复合伪码波形函数在Galois(q^n)域上的K维并矢展开与应用

谷学敏　王家培

提　要　本文用数论变换的方法，研究了复合伪随机码波形函数在Galois(q^n)域上的k维并矢展开，建立了简单且便于应用的数学模型，对其展开方法、基函数及序率谱属性作了分析。作为应用举例，还介绍了使用这种方法分析复合伪码的相关函数、功率谱、扩谱及双重逐次渐近匹配滤波等问题。

一、概　　述

深空测距常用复合伪码解距离模糊。直接用卷积器实现深空测距的伪码匹配滤波，在设备量上难于接受。另一方面，此时信号回波的信/噪比甚低，如何实现弱信号的快捕、检测与估值，是测距复合伪码逻辑设计中要考虑的问题。国内外学者对此作了大量的工作 [3]、[7]、[8]、[9]、[10]、[11]。评价各种方法之优劣及复码的综合分析，均要求建立一种方便而有效的数学模型。复合伪码波形函数在 Galois (q^n) 域上的k維并矢展开，是较好的数学模型中的一种。这种方法的主要优点是，可将复码问题化为单码问题来解决。同时，此展开的基函数 $\Phi(s,x)$ 是k維并矢阿贝尔循环群，从而把这种变换与广义变换联系起来，因此可不加证明地获得这种变换的很多知识。另一方面，此处所定义的基函数$\Phi(s,x)$与普通正交理论中所建立的基函数是同一数学模型，这给数学运算上带来很大方便。作者认为，这将为进一步研究复合伪随机码的特性及设计带来好处。

二、复合伪码波形函数展开的基本原理

若复合伪随机测距码在 $(0,1)GF_2$ 域上的逻辑变元θ_x，是子码在 $(0,1)GF_2$域上周期互素的逻辑变元 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 按照 $\theta_x=\theta(x_1, x_2,\cdots, x_k)$ 的逻辑函数关系所构成，则称 $\theta_x=\theta(x_1, x_2,\cdots, x_k)$ 为复合测距伪码的逻辑函数，称 $F(\theta_x)=(-1)^{\theta_x}$为复码的波形函数，$F(x_i)=(-1)^{x_i}$为子码波形函数。

定理一　k 个逻辑变元 x_i 的复码波形函数$F(\theta_x)$ 可用 2^k 个基函数展开。

本文1983年3月31日收到

$$F(\theta_x)=\sum_{s=0}^{2^k-1}f(s)\Phi(s,x) \tag{1}$$

式中，$f(s)$为序率谱；

$$\text{基函数}\quad \Phi(s,x)=(-1)^{s_1x_1\oplus s_2x_2\oplus\cdots\oplus s_kx_k}; \tag{2}$$

$$s=s_k2^{k-1}+s_{k-1}2^{k-2}+\cdots+s_i2^{i-1}+\cdots+s_12^0;$$

$$x=x_k2^{k-1}+x_{k-1}2^{k-2}+\cdots+x_i2^{i-1}+\cdots+x_12^0;$$

$\oplus$表模 2 加。

s_i与x_i对应 s 及 x 为十进制数时某种编序的二进制数中的某一位数，以后用s_j,s_h，s_l 表示 s 是十进制数，x_j，x_h,x_l 表示 x 是十进制数。

证明

1. k 个子码波形函数 $F(x_i)$ 及其交调分量 $\prod\limits_{x_i\in\{x_i\}}F(x_i)$ 最多有 $\sum\limits_{m=0}^{k}C_k^m=2^k$ 个，而$\Phi(s,x)=(-1)^{s_1x_1\oplus s_2x_2\oplus\cdots\oplus s_kx_k}$，$s$ 从 0 到 2^k-1 遍历取值时，恰为 k 个子码波形函数$F(x_i)$及其交调分量 $\prod\limits_{x_i\in\{x_i\}}F(x_i)$.

2. 根据$(-1)^{x_i}=F(x_i)$，$F(x_i)=1-2x_i$，$x_i=\dfrac{1-F(x_i)}{2}$，$F^2(x_i)=1$，进一步研究四种基本逻辑运算与代数运算之间的关系。

(1) 模 2 加：$(-1)^{x_1\oplus x_2}=F(x_1)\cdot F(x_2)$

(2) 布尔乘：$(-1)^{x_1x_2}=\dfrac{1}{2}[F(x_1)+F(x_2)-F(x_1)F(x_2)+1]$

(3) 布尔加：$(-1)^{x_1\overset{*}{+}x_2}=\dfrac{1}{2}[F(x_1)+F(x_2)+F(x_1)F(x_2)-1]$

(4) 非运算：$(-1)^{\overline{x_1}}=-F(x_1)$

上述式中左端为逻辑运算,右端为子码波形函数$F(x_i)$及其交调分量 $\prod\limits_{x_i\in\{x_i\}}F(x_i)$ 的线性组合。复码逻辑运算均由以上四种基本运算组成，故复码波形函数也可用2^k个子码波形函数及其交调分量的线性组合表示。 （证毕）

三、复码波形函数F(θ_x)在GF(q^n)域上的 k 维并矢展开

为了进一步了解这种变换的属性，我们寻求一种熟悉其特性的变换。如这种变换恰为或近似为上述变换，则我们即可很快掌握上述变换的一系列特征。

定理二 在 $GF(q^n)$ 有限域上，q 为素数，$n\geqslant1$ 且为整数，$q^n-1=d_1d_2\cdots d_k$，d_i 为正整数，ω 是$GF(q^n)$域上乘群$GF^*(q^n-1)$的生成元，且置 $d_i'd_i=q^n-1(1\leqslant i\leqslant k)$，则可定义一$q^n-1$元、$k$ 維且具有循环卷积特性的可逆变换：

$$F(\theta_x)=\sum_{s_1=0}^{d_1-1}\cdots\sum_{s_k=0}^{d_k-1}f(s)\,w^{-\left(\frac{s_1x_1}{d_1}+\cdots+\frac{s_kx_k}{d_k}\right)} \tag{3}$$

$$f(s)=\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{d_i}\right)\sum_{x_1=0}^{d_1-1}\cdots\sum_{x_k=0}^{d_k-1}F(\theta_x)\,w^{\left(\frac{s_1x_1}{d_1}+\cdots+\frac{s_kx_k}{d_k}\right)} \tag{4}$$

证明 $w_i=w^{-\frac{1}{d_i}}$是$GF(q^n)$域上乘群$GF^*(q^n-1)$的d_i阶生成元，又$q^n-1=d_1\cdots d_k$，q为素数，故此乘群$GF^*(q^n-1)$为一(q^n-1)元的循环群，并具有k个循环子群，所以可以定义一个(q^n-1)元、k維且具有循环卷积特性的可逆变换[1]、[2]、[6]、[12]、[13]：

$$F(\theta_x)=\sum_{s_1=0}^{d_1-1}w^{d_1's_1x_1}\sum_{s_2=0}^{d_2-1}w^{d_2's_2x_2}\cdots\sum_{s_k=0}^{d_k-1}f(s)\,w^{d_k's_kx_k} \tag{5}$$

又因 $d_i'd_i=q^n-1=-1 \pmod{q^n}$

故
$$d_i'=-\frac{1}{d_i} \tag{6}$$

(6) 式代入(5)式可得：

$$F(\theta_x)=\sum_{s_1=0}^{d_1-1}\cdots\sum_{s_k=0}^{d_k-1}f(s)\,w^{-\left(\frac{s_1x_1}{d_1}+\frac{s_2x_2}{d_2}+\cdots+\frac{s_kx_k}{d_k}\right)} \tag{7}$$

其逆变换为

$$f(s)=\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{d_i}\right)\sum_{x_1=0}^{d_1-1}\cdots\sum_{x_k=0}^{d_k-1}F(\theta_x)\,w^{\left(\frac{s_1x_1}{d_1}+\cdots+\frac{s_kx_k}{d_k}\right)} \tag{8}$$

(证毕)

定理三 复码波形函数 $F(\theta_x)$ 的 k 維并矢展开，是定理二中$d_1=d_2=\cdots=d_k=2$的特殊情况。

证明

1. 当 $w_i=e^{-j2\pi/d_i}$时，(7)式及(8)式为DFT（离散傅里叶变换）。

2. 当 $w_i=e^{-j2\pi/2}$时，(7)式为：

$$\begin{aligned}F(\theta_x)&=\sum_{s_1=0}^{1}\cdots\sum_{s_k=0}^{1}f(s)(-1)^{\sum_{i=1}^{k}s_ix_i}\\&=\sum_{s_1=0}^{1}\cdots\sum_{s_k=0}^{1}f(s)(-1)^{\sum_{i=1}^{k}\oplus s_ix_i}\\&=\sum_{s=0}^{2^k-1}f(s)\Phi(s,x)\end{aligned} \tag{9}$$

同理参考(8)式可得序率谱 $f(s)$ 的表示式

$$f(s)=\frac{1}{2^k}\sum_{x_1=0}^{1}\cdots\sum_{x_k=0}^{1}F(\theta_x)(-1)^{s_1x_1\oplus\cdots\oplus s_kx_k} \tag{10}$$

用矩阵表示为：

$$[f(s)]=\frac{1}{2^k}[\Phi(s,x)][F(\theta_x)] \tag{11}$$

式中 $[F(\theta_x)]=[F(\theta_0),\ F(\theta_1),\cdots,F(\theta_j),\cdots,F(\theta_{2^k-1})]^T$

$$[\Phi(s,x)]=[(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{k}\oplus s_i x_i}]$$

[ ]表矩阵。 （证毕）

引理一 复合伪码波形函数 $F(\theta_x)$ 的 k 維幷矢展开在子码周期 p_i 足够大时，基函数$\Phi(s,x)$之间可近似认为相互正交。

证明 基函数$\Phi(s_j,x)$与$\Phi(s_h,x)$ 间若相互正交，则

$$\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1}\Phi[s_j,x(i\tau_0)]\cdot\Phi[s_h,\ x(i\tau_0)]=\begin{cases}1\ , & j=h\\ 0\ , & j\neq h\end{cases} \tag{12}$$

式中，τ_0为码元宽度，p为复码周期内的码元数，简称复码周期。p_j、p_h为子码周期内的码元数，简称子码周期。而实际上

$$\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1}\Phi[s_j,x(i\tau_0)]\cdot\Phi[s_h,\ x(i\tau_0)]=\begin{cases}1\ , & j=h\\ \dfrac{1}{p_j p_h}, & j\neq h\end{cases} \tag{13}$$

上式对m码是准确的，对其它伪码则是近似的。

若 p_j，$p_h\gg1$，则$\dfrac{1}{p_j p_h}\approx0$ （证毕）

引理二 复合伪码波形函数 $F(\theta_x)$ 的 k 維幷矢展开的基函数集合 $\{\Phi(s,\ x)\}$，对乘法构成一阿贝尔循环群，且与 k 維幷矢群同构。

证明

1． 基函数之积仍为基函数

$$\begin{aligned}\Phi(s_j,x)\cdot\Phi(s_h,x)&=(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{k}\oplus s_i x_i}\cdot(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{k}\oplus s_i' x_i}\\&=(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{k}\oplus(s_i\oplus s_i')x_i}=\Phi(s_j\oplus s_h,\ x)\end{aligned} \tag{14}$$

同理可得

$$\Phi(s,x_j)\cdot\Phi(s,x_h)=\Phi(s,x_j\oplus x_h)$$

又由于基函数是完备的，故$\Phi(s_j\oplus s_h,x)\in\{\Phi(s,x)\}$及$\Phi(s,x_j\oplus x_h)\in\{\Phi(s,x)\}$.

2． 基函数的逆元存在，且为基函数本身。

$$\Phi(s_j,x)\cdot\Phi(s_j,x)=\Phi(s_j\oplus s_j,x)=\Phi(0,x)=1$$

故 $$\Phi(s_j,x)=\Phi(s_j,x)^{-1}.$$

3． 基函数与单位元素之积仍为基函数本身。

$$\Phi(s_j,x)\cdot\Phi(0,x)=\Phi(s_j,x).$$

4． 基函数的乘法运算符合结合律与交换律。

$$\Phi(s_j,x)\cdot\Phi(s_h,x)\cdot\Phi(s_l,\ x)=\Phi(s_j\oplus s_h\oplus s_l,\ x)$$
$$=\Phi((s_j\oplus s_h)\oplus s_l,x)=(\Phi(s_j,x)\cdot\Phi(s_h,x))\Phi(s_l,x)=\cdots$$

由上列四条性质可知，基函数集合 $\{\Phi(s,x)\}$ 对乘法运算构成一阿贝尔群，又根据定理三，此阿贝尔群是与 k 維并矢空间同构的循环群。

（证毕）

引理三 沃尔什编号、佩利编号及阿达码编号定序的复码波形函数 k 維并矢展开的基函数集合$\{\Phi(s,x)\}$是自同构的。

证明 因三种编号是一一对应的，故此引理成立。 （证毕）

引理四 复码波形函数$F(\theta_x)$是在 k 維并矢空间的正交展开，其变换矩阵可用递归法形成，即

$$[\Phi(s,x)]=[W]=[W_1]\otimes[W_2]\otimes\cdots\otimes[W_k] \tag{15}$$

式中，$[W]$为总变换矩阵，$[W_i]$ 为第 i 維变换矩阵。

$\otimes$表示克罗内克(Kronecker)积算子。

证明 (9)式用矩阵表示，即为：

$$[F(\theta_x)]=[W_1]\otimes[W_2]\otimes\cdots\otimes[W_k][f(s)] \tag{16}$$

故
$$[W]=[W_1]\otimes[W_2]\otimes\cdots\otimes[W_k] \tag{17}$$

如按阿达玛编号定序时

$$[W_i]=\left[(-1)^{\sum\limits_{s_i,x_i=0}^{1} s_i x_i}\right]=\begin{array}{cc} & \xrightarrow{\quad} s_i \\ & \begin{array}{cc}0 & 1\end{array} \\ x_i\downarrow\begin{array}{c}0\\1\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\end{array}$$

同理可得：

$$[f(s)]=2^{-k}[W][F(\theta_x)] \tag{18}$$

（证毕）

引理五 复合伪码波形函数$F(\theta_x)$的 k 維并矢展开的序率谱$f(s)$的集合之和

$$\sum_{s=0}^{2^k-1} f(s)=1 \tag{19}$$

证明 $F(\theta_x)=\sum\limits_{s=0}^{2^k-1} f(s)\Phi(s,x)$

令$x=0$，则$\Phi(s,0)=1=F(0)=\sum\limits_{s=0}^{2^k-1} f(s)$. （证毕）

引理六 复合伪码波形函数$F(\theta_x)$的 k 維并矢展开序率功率谱集合之和

$$\sum_{s=0}^{2^k-1} f^2(s)=1 \tag{20}$$

证明 $F(\theta_x)=\sum\limits_{s=0}^{2^k-1} f(s)\Phi(s,x)$

考虑基函数间相互正交，故

$$F^2(\theta_x)=\sum_{s=0}^{2^k-1}f^2(s)=1. \qquad \text{(证毕)}$$

引理七 k个逻辑变元的复码序率功率谱 $f^2(s)$ 对复码波形函数$F(\theta_x)$具有k維幷矢移位不变性及循环移位不变性，即$F(\theta_x)$与$F(\theta_x\oplus l)$和$F(\theta_x+l)$具有相同的序率功率谱。

证明 $F(\theta_x\oplus l)=F(\theta_x)\cdot\Phi(s,l)$，

则$F(\theta_x\oplus l)$的序率谱 $f_l(s)=f(s)\cdot\Phi(s,l)$，

故 $$f_l^2(s)=f^2(s)\cdot\Phi^2(s,l)=f^2(s).$$

同理可证得具有循环移位不变性。 (证毕)

引理八 k个逻辑变元的复码波形函数 $F(\theta_x)$，具有k維幷矢循环相关及k維幷矢循环卷积特性。

证明 基函数集合$\{\Phi(s,x)\}$为 2^k 元，k維幷矢阿贝尔循环群，故构成一具有k維幷矢循环卷积特性的可逆变换。 (证毕)

四、应 用 举 例

1. 复码自相关函数与功率谱

例 1 复码波形自相关函数 $R_{F(\theta_x)}(\tau)$近似为各基函数的自相关函数 $R_{\phi(s,x)}(\tau)$乘对应功率谱分量的代数和。

$$R_{F(\theta_x)}(\tau)=\sum_{s=0}^{2^k-1}f^2(s)\cdot R_{\phi(s,x)}(\tau) \tag{21}$$

说明：这是因为复合伪码基函数$\Phi(s,x)$具有近似正交性之故。

例 2 复码波形函数的基函数为子码波形函数的連乘积时，此基函数的自相关函数亦为各子码波形函数的自相关函数之連乘积。

$$R_{F(x_1)\cdot F(x_2)\cdot F(x_3)}(\tau)=R_{F(x_1)}(\tau)\cdot R_{F(x_2)}(\tau)\cdot R_{F(x_3)}(\tau) \tag{22}$$

例 3 复码波形函数的基函数为子码波形函数的連乘积，且子码数很多时，此基函数的自相关函数可近似等于周期为各子码波形函数周期連乘积的单一子码波形函数的自相关函数。

即若 $$\Phi(s,x)=F(x_l)\cdot F(x_i)\cdots F(x_h) \tag{23}$$

且 $$p_s=p_l\cdot p_i\cdots p_h$$

则 $$R_{\phi(s,x)}(\tau)\approx R_{F(x_s)}(\tau) \tag{24}$$

用此法求功率谱，可较例 2 更简单。

例 4 复码波形函数的基函数为子码波形函数的連乘积时，此复码波形函数基函数的功率谱为各子码自相关函数傅里叶变换后的卷积。

即若 $$R_{\phi(s_l,x)}(\tau)=R_{F(x_1)}(\tau)\cdot R_{F(x_2)}(\tau)\cdots R_{F(x_i)}(\tau) \tag{25}$$

则 $$G_{\phi(s_l,x)}(f)=G_{F(x_1)}(f)*G_{F(x_2)}(f)*\cdots*G_{F(x_i)}(f) \tag{26}$$

式中，符号＊表卷积算子。

说明：DFT具有循环卷积变换特性。

例 5　复码波形函数$F(\theta_x)$的功率谱$G_{F(\theta_x)}(f)$近似为各基函数的功率谱乘对应序率功率谱分量的代数和。

$$G_{F(\theta_x)}(f)=\sum_{s=0}^{2^k-1}f^2(s)G_{\Phi(s,x)}(f) \tag{27}$$

说明：对(21)式两边取傅里叶变换即得。

2. 复码的扩谱

例 6　周期互素的平衡伪随机单码逻辑变元时间序列，通过模2加组成的复合伪随机码波形时间序列仍为平衡码。

说明：$F(\theta_x)=F(x_1)F(x_2)$，$F(x_1)$与$F(x_2)$的互相关系数为零。

例 7　复码波形时间序列及子码波形时间序列均为平衡码时，则$F(x_{cl}\oplus\theta_x)$的功率谱中将不含码钟分量，即码钟分量的能量全部扩散到伪码的频带中去。

说明：复码序率谱中的直流分量$f(s_0)=0$.

例 8　带码钟的k个逻辑变元复码波形函数$F(x_{cl}\oplus\theta_x)$需用$k+1$維并矢展开。

说明：在用k維并矢展开时，基函数$\Phi(s_j,x)\Phi(s_h,x)$不一定在集合$\{\Phi(s,x)\}$中，故此“伪”基函数不是乘群。

例 9　复合伪码对副载波调相的归一化自相关函数、功率谱与扩谱。

(1) 复合伪码对副载波调相的归一化自相关函数$R^{(p)}_{F(\theta_x)}(\tau)$.

$$\begin{aligned}R^{(p)}_{F(\theta_x)}(\tau)=&\cos\omega_0\tau\cdot\sin^2 m_p\sum_{s=0}^{2^k-1}f^2(s)R_{TS}(\tau)*\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{\infty}\delta(\tau-np_s\tau_0)\\&+\cos\omega_0\tau\left\{\sin^2 m_p\left[f^2(s_0)+\sum_{s=0}^{2^k-1}f^2(s)R_{os}(\tau)\right]+\cos^2 m_p\right\}\end{aligned} \tag{28}$$

式中，$R_{TS}(\tau)$与$R_{os}(\tau)$为基函数$\Phi(s,x)$的自相关函数中的周期与非周期部分，m_p为调制指数。

当$\omega_0=0$及$m_p=\pi/2$时，即为复合伪码基带信号的归一化自相关函数。

$$\begin{aligned}R_{F(\theta_x)}(\tau)=&\sum_{s=0}^{2^k-1}f^2(s)\,R_{TS}(\tau)*\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{\infty}\delta(\tau-np_s\tau_0)\\&+\left[f^2(s_0)+\sum_{s=1}^{2^k-1}f^2(s)\cdot R_{os}(\tau)\right]\end{aligned} \tag{29}$$

(2) 复合伪码对副载波调相的归一化功率谱。

$$\begin{aligned}G^{(p)}_{F(\theta_x)}(f)=&\sin^2 m_p\sum_{s=1}^{2^k-1}f^2(s)\left(\frac{p_s+1}{p_s^2}\right)\left\{\left[\frac{\sin\pi(f-f_0)\tau_0}{\pi(f-f_0)\tau_0}\right]^2\right.\\&\left.+\left[\frac{\sin\pi(f+f_0)\tau_0}{\pi(f+f_0)\tau_0}\right]^2\right\}\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{\infty}\delta\left(f-f_0-\frac{n}{p_s\tau_0}\right)\\&+\left\{\left[f^2(s_0)+\sum_{s=1}^{2^k-1}\frac{f^2(s)}{p_s^2}\right]\sin^2 m_p+\cos^2 m_p\right\}\\&[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]\end{aligned} \tag{30}$$

(3) 复合伪码调相波的扩谱

伪码是具有扩谱特性的时间序列。

当$m_p=\pi/2$时，$\cos m_p=0$，此时 $\cos^2 m_p\cdot[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$ 项副载波分量的能量将转化为分配给各子码的能量。

当 $m_p=\pi/2$，且 $f^2(s_0)=0$，$p_s^2\gg 1$ 时，

$$\left\{\left[f^2(s_0)+\sum_{s=1}^{2^k-1}\frac{f^2(s)}{p_s^2}\right]\sin^2 m_p+\cos^2 m_p\right\}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]=0 \tag{31}$$

故

$$G^{(p)}_{F(\theta_x)}(f)=\sin^2 m_p\sum_{s=1}^{2^k-1}f^2(s)\left(\frac{p_s+1}{p_s^2}\right)\left\{\left[\frac{\sin\pi(f-f_0)\tau_0}{\pi(f-f_0)\tau_0}\right]^2+\left[\frac{\sin\pi(f+f_0)\tau_0}{\pi(f+f_0)\tau_0}\right]^2\right\}\cdot\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\delta\left(f-f_0-\frac{n}{p_s\tau_0}\right) \tag{32}$$

此时，复合伪码调相波中不再含有副载波功率谱分量，即全部能量均在各子码之间分配。换言之，副载波功率谱分量被扩散到各子码的功率谱分量上去了。

当复码调相波被接收，并用副载波锁相环提取副载波时，对副载波是解扩过程，而对噪声则是扩谱过程，故有利于对抗集中在副载波附近的噪声干扰。

3. 复合伪码的捕获

$$\text{复合伪码的捕获比}\ \eta=\frac{\text{周期为}\ p\ \text{的复码捕获时间}}{\text{周期为}\ p\ \text{的单码捕获时间}} \tag{33}$$

复合伪码的捕获比η的具体计算公式如下：

$$\eta=\sum_{i=1}^{k}p_i\left[\sum_{s\in\{s\}_i}f_{g_i}^2(s)\right]\left[\sum_{s\in\{s\}_i}f_\theta(s)f_{g_i}(s)\right]^{-2}/p \tag{34}$$

式中，$f_\theta(s)$为发码波形函数序率谱，$f_g(s)$为收码波形[不一定在$(\pm1)GF_2$域上]分解为基函数$\Phi(s,x)$时基函数前的系数；

$s\in\{s\}_i$表示在第i次捕获时s在所捕获的谱线集合$\{s\}_i$中；

p为复码周期。

例 10 美国阿波罗飞船统一s波段伪码测距信号参数为$p_1=31$，$p_2=63$，$p_3=127$，$p_4=11'$，发码波形函数$F[\theta_x=\bar{x}_4(x_1x_2\oplus x_2x_3\oplus x_1x_3)\oplus cl_{\frac{1}{2}}]$，接收机中本地码波形函数为

$F_1(g_x=\bar{X}_4X_1)$，$F_2(g_x=\bar{x}_4X_1)$，$F_3(g_x=\bar{x}_4X_2)$，$F_4(g_x=\bar{x}_4X_3)$，

求捕获比η_A。

解 $F(\theta_x)$在$(\pm1)GF_2$域上，故可用沃尔什-阿达马变换求$f_\theta(s)$．$F(\theta_x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}F(x_1)+\frac{1}{4}F(x_2)+\frac{1}{4}F(x_3)-\frac{1}{4}F(x_1)F(x_2)F(x_3)-\frac{1}{2}F(x_4)+\frac{1}{4}F(x_1)F(x_4)+$

$\frac{1}{4}F(x_2)F(x_4)+\frac{1}{4}F(x_3)F(x_4)-\frac{1}{4}F(x_1)F(x_2)F(x_3)F(x_4)$，而$F_1(g_x)+F_2(g_x)+F_3(g_x)+F_4(g_x)=F(g_x)$不在$(\pm1)GF_2$域上，但单独一个$F_i(g_x)$在$(\pm1)GF_2$域上，故可对单独的$F_i(g_x)$用沃尔什-阿达马变换求$f_{g_i}(s)$，$f_{g_i}(s)$对$F(g_x)$而言不是序率谱，仅是$F(g_x)$波形按基函数展开时基函数前的系数。具体计算见表1。

表 1

量 \ i	1(X_4)				2(X_1)				3(X_2)				4(X_3)			
s	0	1	8	9	0	1	8	9	0	2	8	10	0	4	8	12
$f_\theta(s)$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$f_{g_i}(s)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sum\limits_{s\in\{s\}_i} f_{g_i}^2(s)$	1				1				1				1			
$\left[\sum\limits_{s\in\{s\}_i} f_\theta(s)f_{g_i}(s)\right]^{-2}$	16				16				16				16			

$$\eta_A=\sum_{i=1}^{4}p_i\left[\sum_{s\in\{s\}_i}f_{g_i}^2(s)\right]\left[\sum_{s\in\{s\}_i}f_\theta(s)f_{g_i}(s)\right]^{-2}/p$$

$$=\frac{(11+31+63+127)\times16}{11\times31\times63\times127}=0.00136$$

例 11 求复合伪码"匹配"滤波的捕获比η_p。

一般信号匹配滤波的定义是发射波形$s(\theta)$等于接收机的本地波形$s(g)$，即

$$s(\theta)=s(g) \tag{36}$$

对于复合伪码，若满足

$$f_{g_i}(s)\underset{s\in\{s\}_i}{=}f_\theta(s) \tag{37}$$

且捕获所有谱线，即

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{s\in\{s\}_i}f_{g_i}(s)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{s\in\{s\}_i}f_\theta(s)=1 \tag{38}$$

则

$$F(g_x)=F(\theta_x) \tag{39}$$

故复码此时匹配滤波。(37)式代入(34)式可得：

$$\eta_p=\sum_{i=1}^{k}p_i\left[\sum_{s\in\{s\}_i}f_\theta^2(s)\right]^{-1}/p \tag{40}$$

为便于与阿波罗比较，取$p_1=11$，$p_2=31$，$p_3=63$，$p_4=127$，接收机中本地码波形为

$$F_1(g_x)=\frac{1}{2}F(\overline{X}_4),$$

$$F_2(g_x)=\frac{1}{4}F(X_1)+\frac{1}{4}F(X_1)F(x_4),$$

$$F_3(g_x)=\frac{1}{4}F(X_2)+\frac{1}{4}F(X_2)F(x_4),$$

$$F_4(g_x)=\frac{1}{4}F(X_3)-\frac{1}{4}F(x_1)F(x_2)F(X_3)+\frac{1}{4}F(X_3)F(x_4)$$

$$-\frac{1}{4}F(x_1)F(x_2)F(X_3)F(x_4).$$

表 2

量 \ i	$1(X_4)$	$2(X_1)$		$3(X_2)$		$4(X_3)$			
s	8	1	9	2	10	4	7	12	15
$f(s)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$\left[\sum_{s\in\{s\}_i} f_\theta^2(s)\right]^{-1}$	4	8		8		4			

$$\eta_p=\frac{(127+63)\times 4+(11+31)\times 8}{11\times 31\times 63\times 127}=0.000407 \tag{41}$$

故
$$\frac{\eta_A}{\eta_p}=\frac{0.00136}{0.000407}=3.3856=5.29(\mathrm{dB})$$

“匹配”滤波方案较经典阿波罗方案在捕获比上改进 5.29(dB)，但接收设备较阿波罗略为复杂一些。

例 12 对阿波罗方案在基本不增加设备复杂性条件下的改进（仅将钟环与码环分开）。

其他参数同例10，但$F_1(g_x)=F(\overline{X}_4)$，$F_2(g_x)=F(X_1\bar{x}_4)$，$F_3(g_x)=F(X_2\bar{x}_4)$，$F_4(g_x)=x_4(x_1x_2\oplus x_2x_3\oplus x_1X_3)$，则

$$\eta_k=\frac{127\times 4+(11+31+63)\times 16}{11\times 31\times 63\times 127}=\frac{2188}{2728341}=0.000802 \tag{42}$$

$$\frac{\eta_A}{\eta_k}=\frac{0.00136}{0.000802}=1.6957=2.29(\mathrm{dB})$$

即在设备是近似相同的条件下，可较阿波罗改进2.29(dB)。

例 13 复合伪码发码与收码均逐维发射与匹配方案的捕获比。

子码周期同例10，计算结果见表3。

表 3

发 码	收 码	捕获量	捕获前相关值	$\sum\limits_{s\in\{s\}_i} f_{g_i}^2(s)$	$\left[\sum\limits_{s\in\{s\}_i} f_e(s) f_{g_i}(s)\right]^{-2}$
cl	cl	cl	0	1	1
$cl\oplus x_1$	$cl\oplus X_1$	x_1	0	1	1
$cl\oplus x_2$	$cl\oplus X_2$	x_2	0	1	1
$cl\oplus x_3$	$cl\oplus X_3$	x_3	0	1	1
$cl\oplus x_4$	$cl\oplus X_4$	x_4	0	1	1

此方案由于发码是逐維发射，故应考虑收、发码之间的距离时延。当收发距离时延与捕获时间相比可以忽略时（不可忽略要计及），其捕获比为：

$$\eta_z=\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i}{p}=0.0000847$$

故
$$\eta_A/\eta_z=16.05=12(\mathrm{dB}).$$

这种方案较适用于地球卫星及战略导弹的测距系统。

以上举例仅是复合伪码k維幷矢展开应用的一部分，但可看出这种方法对研究复合伪码的性质及应用是一种有力的工具。

参 考 文 献

[1] 华罗庚，数论导引，科学出版社。

[2] 蔣增荣，数论变换，国防科技大学，1978.4.

[3] 苏泽峰，复码的D变换域匹配滤波，《中国电子学会信号与信息处理学术会议论文集》，1981.12.

[4] 苏泽峰，伪随机复码数字调制波的功率谱分析，《电子学报》，1979. 第十期。

[5] 谷学敏，王家培，“准块浮点FFT实现LFM的参数选择”，《中国电子学会信号与信息处理学术会议论文集》，1981.12.

[6] J.H.McClellen, C.M.Radar, Number Theory Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs. NJ, 1979.

[7] R.C.Titsworth, “OPtimal Ranging Codes”, IEEE Trans, SET-10, PP.19～30, March 1964.

[8] R.B.Ward and K.Yiu, “Acquisition of Pseudonoise Signals by Recursion-Aided Sequential Estimation,” IEEE Trans, COM-25,NO.8, August 1977.

[9] H.M.Pearce and M.P.Ristenbatt, “The Threshold Decooling Estimator for Synchronizaticn With Binary Linear Recursive Sequences,” ICC.1971,

[10] C.C.Kilgus, "Pseudonoise Code Acquisition Using Majority Logic Decoding," IEEE Trans, COM-21, June 1973.

[11] W.K.Alem, "Acquisition Techniques of PN Sequences," NTC 1977.

[12] J.M.Pollard, "The Fast Fourier Transform in a Finite Field", Mathematics of Computation, Vol.25.NO.114, April 1977.

[13] C.M.Radar, "Discret Fourier Transform When the Number of Data Samples is Prime," Proc, IEEE, Vol.56. NO.6 June 1968.

The K Dimentional Dyadic Expansion and Applications of Waveform Function for Composite Pseudorandom Codes in Galois(q^n) Finite Field

Gu Xue-min Wang Jia-pei

Abstract

This paper considers the K dimentional dyadic expansion of composite pseudorandom code waveform function in Galois(q^n) finite field by the use of number transform, and builds up a simple and available mathematical model. The expansion method, basis function and properties of sequency spectrum have been analyzed. As an example for its application, this paper provides the method of analyzing problems of composite pseudorandom codes with the use of this expansion. These problems contain the correlation function, the power spectrum, the spread spectrum and the dual matched filtering with progressing step by step.