $G$ 的任意一棵支撑树 $T$，我们称

$$\sum_{e\in T} w(e)$$

是树 $T$ 的权，我们用 $d_T(v_0)$ 表示 $T$ 中 $v_0$ 所关联的边数。我们称支撑树 $T$ 是具 $k$ 次限制的支撑树，如果 $d_T(v_0)=k$. 我们记

$$\boldsymbol{B}=\{T|\ T\text{是}G\text{的支撑树，且}\ d_T(v_0)=k\}.$$

如果 $T_1\in\boldsymbol{B}$ 满足条件：

$$w(T_1)=\min\{w(T)|\ T\in\boldsymbol{B}\}$$

则称 $T_1$ 是 $G$ 的具 $k$ 次限制的第一棵最小权的支撑树。假设，对于 $m\geqslant 2$,

$\boldsymbol{B}_{m-1}=\{T_1,T_2,\cdots T_{m-1}\}$ 是 $G$ 的前 $m-1$ 棵具 $k$ 次限制的最小树，而支撑树 $T_m$ 满足条件：

(i) $T_m\in\boldsymbol{B}\setminus\boldsymbol{B}_{m-1}$

(ii) 不存在 $k$ 次限制支撑树 $T\in\boldsymbol{B}\setminus\boldsymbol{B}_{m-1}$，使得

$$w(T_{m-1})\leqslant w(T)<w(T_m)$$

本文 1983 年 4 月 21 日收到

我们称$T_m$是$G$的具$k$次限制的第$m$个最小权的支撑树，简称第$m$个次限制树。

关于支撑树，有下面一些结果：

**[命题 1]** 设$T$是$G$的一棵支撑树，则对任意的边$e\in E\setminus T$，$T+e$包含唯一的圈，记为$C(T,e)$，我们记$(T,e)=C(T,e)\setminus\{e\}$. 对任意的边$f\in(T,e)$，都有$T+e-f$是$G$的支撑树。我们称增添$e$、删去$f$是$T$的可行交换，记为$(-f,+e)$，见[2]

**[命题 2]** 设$T_1,T_2$是$G$的两棵支撑树，其中

$$T_1=\{e_1,e_2,\cdots e_t,g_{t+1},\cdots g_N\}$$
$$T_2=\{f_1,f_2,\cdots f_t,g_{t+1},\cdots g_N\}$$
$$e_i\neq f_j;\ i,j=1,2,\cdots t,1\leqslant t\leqslant N,$$

则存在$f_1,f_2,\cdots f_t$的一个排列$f_{j_1},f_{j_2},\cdots f_{j_t}$；使得

$$T_1+f_{j_k}-e_k,\ k=1,2,\cdots t,$$

仍是$G$的支撑树。见[2]

**[命题 3]** 设$T$是$G$的支撑树；$e_1,e_2\in T$；$f_1,f_2\in E\setminus T$；且对$T$来说，$(-e_1,+f_1)$，$(-e_2,+f_2)$是可行交换，而$(-e_1,+f_2)$不是可行交换；则

$$(T\setminus\{e_1,e_2\})\cup\{f_1,f_2\}$$

仍是$G$的一棵支撑树。我们称$(-\{e_1,e_2\},+\{f_1,f_2\})$是$T$的可行双交换。见[2]

**[命题 4]** 设$T$是具$k$次限制的支撑树，则$T$是具$k$次限制的支撑树中最小权者，当且仅当对$T$来说，下面三个条件同时成立：

(i) 在$G$中与$v_0$关联的任意两条边所产生的可行交换都是不可改进的，即是说$T$通过这类可行交换所得到的新的支撑树$T'$，总有

$$w(T')\geqslant w(T)$$

(ii) 在$G$中不与$v_0$关联的任意两条边所产生的可行交换都是不可改进的。

(iii) 对于任意两个可行交换$(-e_1,+f_1)$．$(-e_2,+f_2)$、其中$e_1,f_2$不与$v_0$关联；$f_1,e_2$与$v_0$关联；都有

$$w(e_1)+w(e_2)\leqslant w(f_1)+w(f_2),\ 见[2]$$

**[命题 5]** 设$T$是具$k$次限制的支撑树中最小权者，记$D$为$G$中与$v_0$关联的边集，令

$$\alpha=\{f\,|f\in D\setminus T\}$$
$$\beta=\{e\,|e\in T\setminus D\}$$
$$\mu=\{(-e,+f)\,|(-e,+f)\ 是T的可行交换，且\ e\in\beta,\ f\in\alpha\}.$$

如果$\mu\neq\phi$，设

$$\min\{w(f)-w(e)\,|(-e,+f)\in\mu\}=w(f_0)-w(e_0)$$

则$T^*=T-e_0+f_0$是具$k+1$次限制的支撑树中最小权者。如果$\mu=\phi$，则$G$不存在具$k+1$次限制的支撑树。见[2]

类似地，我们有：

**[命题 6]** 设$T$是具$k$次限制的支撑树中最小权者，令

$$\alpha=\{f\,|f\in E\setminus(D\cup T)\}$$
$$\beta=\{e\,|e\in D\cap T\}$$

$\boldsymbol{\mu}=\{(-e,+f)\mid(-e,+f)$是$T$的可行交换，且$e\in\beta$，$f\in\alpha\}$.

如果 $\boldsymbol{\mu}\neq\phi$，设

$$\min\{w(f)-w(e)\mid(-e,+f)\in\mu\}=w(f_1)-w(e_1),$$

则$\widetilde{T}=T-e_1+f_1$是$G$的具$k-1$次限制的支撑树中最小权者。如果$\boldsymbol{\mu}=\phi$，则$G$不存在具$k-1$次限制的支撑树。

## §3 算法与证明

**定义** 设$T$，$T'\in\boldsymbol{B}$；我们称$T$与$T'$在$\boldsymbol{B}$中是相邻的，如果$T'$能由$T$通过至少下列三种方式之一而得到：

1° 存在$e$，$e'\in D$，其中$e\in T\setminus T'$，$e'\in T'\setminus T$，使得$T'=T-e+e'$.

2° 存在$e$，$e'\in E\setminus D$，其中$e\in T\setminus T'$，$e'\in T'\setminus T$，使得$T'=T-e+e'$.

3° 存在$e_1,f_1\in D$；$e_2,f_2\in E\setminus D$，其中$e_1,e_2\in T\setminus T'$；$f_1,f_2\in T'\setminus T$；使得$T'=(T\setminus\{e_1,e_2\})\cup\{f_1,f_2\}$.

设$\boldsymbol{B}_{m-1}=\{T_1,T_2,\cdots T_{m-1}\}$是$G$的前$m-1$个次限制的支撑树，我们记

$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B}_{m-1})=\{T\mid T\in\boldsymbol{B}\setminus\boldsymbol{B}_{m-1}$，且$T$至少与$\boldsymbol{B}_{m-1}$中一个成员相邻$\}$.

**[定理 1]** 设$\boldsymbol{B}_{m-1}=\{T_1,T_2,\cdots T_{m-1}\}$是图$G$的具$k$次限制的前$m-1$个树序列；则或者$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{m-1}$，或者当$\boldsymbol{B}\setminus\boldsymbol{B}_{m-1}\neq\phi$时，图$G$存在第$m$个$k$次限制树$T^*\in\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B}_{m-1})$.

**证明：** 我们不妨设$\boldsymbol{B}\setminus\boldsymbol{B}_{m-1}\neq\phi$，首先证明$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B}_{m-1})\neq\phi$. 任取$T\in\boldsymbol{B}\setminus\boldsymbol{B}_{m-1}$，设$T_r$是$\boldsymbol{B}_{m-1}$中与$T$有最多公共边的次限制树。设

$$T_r=\{e_1,e_2,\cdots e_t,g_{t+1},\cdots g_N\}$$
$$T=\{f_1,f_2,\cdots f_t,g_{t+1},\cdots g_N\}$$

其中 $e_i\neq f_j$；$i,j=1,2,\cdots t$；$1\leqslant t\leqslant N$.

由命题2，则存在$f_1,f_2,\cdots f_t$的一个排列，不妨设仍为$f_1,f_2,\cdots f_t$，使得对$s=1,2,\cdots t$，$T_r-e_s+f_s$都是支撑树；即是说对每个$s=1,2,\cdots t$；$(-e_s,+f_s)$都是$T_r$的可行交换。这些可行交换共有四种类型：

1° $e_s,f_s\in D$

2° $e_s,f_s\notin D$

3° $e_s\in D$，$f_s\notin D$

4° $e_s\notin D$，$f_s\in D$

如果存在1°，2°类可行交换$(-e_{s0},+f_{s0})$，则由$T_r$所设，有$T'=T_r-e_{s0}+f_{s0}\in\boldsymbol{B}\setminus\boldsymbol{B}_{m-1}$，且$T'$与$T_r$相邻；从而$T'\in\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B}_{m-1})$，即$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B}_{m-1})\neq\phi$. 因而我们不妨设不存在1°,2°类可行交换。由于$T_r$，$T$都是次限制树，因而3°,4°类可行交换的数目相同；我们把它们任意配对，考查其中的任意一对，不妨设：

$$(-e_1,\ +f_1)，其中\ e_1\in D,\ f_1\notin D,$$
$$(-e_2,\ +f_2)，其中\ e_2\notin D,\ f_2\in D,$$

由于不存在1°,2°类可行交换，不妨设$(-e_1,+f_2)$不是$T_r$的可行交换，由命题3知：$(-\{e_1,e_2\},+\{f_1,f_2\})$是$T_r$的可行双交换；从而

$$T''=(T_r\setminus\{e_1,e_2\})\cup\{f_1,f_2\}\in \boldsymbol{N}(\boldsymbol{B}_{m-1})$$

即是说$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B}_{m-1})\neq\phi$.

设$T^*$是$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B}_{m-1})$中权最小的一个，现在证明$T^*$可以作为图$G$的第$m$个次限制树。若不然，设$T_m$被取定为第$m$个次限制树，$T_m\in\boldsymbol{B}\setminus\boldsymbol{B}_{m-1}\setminus\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B}_{m-1})$，且

$$w(T_{m-1})\leqslant w(T_m)<w(T^*)$$

设$T_r$是$\boldsymbol{B}_{m-1}$中与$T_m$有最多公共边的次限制树，$T_r$与$T_m$不相邻。设：

$$T_r=\{a_1,a_2,\cdots a_t,g_{t+1},\cdots g_N\}$$
$$T_m=\{b_1,b_2,\cdots b_t,g_{t+1},\cdots g_N\}$$

其中 $a_i\neq b_j$; $i,j=1,2,\cdots t$; $2\leqslant t\leqslant N$.

由命题2，存在$a_1,a_2,\cdots a_t$的排列$a_{i_1},a_{i_2},\cdots a_{i_t}$；使得对每个$s=1,2,\cdots t$,有$T_m-b_s+a_{i_s}$仍是支撑树。即对每个$s=1,2,\cdots t$;（$-b_s+a_{i_s}$）都是$T_m$的可行交换，我们把这些可行交换分为四类：

1° $b_s$, $a_{i_s}\in D$

2° $b_s$, $a_{i_s}\notin D$

3° $b_s\in D$, $a_{i_s}\notin D$

4° $b_s\notin D$, $a_{i_s}\in D$

因为$T_r$是$\boldsymbol{B}_{m-1}$中与$T_m$有最多公共边的次限制基，所以$T_m$经过1°,2°类可行交换得到的支撑树$T'=T_m-b_s+a_{i_s}\notin\boldsymbol{B}_{m-1}$；即有

$$w(T_m-b_s+a_{i_s})=w(T')\geqslant w(T_m)$$

即

$$w(a_{i_s})\geqslant w(b_s).$$

我们再来考查3°,4°类可行交换；由于$T_r,T_m$都是次限制树,所以3°,4°类可行交换的数目相同。我们把3°,4°类可行交换任意配对，任取其中一对考查。不妨设

$$(-b_1,+a_{i_1}),\ b_1\in D,\ a_{i_1}\notin D$$
$$(-b_2,\ +a_{i_2}),\ b_2\notin D,\ a_{i_2}\in D$$

如果$(-b_1,+a_{i_2})$，$(-b_2,+a_{i_1})$同是$T_m$的可行交换,则我们把它们分别归入1°,2°类；否则，由命题3，我们得到$T_m$的一个可行双交换（$-\{b_1,b_2\}$，$+\{a_{i_1},a_{i_2}\}$）. 即是说$T''=(T_m\setminus\{b_1,b_2\})\cup\{a_{i_1},a_{i_2}\}$仍是次限制树。由$T_r$所设，可知$T''\notin\boldsymbol{B}_{m-1}$. 从而$w(T'')\geqslant w(T_m)$。即

$$w(a_{i_1})+w(a_{i_2})\geqslant w(b_1)+w(b_2)$$

综上所述，有

$$\sum_{s=1}^{t}w(a_s)\geqslant\sum_{s=1}^{t}w(b_s)\tag{3.1}$$

另一方面，又由命题2，存在$b_1,b_2\cdots b_t$的排列$b_{j_1},b_{j_2},\cdots b_{j_t}$，使得对于$s=1,2,\cdots t$,有$T_r-a_s+b_{j_s}$仍是支撑树。应用上段的作法,我们把四类可行交换调整成对$T_r$的三种交换：

(1)（$-a_s,+b_{j_s}$）是$T_r$的可行交换；$a_s,b_{j_s}\in D$,

(2)（$-a_s,+b_{j_s}$）是$T_r$的可行交换；$a_s$, $b_{j_s}\notin D$,

(3) 形如 $(-a_1, +bj_1)$，$a_1 \in D$，$bj_1 \notin D$，

$(-a_2, +bj_2)$，$a_2 \notin D$，$bj_2 \in D$，

$(-\{a_1, a_2\}, +\{bj_1, bj_2\})$ 是 $T_r$ 的可行双交换

由 $T_r$ 所设，通过(1)，(2)类可行交换，(3)类可行双交换，我们得到的这些次限制树，它们都不属于 $\boldsymbol{B}_{m-1}$，因而它们全属于 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B}_{m-1})$，于是由 (1),(2) 类可行交换得到的 $T' = T_r - a_s + bj_s$ 有

$$w(T_r - a_s + bj_s) = w(T') \geqslant w(T^*) > w(T_m) \geqslant w(T_r),$$

于是 $$w(bj_s) > w(a_s).$$

而对(3)类可行双交换得到的 $T'' = (T_r \setminus \{a_1, a_2\}) \cup \{bj_1, bj_2\}$，也有

$$w(T'') \geqslant w(T^*) > w(T_m) \geqslant w(T_r)$$

于是 $$w(bj_1) + w(bj_2) > w(a_1) + w(a_2)$$

从而有

$$\sum_{s=1}^{t} w(b_s) > \sum_{s=1}^{t} w(a_s) \tag{3.2}$$

由(3.1)，(3.2)推得矛盾，从而定理 1 得证。

下面我们叙述求前两棵 $k$ 次限制树的简单算法。

Step1 采用 greedy 算法求得最小树 $T$，计算 $|T \cap D| = p$.

若 $p < k$，重复使用命题 5 中的方法，求得具 $k$ 次限制的最小树。

若 $p > k$，重复使用命题 6 中的方法，求得具 $k$ 次限制的最小树。

若 $p = k$，$T$ 就是 $k$ 次限制的最小树。

在上述过程中，如果 $\mu = \phi$，停止，这时不存在 $k$ 次限制的支撑树。把求得的 $k$ 次限制的最小树记为第 1 个次限制树 $T_1$.

Step 2 设 $E \setminus T_1 = \{a_1, a_2, \cdots a_s, b_1, b_2, \cdots b_t\}$，其中

$$a_i \in D,\ i = 1, 2, \cdots s;\ b_j \notin D,\ j = 1, 2, \cdots t.$$

2.1、对 $a_1, a_2, \cdots a_s$ 依次做可行交换，

设 $l_1$ 是 $(C(T_1, a_1) \setminus \{a_1\}) \cap D$ 中最大权者，

……

$l_s$ 是 $(C(T_1, a_s) \setminus \{a_s\}) \cap D$ 中最大权者。

如果某个 $l_i$ 不存在，则令 $w(a_i) - w(l_i) = +\infty$，

设 $\alpha_1 = \min\{w(a_i) - w(l_i) \mid i = 1, 2, \cdots s\} = w(a_{i_0}) - w(l_{i_0})$

2.2、对 $b_1, b_2, \cdots b_t$ 依次做可行交换

设 $\lambda_1$ 是 $C(T_1, b_1) \setminus \{b_1\} \setminus D$ 中最大权者，

……

$\lambda_t$ 是 $C(T_1, b_t) \setminus \{b_t\} \setminus D$ 中最大权者。

如果某个 $\lambda_j$ 不存在，则令 $w(b_j) - w(\lambda_j) = +\infty$，

设 $$\alpha_2 = \min\{w(b_j) - w(\lambda_j) \mid j = 1, 2, \cdots t\} = w(bj_0) - w(\lambda j_0).$$

2.3 对 $a_1, a_2, \cdots a_s$ 依次做可行交换

设 $\sigma_1$ 是 $C(T_1, a_1) \setminus D$ 中最大权者，

……

$\sigma_s$ 是$C(T_1,a_s)\setminus D$中最大权者，

如果某个 $\sigma_p$ 不存在，则令 $w(a_p)-w(\sigma_p)=+\infty$.

设 $$\min\{w(a_p)-w(\sigma_p)\,|p=1,2,\cdots s\}=w(a_{p_0})-w(\sigma_{p_0}).$$

2.4、对 $b_1,b_2,\cdots b_t$ 依次做可行交换，

设 $\delta_1$ 是 $C(T_1,b_1)\cap D$中最大权者，

……

$\delta_t$ 是 $C(T_1,b_t)\cap D$中最大权者，

如果某个 $\delta_q$ 不存在，则令 $w(b_q)-w(\delta_q)=+\infty$.

设 $$\min\{w(b_q)-w(\delta_q)\,|q=1,2,\cdots t\}=w(b_{q_0})-w(\delta_{q_0}).$$

令 $$\alpha_3=(w(a_{p_0})-w(\sigma_{p_0}))+(w(b_{q_0})-w(\delta_{q_0})).$$

求 $\alpha=\min\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$，这里我们约定，仅当 $\alpha_3<\alpha_1$，$\alpha_3<\alpha_2$ 时，才取 $\alpha=\alpha_3$.

当 $\alpha=\alpha_1$，取 $T=T_1+a_{i_0}-l_{i_0}$，

当 $\alpha=\alpha_2$，取 $T=T_1+b_{j_0}-\lambda_{j_0}$，

当 $\alpha=\alpha_3$，取 $T=T_1\cup\{a_{p_0},\ b_{q_0}\}\setminus\{\sigma_{p_0},\ \delta_{q_0}\}$.

$T$ 是第 2 个次限制树。

[**定理 2**] 如果 $\alpha=\alpha_3$，则

$$T=T_1\cup\{a_{p_0},\ b_{q_0}\}\setminus\{\sigma_{p_0},\ \delta_{q_0}\}$$

一定是$G$的支撑树，因而是次限制树。

**证明**：如果 $T_1+a_{p_0}-\delta_{q_0}$，$T_1+b_{q_0}-\sigma_{p_0}$ 也都是支撑树，则因 $T_1$ 是第一个次限制树，于是

$$w(a_{p_0})\geqslant w(\delta_{q_0})$$

这样一来，

$$w(T_1+b_{q_0}-\sigma_{p_0})\leqslant w(T_1+b_{q_0}-\sigma_{p_0}+a_{p_0}-\delta_{q_0})$$

但

$$w(T_1+b_{j_0}-l_{j_0})\leqslant w(T_1+b_{q_0}-\sigma_{p_0})$$

从而

$$\alpha_2\leqslant\alpha_3$$

根据算法，$\alpha_3$ 不被选到，与所设矛盾。由此可知，$T_1+a_{p_0}-\delta_{q_0}$，$T_1+b_{q_0}-\sigma_{p_0}$ 至少一个不是支撑树；根据命题 3，$T_1\cup\{a_{p_0},\ b_{q_0}\}\setminus\{\sigma_{p_0},\ \delta_{q_0}\}$ 是支撑树。定理 2 得证。

[**定理 3**] $T$ 是第 2 个次限制树。

**证明**：根据定理 1，我们取$N(T_1)$中权最小者$T_2$，若$T$ 不能做为第 2 个次限制树，则有

$$w(T_2)<w(T).$$

由$T$ 的选取可知，$T_2$ 不是由$T_1$ 经过(1)，(2)类可行交换所得到。设

$$T_2=T_1\cup\{e,f\}\setminus\{g,h\}.$$

其中 $e$，$g\in D$；$f,h\notin D$. 由命题 2 可知，或者

（i） $T_1+e-g$，$T_1+f-h$ 都是支撑树，或者

（ii） $T_1+e-h$，$T_1+f-g$ 都是支撑树。

若是(i)，由 $T_1$ 是第一个次限制树，所以

$$w(f)\geqslant w(h).$$

从而

$$\begin{aligned} w(T)>w(T_2)&=w(T_1\cup\{e,f\}\setminus\{g,h\})\\ &\geqslant w(T_1+e-g)\\ &\geqslant w(T_1)+\alpha_1 \end{aligned}$$

但这与 $T$ 的选取矛盾。

若是(ii)，由 $w(e)-w(h)\geqslant w(a_{p_0})-w(\sigma_{p_0})$，

$$w(f)-w(g)\geqslant w(b_{q_0})-w(\delta_{q_0})$$

于是

$$\begin{aligned} w(T)>w(T_2)&=w(T_1\cup\{e,f\}\setminus\{g,h\})\\ &\geqslant w(T_1\cup\{a_{p_0},b_{q_0}\}\setminus\{\sigma_{p_0},\delta_{q_0}\})\\ &=w(T_1)+\alpha_3 \end{aligned}$$

又与 $T$ 的选取矛盾，从而定理 3 得证。

## §4 例 子

图 $G$，$w(e_j)=j$，$j=1,2,\cdots 17$；求在顶点 0 处具 2 次限制的前两棵树（见图）

作法。首先求得最小树 $T_0$，

$$T_0=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,14,16\}$$

$$D=\{1,2,5,13\}$$

$$|T_0\cap D|=3>2$$

由命题 6，求代价最小的可行交换，

$$\min\{10-2,\ 11-5,\ 15-5,\ 17-5\}=11-5.$$

从而得到第 1 个次限制树 $T_1$，

$$T_1=\{1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,14,16\}$$

$$E\setminus T_1=\{5,13;\ 10,15,17\}$$

求
$$\alpha_1=\min\{5-1,\ 13-1\}=5-1$$

$$\alpha_2=\min\{10-4,\ 15-11,\ 17-12\}=15-11$$

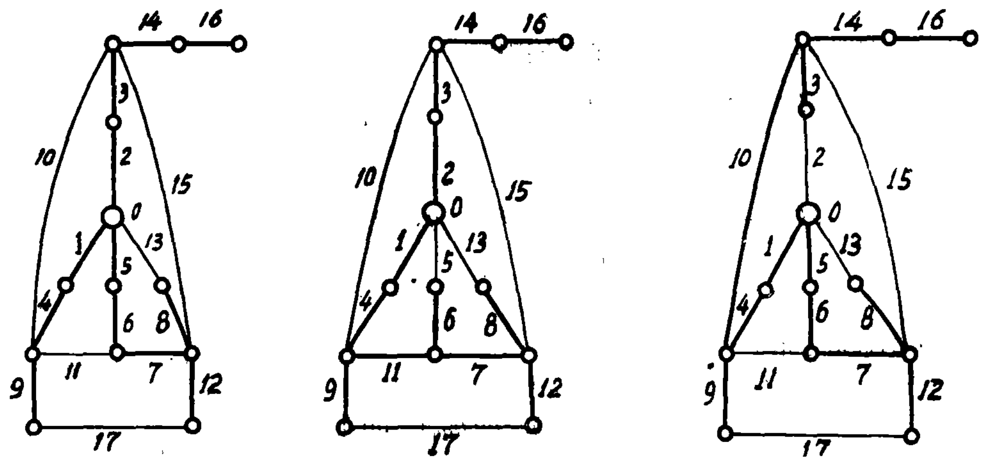
$$w(a_{p_0})-w(\sigma_{p_0})=\min\{5-11,\ 13-11\}=5-11,$$

$$w(b_{q_0})-w(\delta_{q_0})=\min\{10-2,\ 15-2\}=10-2,$$

$$\alpha_3=(5-11)+(10-2)$$

$$\alpha=\alpha_3=(5-11)+(10-2)$$

得 $T_2=T_1+e_5-e_{11}+e_{10}-e_2=\{1,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,16\}$




$T_0$ $w(T_0)=87$　　$T_1$ $w(T_1)=93$　　$T_2$ $w(T_2)=95$

## §5 结 束 语

设$E$是有限元素的集合，$B$是$E$的一个子集簇，若它满足：

（i） 对任意的$s$，$s'$，若$s\subset s'$，$s'\in B$，则$s\notin B$。

（ii） 对任意的$T_1,T_2\in B$，任意$e\in T_1$，则存在$e'\in T_2$，使得$(T_1\setminus\{e\})\cup\{e'\}\in B$则称$M=(E,B)$是一个拟阵(Matroid)，$B$中的成员称为$M$的基，而$B$称为基的簇。不难看出，連通图的支撑树集合组成了一个拟阵的基簇。设$D\subseteq E$是特别指定的子集，$k$为特别指定的正整数。并且对于每个元素$e\in E$，赋于实数权$w(e)$，对于任意的$T\in B$，我们称

$$\sum_{e\in T} w(e)$$

是基$T$的权。我们称$T\in B$是在$D$上具$k$次限制的基，如果$|T\cap D|=k$. 我们记

$$\boldsymbol{B}=\{T\ |T\in B.\ 且\ |T\cap D|=k\}.$$

如果$T_1\in\boldsymbol{B}$满足条件：

$$w(T_1)=\min\{w(T)\ |T\in\boldsymbol{B}\}$$

则称$T_1$是拟阵$M$的具$k$次限制的第1个最小基。与支撑树类似地，我们定义第$m$个次限制基。由于本文所用到的关于支撑树的性质都能照搬到拟阵中来，因而我们就給出了求前两个次限制基的简单算法，令人遗憾的是还沒有找到求第3个次限制基的简单算法。当然我们可以根据[3]给出求第$m$个次限制基的算法，但是它将需要很大的存贮量和需要做大量的比较。

### 参 考 文 献

[1] J. Kruskal. "On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem". Proc Amer Math. soc. 7. 48—50(1956)

[2] Fred Glover and Darwin Klingman "Finding Minimum Spanning trees with a fixed number of links at a node". B. Roy(ed) Combinatorial programming Methods and Applications 191—201.

[3] R. N. Burns and C. E. Haff. "A Combinatorial ranking problem" Aequations Math. 14 (1976) 351—355 University of waterloo Birkhäuser Verleg. Basel.

# Finding the Second Spanning Tree with a Fixed Number of Edges at a Vertex

Chen Qing—hua

**Abstract**

The minimum Spanning tree problem in which a given vertex is required to have a fixed number of incident edges was solved by F. Glover and D. Klingman. This paper give a simple algorithm finding the second spanning tree with a fixed numer of edges at a vertex, and extend this algorithm to finding the second order-constrained base of Matroid.