

超对称性在束缚态上的表示

岳宗五

摘 要 通过把超对称性守恒荷表达为粒子产生、消灭算子进行分析, 我们找到超对称性在超对称场论口袋模型的束缚态上给出有限维表示的条件。由这些条件我们得到选择这种模型的束缚态内组分粒子波函数的准则, 它们将使求解这类模型的束缚态的工作显著简化。

给出了构造这种表示的例子并指出与“离质壳”表示的关系。还讨论了用超对称场论口袋模型统一描述轻子与夸克的可能性。

一、引 言

一个超对称性量子场论模型将有自己的超对称性守恒荷 Q , 它对时间 t 不变, 所以有

$$[H, Q] = 0 \quad (1)$$

由此不难看出, 如果 $|\psi\rangle$ 是该动力学系统的哈密顿算子 H 的本征态, 那么因 Q 连续作用在 $|\psi\rangle$ 上所得其它态也一定是 H 的同一本征值的本征态。从超变换角度看, Q 是“超变换”的“生成元”, 它作用于某态上不过是对该态进行超对称性变换。 Q 连续作用后所得到的态往往会组成独立态数目为有限的封闭的集合。人们称这集合为超对称性的一个有限维表示, 或称之为一个“超多重态”。

可见, 超对称系统的 H 的本征态必要地是属于超对称性的某个表示的, 即必要地是属于一个超多重态的。所以, 为了求解超对称动力学模型, 最好能够知道如何在态向量空间上构造超多重态。这可以使求解的态向量空间的范围变得相当确定, 使求解工作向前推进一大步。

超对称性的表示问题从一开始就已被讨论过[1][2][3], 而文献[5]更做了详细的讨论, 推广到“推广超对称性”的不可约表示问题。处理的办法不外是利用 Q 满足的代数关系, 去求 Q 连续作用在某个具有角动量量子数 j 的代表态 (Clifford 真空) 上所得独立态有多少个。对于普通超对称性理论角动量为 j 的代表态所对应的超多重态共有 $4(2j+1)$ 个独立成员, 即这个表示是 $4(2j+1)$ 维的[1][2][3]。这种讨论是不涉及运动方程的, 即是“离质壳” (off shell) 的, 其目标侧重在对于各可能的超场算子进行分类, 弄清楚为了构造一个合适的超对称性理论有哪些类型的超场可供选择。

我们现在要讨论的问题与上述有点不同。

正如在开头说明过的,我们关心的是:由已选定了的超场算子构成的超对称动力学模型,其束缚态解所属的超多重态有些什么特点,如何构造它们。目的是为了求解给定的超对称动力学模型。

处理的原则仍然是看 Q 作用于某代表态后可得到什么结果。不过,这时是“在质壳”(on shell)的事。因为,不但 Q 算子要通过拉氏函数密度表为场算子;用来构造代表态的算子要满足量子规则,而且要直接考虑场算子所满足的运动方程。这一切使对此问题的分析有了新的特点。这种类型的求超对称性表示的问题还没有被认真讨论过(作者在^[12]曾作过初步探讨)。

我们在本文打算就普通超对称性的一个常见的较简单的模型,讨论它的束缚态解(主要是低能的)所属的有限维表示(超多重态)。这里的关键是,为了得到维数有限的超多重态,用来展开场算子以得到产生、消灭算子的波函数系所应该满足的条件。我们找到了有关的一组条件。它们会从根本上简化对这个超对称模型的求解。在分析所构造出的超多重态之后,我们发现:由这类超对称动力学模型的束缚态所组成的某些超多重态有可能自然地提供一个描写轻子、夸克的框架,有可能自动地给出颜色自由度及“代”的自由度,而无需将之作为基本假设从一开始输入到模型中来。这当然是使构造关于轻子、夸克的复合模型的人感到兴趣的。

二、超对称守恒流

我们讨论的量子场论系统是与下列拉氏函数密度有关的

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x) &= (\Xi^+ \Xi + X X^+ + 2\Sigma^+ \Sigma) |_D \\ &+ [(m+f\Sigma) X \Xi + (m+f\Sigma^+) \Xi^+ X^+ + M(\Sigma \Sigma + \Sigma^+ \Sigma^+)] |_F \\ &= \left\{ \left[\frac{a^2}{2} (\partial_\mu A^+ \partial^\mu A + F^+ F) + \frac{ac^2}{8} (i\xi \not{\partial} \xi - i\bar{\xi} \not{\partial} \bar{\xi}) \right] + \left[\begin{matrix} A \rightarrow B^+ \\ F \rightarrow G^+ \\ \xi \rightarrow \chi^c \end{matrix} \right] \right. \\ &+ 2 \left[\begin{matrix} A \rightarrow \sigma \\ \xi \rightarrow \eta \\ F \rightarrow K \end{matrix} \right] \left. + \frac{a}{2} [2M(K\sigma + K^+ \sigma^+) + (m+f\sigma)(GA + FB) \right. \\ &+ (m+f\sigma^+)(G^+ A^+ + F^+ B^+) + f(KAB + K^+ A^+ B^+)] \\ &- \frac{c^2}{4} [(m+f\sigma^+) \xi \chi^c + (m+f\sigma) \bar{\chi}^c \bar{\xi} + M(\bar{\eta} \eta^c + \eta^c \eta) + f\eta^c (\xi B + \chi A) \\ &+ f\eta (\xi^c B^+ + \chi^c A^+)] - \frac{a^2}{8} \partial_\mu [\partial^\mu (A^+ A + B^+ B + 2\sigma^+ \sigma)] \\ &= \mathcal{L}(x) - \partial_\mu R^\mu \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $R^\mu = (a^2/8) \partial^\mu (A^+ A + B^+ B + 2\sigma^+ \sigma)$, $\mathcal{L}(x)$ 代表 $\mathcal{L}_0(x)$ 中除 $\partial_\mu R^\mu$ 以外的全部。

我们要讨论的动力学系统是用这个 $\mathcal{L}(x)$ 来描写的。 $\mathcal{L}(x)$ 比 $\mathcal{L}_0(x)$ 方便,因为它不含有场算子的二阶导数项。两者只差一个四维散度 $(-\partial_\mu R^\mu)$, 所以 $\mathcal{L}(x)$ 是跟 $\mathcal{L}_0(x)$ 一样地具有超对称不变性的。不选 $\mathcal{L}_0(x)$ 而选 $\mathcal{L}(x)$ 所带来的麻烦只有一点:不能像直接由超场乘积定义的 $\mathcal{L}_0(x)$ 那样,单纯地按附录 A 介绍的简便方法求得对应的 K^μ 。不过,这个麻烦并不大,因为二者所差的 $\partial_\mu R^\mu$ 在算子结构上非常简单,可直接应用超变换规则(A-4)求

得由它引起的修正。

我们选的动力学模型是过去常见的，它只是[2]、[4]中讨论过的类型中的特例。它是由三个左手手征超场构成： $\Xi(A, \xi, F)$ ， $X(B, \chi, G)$ 及 $\Sigma(\sigma, \eta, K)$ 。括弧中列出了各该超场的三个分量场，从左至右依次为标量场、左手旋量场，以及标量辅助场。 Σ 场的质量为 M ，充当“口袋场”； Ξ 与 X^* 合起来充当“物质场”，质量为 m 。通过耦合常数为 f 的汤川型相互作用，口袋场有可能把物质场束缚起来形成稳定的束缚态，即非拓扑性孤粒子解[6]。我们将在另外文章[7]中讨论本模型在一定条件下，确有非拓扑性孤粒子解存在的问题。确实有这种类型解的场论模型，在早期曾有过一个名称“场论口袋模型”(Field theoretical Bag Model)[9]。由于我们的模型又是超对称的，所以我们为了形象起见称之为“超对称场论口袋模型”或“超对称口袋模型”。

由(1)给出的 $\mathcal{L}(x)$ ，显然允许存在一个整体 $U(1)$ 不变性，这个不变性是一种内部自由度可与超对称性不相关。对应于这一 $U(1)$ 不变性，我们可以给物质场算子 Ξ 及 X^* 指定同一的内部量子数(记为 G)，而口袋场可指定它具有真空量子数(即其 $G=0$)。所以我们在以下要寻找的是本模型的“ G 量子数一定的超对称性有限维表示”。

这个模型具有超对称性是说它的 $\mathcal{L}(x)$ 在超变换规则(A-4)'(不涉及场算子的运动方程)下的改变是个四维向量 K^μ 的散度：

$$\delta_\epsilon \mathcal{L}(x) = \epsilon \partial_\mu K^\mu_{(x)}, \quad (3)$$

但并不要求 $\partial_\mu K^\mu = 0$ 。所以，四维向量 K^μ 不必满足连续性方程，因而 $K^\mu_{(x)}$ 并不对应于超对称性守恒荷的密度。不过，当我们运用关于场算子的运动方程，还可以得到另一个表达式

$$\delta_\epsilon \mathcal{L} = \epsilon \partial_\mu N^\mu \quad (4)$$

其中

$$N^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \delta_\epsilon \phi_i,$$

这里 ϕ_i 代表 $\mathcal{L}$ 中任何一个场算子。 N^μ 一般并不等于 K^μ 。请注意在得到(4)时运用了运动方程，这是 N^μ 与 K^μ 不同的地方。

于是在考虑了运动方程(“在质壳”)之后，我们有恒等式

$$\epsilon \partial_\mu K^\mu = \epsilon \partial_\mu N^\mu (= \delta_\epsilon \mathcal{L}).$$

由于 ϵ 是任意的，所以有

$$\partial_\mu (K^\mu - N^\mu) = 0. \quad (5)$$

这给出了一个连续性方程。我们乃定义超对称性守恒流为

$$S^\mu \equiv K^\mu - N^\mu \quad (6)$$

$$\text{超对称性守恒荷为 } Q \equiv \int_{\text{全空间}} d^3x S^0 \quad (6)'$$

由式(5)，一定有

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0. \quad (6)'$$

按照附录A介绍的简易办法，可以求得对应于 $\mathcal{L}_0(x)$ 的 K^μ_0 ($\delta_\epsilon \mathcal{L}_0 = \epsilon \partial_\mu K^\mu_0$)为

$$K_0^\mu = \frac{a^2 c_1}{4} \left\{ i\gamma^\mu \left(\begin{array}{c} \xi^c F \\ \xi^+ F^+ \end{array} \right) + \gamma^\mu \gamma^\nu \left(\begin{array}{c} \xi^c \partial_\nu A \\ \xi \partial_\nu A^+ \end{array} \right) - \frac{1}{2} \partial^\mu \left(\begin{array}{c} \xi^c A \\ \xi A^+ \end{array} \right) + \left[\begin{array}{c} A \rightarrow B^+ \\ \xi \rightarrow \chi^c \end{array} \right] \right. \\ \left. + 2 \left[\begin{array}{c} A \rightarrow \sigma \\ \xi \rightarrow \eta \end{array} \right] \right\} \quad (6)''$$

由于直接算出了 $\delta_\epsilon R = \epsilon \partial_\mu \left[\frac{a^2 c_1}{8} \partial^\mu (\xi^c A + \xi A^+ + \chi^c B + \chi B^+ + 2\eta^c \sigma + 2\eta \sigma^+) \right]$, 以致对应于 $\mathcal{L}(x)$ 的 K^μ 将为

$$K^\mu = K_0^\mu + \frac{a^2 c_1}{8} \partial^\mu (\xi^c A + \xi A^+ + \chi^c B + \chi B^+ + 2\eta^c \sigma + 2\eta \sigma^+) \\ = \frac{a^2 c_1}{4} \{ i\gamma^\mu (\xi^c F + \xi F^+ + \chi^c G + \chi G^+ + 2\eta^c \sigma + 2\eta K^+) \\ + \gamma^\mu \gamma^\nu (\xi^c \partial_\nu A + \xi \partial_\nu A^+ + \chi^c \partial_\nu B + \chi \partial_\nu B^+ + 2\eta^c \partial_\nu \sigma + 2\eta \partial_\nu \sigma^+) \} \quad (7)$$

另一方面, 按定义(4), 对应于 $\mathcal{L}(x)$ 的 N^μ 是

$$N^\mu = \frac{a^2 c_1}{4} \{ -i\gamma^\mu (\xi^c F + \xi F^+ + \chi^c G + \chi G^+ + 2\eta^c K + 2\eta K^+) \\ + (\gamma^\nu \gamma^\mu + 2g^{\mu\nu}) (\xi^c \partial_\nu A + \xi \partial_\nu A^+ + \chi^c \partial_\nu B + \chi \partial_\nu B^+ + 2\eta^c \partial_\nu \sigma + 2\eta \partial_\nu \sigma^+) \} \quad (8)$$

于是

$$S^\mu = \frac{a^2 c_1}{2} \{ i\gamma^\mu (\xi^c F + \xi F^+ + \chi^c G + \chi G^+ + 2\eta^c K + 2\eta K^+) \\ - \gamma^\mu \gamma^\nu (\xi^c \partial_\nu A + \xi \partial_\nu A^+ + \chi^c \partial_\nu B + \chi \partial_\nu B^+) \\ Q = \frac{ia^2 c_1}{2} \int d^3x \{ \gamma^0 (\xi^c F^+ + \chi^c G + \xi^c F + \chi G^+ + 2\eta K^+ + 2\eta^c K) \\ + i\gamma^\nu \gamma^0 (\xi \partial_\nu A^+ + \chi^c \partial_\nu B + \xi^c \partial_\nu A + \chi \partial_\nu B^+ + 2\eta \partial_\nu \sigma^+ + 2\eta^c \partial_\nu \sigma) \}. \quad (9)$$

此结果与[13]给出的一致。

充分运用场算子的运动方程(B-1), 消去辅助场及由它们带来的口袋场与物质场的交叉项, 即利用(B-3)~(B-6)诸式, 可得到“在质壳”的Q为

$$Q = \frac{ia^2 c_1}{2} \int d^3x \left\{ \frac{\gamma^0}{2} (A^+ i \not{\partial} \xi + A i \not{\partial} \xi^c + B^+ i \not{\partial} \chi + B i \not{\partial} \chi^c + 2\sigma^+ i \not{\partial} \eta + 2\sigma i \not{\partial} \eta^c) \right. \\ - \frac{m}{2a} \gamma^0 (\chi A + \chi^c A^+ + \xi B + \xi^c B^+) - i\gamma^0 \gamma^K \partial_K (\chi^c B + \chi B^+ + \xi B + \xi^c B^+) + i(\overset{\leftrightarrow}{\chi^c} \partial_0 B \\ + \overset{\leftrightarrow}{\chi} \partial_0 B^+ + \overset{\leftrightarrow}{\xi} \partial_0 A^+ + \overset{\leftrightarrow}{\xi^c} \partial_0 A) \left. \right] + 2 \left[\frac{\gamma^0}{2} (\sigma^+ i \not{\partial} \eta + \sigma i \not{\partial} \eta^c) - \frac{M}{2a} \gamma^0 (\eta \sigma + \eta^c \sigma) \right. \\ \left. - i\gamma^0 \gamma^K \partial_K (\eta \sigma^+ + \eta^c \sigma) + i(\overset{\leftrightarrow}{\eta} \partial_0 \sigma^+ + \overset{\leftrightarrow}{\eta^c} \partial_0 \sigma) \right] \} \quad (10)$$

这是口袋场与物质场分开的, 而且每一项都是两个算子相乘, 这些特点非常有利于讨论超对称性表示问题。

三、有限维表示的条件

在求解本模型的束缚态时，我们是用按附录C所得产生算子来构造态向量空间的基的，

$$|t\rangle = a_{n_1}^+ \cdots \bar{a}_{n_1}^+ \cdots b_{s_1 m_1}^+ \cdots \bar{b}_{s_1 m_1}^+ \cdots c_{j_1}^+ \cdots d_{t_1 j_1}^+ \cdots |0\rangle \quad (11)$$

由此可以看出，如果能找到合适的正交函数系使得对应的产生、消灭算子以及裸真空态 $|0\rangle$ 同超对称性守恒荷 Q 之间有下列关系式成立：

$$[Q, a_n^+] = p^{(s)} b_{n,s}^+, \{Q, b_{n,s}^+\} = q^{(s)} a_n^+ \\ [Q, \bar{a}_n^+] = \bar{p}^{(s)} \bar{b}_{n,s}^+, \{Q, \bar{b}_{n,s}^+\} = \bar{q}^{(s)} \bar{a}_n^+, \quad (12)$$

$$[Q, c_j^+] = p'^{(s)} d_{s,j}^+, \{Q, d_{s,j}^+\} = q'^{(s)} c_j^+, \\ Q|0\rangle = 0, \quad (13)$$

那么，就有可能用(11)给出的态向量（产生算子数目有限的），构成超对称性的有限维表示，否则就不可能。（式(12)的物理意义是明白的：超荷 Q 使处于同一能级的费米子态与玻色子态相互转换。）

因为，任选一个产生算子数目有限、形状如式(11)的态向量（或其有限个的线性组合）作为代表态，对它连续地多次作用超荷算子 Q ，由关系式(11)、(12)很容易证明，这样做的结果所得到的态向量将是一组只有有限个独立态的封闭的集合（不论你再对这集合中的态继续作用多少次 Q 算子，都不会出现超出此集合的新态）。这个集合当然就是超对称性的一个有限维表示。

如果关系式不像(12)那样只在同一能级（ n 相同）态之间变换，而是可以由 n 态变至其它任意的 n' 态，那么 Q 作用于代表态之后将不会给出有限的封闭集合，因为正交完备函数系一般是由无限多个函数（“能级”可有无限多个）组成的。

另外，如果 Q 与能级为 n 的产生算子对易（或反对易）之后不但出现同一能级的费米子（或玻色子）态产生算子，而且出现同一能级的反粒子态消灭算子。这也会使含有反粒子产生算子的代表态所对应的表示的维数增大（比起按(12)所得到的表示），因为它将把原来属于粒子数少的代表态所对应的表示，（按(12)建立的）也“融合”进来了。所以，若想有最少维数的有限维表示，必须满足条件(12)、(13)。

当然，单是为了得到有限维表示，并不一定要求式(13)，只要

$$Q|0\rangle \propto |0\rangle \quad (14)$$

也就可以了。但就本模型而言，的确有可能做到有(13)，而(13)的含义是：裸真空态也就是物理真空，因为，由 $(B-3)'$ 有

$$H|0\rangle \propto Q^+ Q|0\rangle = 0. \quad (15)$$

这当然是很有意义的事。满足了(13)式，也就是选着了合适的正交函数系而求得物理真空。同时顺便也满足了(14)式，从而有助于构造出超对称性的有限维表示来。

下面我们详细研究一下条件(12)、(13)对展开场算子用的各正交完备函数系提出了什么要求，这些要求能否做到不互相矛盾。为了这个目的需要把展开式(c-1)、(c-2)'、(c-5)及(c-6)代入 Q 的表达式(10)，即把 Q 表达为各产生、消灭算子以及正交函数，

然后把 Q 代入(12)、(13), 看对这些函数提出了什么要求。

在这样做的过程中, 我们首先可以看到一点: Q 中有些项含有费米场对时间的导数, 这导致出现 $a_n^+, b_{s,n}$ 及 $a_n^+, \bar{b}_{s,n}$ 类型的项。为了满足(12), 只有在 $b_{s,n}^{(t)} \propto b_{s,n}^{(t')}$ (或 $\bar{b}_{s,n}^{(t)} \propto \bar{b}_{s,n}^{(t')}$) 时才可能。这就限定了费米场产生、消灭算子对时间 t 的依赖只能是

$$b_{s,n}(t) = b_{s,n}(0)e^{-i\varepsilon_n t}, \quad d_{s,j}(t) = d_{s,j}(0)e^{-i\varepsilon_j t}, \quad (16)$$

等等。以下简记 $b_{s,n} \equiv b_{s,n}(0), d_{s,j}(0) \equiv d_{s,j}$, 等等。而常数 $\varepsilon_n, \varepsilon_j$ 具有能量量纲, 其取值也可由条件(12)、(13)进一步确定(见(26)式)。可见, 有限维超对称性所表示的要求, 使费米子产生算子也如玻色子的一样, 对时间的依赖是乘一个 c 数含 t 相因子。在求解非超对称模型的束缚态时是不能肯定这一点的。这一结论使我们仿照玻色子波函数 $W_n(\vec{x}, t)$ 而定义费米子的含 t 四维旋量波函数

$$U_{s,n}(\vec{x}, t) \equiv u_{s,n}(\vec{x})e^{-i\varepsilon_n t}, \quad (17)$$

$$\xi_{s,j}(\vec{x}, t) \equiv \xi_{s,j}(\vec{x})e^{-i\varepsilon_j t}$$

在采用了符号(17)后, Q 的表达式变成:

$$\begin{aligned} Q = & \frac{ia^2 c_1}{2} \{ (U_{s,n}, W_{n'}^*) b_{s,n} a_n^+ + (U_{s,n}^c, \bar{W}_{n'}^*) b_{s,n}^+ a_n + (U_{s,n}, \bar{W}_{n'}) \\ & \times b_{s,n} \bar{a}_n + (U_{s,n}^c, W_{n'}^*) b_{s,n}^+ \bar{a}_n^+ + (U_{s,n}^c, \bar{W}_{n'}^*) \bar{b}_{s,n}^+ a_n^+ + (U_{s,n}, W_{n'}) \\ & \times \bar{b}_{s,n} a_n + (\bar{U}_{s,n}, \bar{W}_{n'}) \bar{b}_{s,n}^+ \bar{a}_n + (\bar{U}_{s,n}, \bar{W}_{n'}^*) \bar{b}_{s,n} \bar{a}_n^+ \\ & + 2(\xi_{j,s}, \sigma_j^*) d_{s,j} c_j^+ + 2(\xi_{j,s}, \sigma_j) d_{s,j} c_j \\ & + 2(\xi_{s,j}^c, \sigma_j^*) d_{s,j}^+ c_j^+ + 2(\xi_{s,j}^c, \sigma_j) d_{s,j}^+ c_j \} \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} (U_{s,n}^c, \bar{W}_{n'}^*) = & \int d^3x \left\{ \frac{\gamma^0}{2a} (\bar{W}_{L,n'}^* i a \not{\partial} U_{s,nL}^c - m \bar{W}_{R,n'}^* U_{s,nL}^c + W_{R,n'}^* i a \not{\partial} U_{s,nR}^c \right. \\ & - m W_{L,n'}^* U_{s,nR}^c) + i (U_{s,nL}^c \partial_0 W_{L,n'}^* + U_{s,nR}^c \partial_0 W_{R,n'}^*) - i \gamma^0 \gamma^k \partial_k (U_{s,nL}^c W_{L,n'}^* + \\ & \left. + U_{s,nR}^c W_{R,n'}^*) \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

其余类推 (但 $\sigma_{Lj} = \sigma_{Rj} = \sigma_j$)。

显然, 条件(13)限制了所选用的波函数系必须满足要求:

$$(U_{s,n}^c, W_{n'}^*) = 0, \quad (\xi_{s,j}^c, \sigma_j^*) = 0. \quad (\text{任何 } n, n', j, j') \quad (20)$$

然而, 由(17)、(c-4), 应该有

$$\begin{aligned} (U_{s,n}^c, W_{n'}^*) = & \left(\frac{\varepsilon_n}{2} - \omega_{n'} \right) \int (\bar{W}_{L,n'}^* U_{s,nL}^c + W_{R,n'}^* U_{s,nR}^c) d^3x \\ & - \frac{m}{2a} \gamma^0 \int (U_{s,nL}^c W_{R,n'}^* + U_{s,nR}^c W_{L,n'}^*) d^3x \\ & - i \gamma^0 \gamma^k \left[\frac{1}{2} \int (\bar{W}_{L,n'}^* \partial_k U_{s,nL}^c + W_{R,n'}^* \partial_k U_{s,nR}^c) d^3x \right. \\ & \left. + \int (U_{s,nL}^c \partial_k W_{L,n'}^* + U_{s,nR}^c \partial_k W_{R,n'}^*) d^3x \right] \end{aligned} \quad (19)$$

可见, 为了在 $n \rightleftharpoons n'$ 时(20)若成立, 必须有

$$\begin{aligned} \int \bar{W}_{Ln'}^* U_{s n L}^c d^3 x &= \int W_{Rn'}^* U_{s n R}^c d^3 x = 0, \\ \int \bar{W}_{Ln'}^* U_{s n R}^c d^3 x &= \int W_{Rn'}^* U_{s n L}^c d^3 x = 0, \\ \int \bar{W}_{Ln'}^* \partial_k U_{s n L}^c d^3 x &= \int W_{Rn'}^* \partial_k U_{s n R}^c d^3 x = 0, \\ \int U_{s n L}^c \partial_k \bar{W}_{Ln'}^* d^3 x &= \int U_{s n R}^c \partial_k \bar{W}_{Rn'}^* d^3 x = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

(一切 n, n')

若束缚态有静止质量, 可取它在其中静止的坐标系, 这时束缚态内组分粒子的波函数将不是平面波 ($n=1$ 时往往是球对称的)。条件 (21) 的后两组在这种情形下将要求 $U_{s n L}^c$ 空间部分在宇称上与 $W_{Ln'}^*$ 的相同, (对 $U_{s n R}^c$ 与 $W_{Rn'}^*$ 也如此要求)。由于条件 (21) 对任何 n, n' 都成立, 那只能是

$$“w_n(\vec{x}) \text{ 对任何 } n \text{ 都有同样的宇称}” \quad (22)$$

在 w_n 只在有限边界 $\mathcal{S}_0$ 以内不为零时, 还得要求。

$$“\mathcal{S}^0 \text{ 具有中心对称性}” \quad (22)'$$

这里已改记 $w_n \equiv w_{Ln}$, 而 $U_{s n L}^c$ 必须与 $w_n(\vec{x})$ 具有相同的宇称, 因为这一点可包含在后面的 (23) 式内, 所以不另外列出。

假如我们选定的 $\{w_n(\vec{x})\}$ 对于具有指定宇称的函数空间是完备的, 那么 (21) 第一式左半部分将要求 $U_{s n L}^c$ 的空间部分正比于 $w_n(\vec{x})$, 这就限制了 $U_{s n L}^c$ 取下列形式:

$$U_{s n L}^c(\vec{x}, t) = \phi_{s n}^c w_n(\vec{x}) e^{i \epsilon_n t} \quad (23)$$

其中 $\phi_{s n}^c$ 是个常数四維旋量。而由 (21) 第二式右边部分, 应该有

$$w_{Rn}(\vec{x}) = k_n w_n(\vec{x}), \quad (24)$$

k_n 是个模为 1 的常数。(21) 第二式的左边则可以因

$$U_{s n R}^c(\vec{x}, t) = k_n \phi_{s n R}^c w_n(\vec{x}) e^{i \epsilon_n t} \quad (23)'$$

而得到满足。

(23) 及 (23)' 的意义是: 束缚态内费米子的空间分布几率幅同其玻色伙伴的完全一样。这正与按超对称观点所做的直观猜测相符合。

对于口袋场, 若按平面波展开, 将有 $\partial_k \sigma_j = i p_k^{(j)} \sigma_j$ 以及关于 $\xi_{s j}$ 的类似结果。这使得 (21) 的后两组等式 (当然要改 W_n^* 为 σ_j^* , $U_{s n}^c$ 为 $\xi_{s j}$) 将自动地由 (23)、(23)' 而得到满足, 从而不需要对平面波的宇称加以限制。

关于束缚态静止质量为零的情形, 我们将在另外文章^[7]中叙述。这里只提两句, 在其以光速运动的方向上与平面波(口袋场)情形类似, 在垂直于这个方向的二維空间内仍需对 w_n 加上类似 (22)、(22)' 的限制才能满足 (20), 而且在 w_n 只分布于有限空间的情形还要求物质场质量 m 为零。

现在, 我们进一步看看 $n=n'$ 时的情形。

这时, 满足(22); (22)'、(23)、(23)' 以及(24)的波函数将使

$$\int U_{s n L}^c w_n^* d^3 x = \frac{e^{i(\varepsilon_n + \omega_n)t}}{\sqrt{2\omega_n}} \phi_{s n L}^c, \quad \int U_{s n L}^c \partial_k w_n d^3 x = 0,$$

其余积分也有类似结果。将这些积分值代入(20)式消去共同因子 $e^{i(\varepsilon_n + \omega_n)t} / \sqrt{2\omega_n}$, 得到关于 $\phi_{s n}^c$ 的方程

$$\left[-(-\varepsilon_n + 2\omega_n) - \frac{k_n}{a} m \gamma^0 \right] \phi_{s n}^c = 0. \quad (25)$$

这个方程只有在

$$\varepsilon_n = 2\omega_n - \frac{k_n}{a} m, \quad (26)$$

$$\phi_{s n L}^c = -\phi_{s n R}^c, \quad (27)$$

时才有解。这时可以作到

$$“\phi_{s n}^c \text{ 与 } n \text{ 无关。}” \quad (28)$$

这就限定了 ε_n 及 $\phi_{s n}^c$ 的取值及形式。

对于口袋场, 当按平面波展开时, 代替(25)的将是

$$\left[-(-\varepsilon_j + 2\omega_j) \gamma^0 + p_k^{(j)} \gamma^k - \frac{m}{a} \right] \xi_{s j}^c = 0 \quad (25)'$$

$p_k^{(j)}$ 是模为 j 的平面波波向量的 k 分量。此式将限定 $\xi_{s j}^c (= \xi_{s j}^c)$ 以及 ε_j 。

总结以上讨论, 我们得到结论: 只要是按照互不矛盾的要求 (22)、(22)'、(23)、(24)、(24)'、(26)、以及(27)选择的正交波函数系, 就可以使要求(20)得以满足, 从而在本段开头提出的条件(13)得到满足。

不过, 为了得到超对称性的有限维表示, 还需要看一看条件(12)怎样才可以被满足。

由 Q 的表示式(18)可以发现, (20)也是为条件(12)的成立所必需的, 只是还不够, 还需要对于任何 n 、 n' 都有

$$(U_{s n}, W_{n'}) = 0. \quad (29)$$

为了达到这一目的, 只需要对正交波函数系再加上一条限制

$$w_n^*(\vec{x}) = w_n(\vec{x}). \quad (30)$$

而(29)在 $n=n'$ 时给出的限定常数旋量 $\phi_{s n}$ 的方程为

$$\left[(-\varepsilon_n + 2\omega_n) - \frac{k_n}{a} m \gamma^0 \right] \phi_{s n} = 0,$$

这与(25)是同一的, 只不过 $\phi_{s n}^c$ 是负能解、 $\phi_{s n}$ 是正能解而已。这与 $\phi_{s n}^c$ 应是 $\phi_{s n}$ 的电荷共轭这一点刚好容洽。就是说, (29)对 $\phi_{s n}$ 并不增加新要求(除了已有的(25)之外)。于是关于 $\phi_{s n}$ 我们可以说: $\phi_{s n} = \phi_s$ (与 n 无关), 并且 $\phi_{s L} = \phi_{s R}$ 。因为这两点不过是(28)、(27)的电荷共轭而已。对于口袋场, 若按平面波展开, 由于 $\sigma_j \sim \sigma^{i p(j) \cdot \vec{x}}$, 将有 $\sigma_j^* \sim e^{-i p(j) \cdot \vec{x}} = e^{i(-p(j) \cdot \vec{x})}$ 。然而 $-p(j)$ 也是展开的模之一。所以, $(\xi_{s j}^c, \sigma_j^{*'}) = 0$ 成立后, 经过 $p(j) \rightarrow -p(j)$ 的变换自然导致 $(\xi_{s j}, \sigma_{j'}) = 0$ 的成立。可见对于口袋场无

需另外对 σ_j 再增加任何要求就能满足(12)。

对于物质场, 只就 $n=1$ (基态) 产生算子构成的态空间的有限维表示而言, 在束缚态有静止质量时, $w_1(x)$ 通常解出来就是实的, 动力学地自动满足 (30) 式。可见, 对 w_1 也无需加上(30)的要求。只是当要求对一切 n 都有 (12) 成立时, 才需要(30)的成立 (对一切能级)。反之, 若 w_n 满足的方程的解除了 $n=1$ 以外并不满足 (30) 的要求, 那就表示(12)只对 $n=1$ 才成立, 从而只有在 $n=1$ 产生算子构造出的态空间上才可以比较简单地得到有限维表示 (指运用(12)、(13)造超多重态)。

应强调一点, 对于本模型而言, 满足准则 [(22)、(22)'、(23)、(24)、(24)'、(26)、(27) 以及 (30)] 的正交波函数系 $\{w_n\}$ 是否能够作为解而存在是个动力学问题, 只有在求解之后才会知道答案。对于本模型的这个问题的答案是肯定的, 详见 [7]、[8]。

四、“在质壳”的超对称性有限维表示

就 $\mathcal{L}(x)$ 为(2)的超对称场论口袋模型而言, 只有一种物质场, 在口袋场质量 M 甚大时, 如限于近似求解低能束缚态, 可以只考虑由物质场产生算子 (且都属 $n=1$ 基态) 构成的态向量。最简单的是以

$$\underbrace{a^+ \dots a^+}_N |0\rangle = (a^+)^N, (N > 1), \quad (31)$$

为代表态的超多重态。

为了便于讨论, 我们用 $\bar{\epsilon}Q$ 作用在态(31)上。这时由于 $\bar{\epsilon}$ 是反对易数, (12)式将变为

$$[\bar{\epsilon}Q, a^+] = \bar{\epsilon} p^{(s)} b_s^+, [\bar{\epsilon}Q, b_s^+] = \bar{\epsilon} q^{(s)} a^+, \quad (32)$$

这里, $a^+ \equiv a_1^+$, $b_s^+ \equiv b_{s+1}^+$ ($n=1$), 而 $p^{(s)} \equiv (U_{s,n}^c, W_n)$, $q^{(s)} \equiv (U_{s,n}, W_n^*)$ (来自 (18))。对于反粒子算子 $\bar{a}^+$ 、 $\bar{b}_s^+$ 有完全相同的式子。

重复运用(32)以及考虑到(13), 可以得到

$$\begin{aligned} (\bar{\epsilon}Q)(a^+)^N |0\rangle &= N \bar{\epsilon} p^{(s)} b_s^+ (a^+)^{N-1} |0\rangle, \\ (\bar{\epsilon}Q)^2 (a^+)^N |0\rangle &= N \bar{\epsilon} p^{(s)} \bar{\epsilon} q^{(s)} (a^+)^N |0\rangle \\ &\quad + N(N-1) \bar{\epsilon} p^{(s)} \bar{\epsilon} p^{(s')} b_s^+ b_{s'}^+ (a^+)^{N-2} |0\rangle, \\ (\bar{\epsilon}Q)^3 (a^+)^N |0\rangle &= N(3N-2) \bar{\epsilon} p^{(s')} \bar{\epsilon} q^{(s')} \bar{\epsilon} p^{(s)} b_s^+ (a^+)^{N-1} |0\rangle \\ &= [(3N-2) \bar{\epsilon} p^{(s')} \bar{\epsilon} q^{(s')}] (\bar{\epsilon}Q)(a^+)^N |0\rangle. \end{aligned}$$

可见, 对(31)代表态连续作用 Q 将得到一个封闭集合, 其成员数目有限, 是三个:

$$(a^+)^N |0\rangle, b_{\frac{1}{2}}^+ b_{-\frac{1}{2}}^+ (a^+)^{N-2} |0\rangle, \quad (33)$$

$$\bar{\epsilon} p^{(\frac{1}{2})} b_{\frac{1}{2}}^+ (a^+)^{N-1} |0\rangle + \bar{\epsilon} p^{(-\frac{1}{2})} b_{-\frac{1}{2}}^+ (a^+)^{N-1} |0\rangle.$$

这比“离质壳” $j=0$ 代表态不可约表示^[1] 的维数 4 [因为 $4(2 \times 0 + 1) = 4$] 少了个 1。这原因在于: 动力学地看代表态(31)并不是一个简单的“整体”, 它由若干个同种类产生算

子组成;当 Q 对之作用次数增加时会出现含有多个同类费米算子相乘的态,由费米算子服从反对易量子规则,最多到出现 $b_{\frac{1}{2}}^+ b_{-\frac{1}{2}}^+$ 为止,不会有三个以上同类费米算子相乘的情况出现。本来 $(\bar{\epsilon}Q)^3 (a^+)^N |0\rangle$ 并不是只正比于 $(\bar{\epsilon}Q)(a^+)^N |0\rangle$,而是还要叠加上一个含有 $b_{\frac{1}{2}}^+ b_{-\frac{1}{2}}^+ b_{\frac{1}{2}}^+$ ($s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$)的态的,但由 b_s^+ 反对易性,这项为零,从而卡掉了一个新独立态。

除了(31),还可以考虑另一代表态

$$b_s^+ (a^+)^{N-1} |0\rangle, \quad \left(s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad (34)$$

对之重复作用 $\bar{\epsilon}Q$ 可得至一个维数为4的表示:

$$b_s^+ (a^+)^{N-1} |0\rangle, \quad \bar{\epsilon} q^{(s)} (a^+)^N |0\rangle + (N-1) \bar{\epsilon} p^{(s)} b_s^+ b_s^+ (a^+)^{N-2} |0\rangle, \quad \left(s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad (35)$$

而 $j = \frac{1}{2}$ 代表态对应的离质壳超对称性不可约表示的维数是8, $\left[\text{因 } 4\left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1\right) = 8\right]$ 。这里,也是因为 b_s^+ 的反对易性使含 $b_{\frac{1}{2}}^+ b_{\frac{1}{2}}^+, b_{\frac{1}{2}}^+ b_{-\frac{1}{2}}^+$ 的两个向量态及两个旋量态不复存在而只遗留下4个独立态的。

由于系统的哈密顿算子 H 是转动不变的,(35)中 $b_s^+ (a^+)^{N-1} |0\rangle$ 因 $s = \frac{1}{2}$ 及 $-\frac{1}{2}$ 的两个态能量应相同(如果它们是 H 的本征解的话)。因而由它们乘以 $N \bar{\epsilon} p^{(s)}$ 再对 s 求和而组成的线性组合 $(\bar{\epsilon}Q)^2 (a^+)^N |0\rangle$ (见(33)),也将是 H 的同一本征值的本征态。这提示我们:动力学地看两个表示(33)及(35)将都是 H 的同一本征值的本征态集合。就是说,从动力学的角度来看,应该是(33)与(35)合在一起成为超对称性的表示。合在一起之后不难看出独立的正交态只有4个:

$$\begin{aligned} & (a^+)^N |0\rangle, \quad b_{\frac{1}{2}}^+ b_{\frac{1}{2}}^+ (a^+)^{N-2} |0\rangle, \\ & b_{\frac{1}{2}}^+ (a^+)^{N-1} |0\rangle, \quad b_{-\frac{1}{2}}^+ (a^+)^{N-1} |0\rangle, \end{aligned} \quad (36)$$

其中头两个是标量(复合)粒子,后两个是一个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米(复合)粒子的两个不同自旋取向态。超对称性的这种动力学的表示,我们称之为“在质壳”的表示。上面的讨论给出了“在质壳”超对称性有限维表示的例子,其维数为4。由这个例子看,它相当于由不止一个离质壳不可约表示合成的可约表示,但态的数目由于费米算子反对易性而少于按 $4(2j+1)$ 计算出的数目。

按照与上述同样的处理,还可以从各种不同的代表态,(包括含有口袋场产生算子的)出发造出各种各样的在质壳超多重态来。虽然最终谁真是 H 的本征态还需正式求解动力学问题才能确定,但知道了各可能的在质壳超多重态后,就限定了求解的范围,使动力学问题的求解前进一大步。

与代表态(31)很类似的还有代表态

$$(a^+)^{N'} (\bar{a}^+)^{\bar{N}'} |0\rangle, (N' > 1, \bar{N}' > 1) \quad (37)$$

特别当 $N' - \bar{N}' = N$ 时, 此态的 G 量子数与 (31) 的相同。可是, 这个态所代表的“在质壳”超多重态是 16 维的 (a^+ 部分及 $\bar{a}^+$ 部分各允许独立取 4 个态)。因算子数目、结构不同 (即使 G 相同), 这个超多重态与前述的 (36) 正交。而且 H 夹在它们之间的矩阵元都是零, 维数又不同。这是两个在动力学上有区别的表示, 它们的能量会不同, 甚至随 $\mathcal{L}(x)$ 中参数的选取会动力学地使其中一个不是解。

从粒子物理角度来看, 表示 (36) 是令人感兴趣的。因为表示的维数与 N 取值无关 (只要 $N > 1$)。 N 不同对应于束缚态的 G 量子数不同。每个表示 (不同 G) 中都只有一个自旋 $\frac{1}{2}$ 的费米 (复合) 粒子, 我们可以考虑把它对应于不同“代”的“上”或“下”轻子。所以从对于低能在质壳表示的特点可以看出, 超对称口袋模型有潜力较自然地提供描写多代轻子的框架。至于所选的模型参数是否真的允许有属于这种表示的极低能态作为解存在以及 N 的取值是否有限 (“代”的数目是否有限), 需经把 (36) 表示态作为试探态向量去求解动力学问题才能断定。我们在 [8] 中讨论这一点。为了理论现实些, 需要超对称性发生破坏以保证 (36) 中标量复合粒子能量很高甚至不是解。我们在 [7] 中讨论这一点。

不过, 我们不应忘记 (36) 作为在质壳表示, 只有当口袋场与物质场的耦合较弱时才正确。因为, H 在 (4-1) 态与含 c_j^+, d_j^+ 的 $(a^+)^N c_j^+ |0\rangle$ 等态之间的矩阵元并不为零。如果耦合很强, 则以 $(a^+)^N c_j^+ |0\rangle$ 为代表态的表示也与 (36) 在 H 的本征解中地位相近, 从而只有 (36) 与有关的含 c_j^+, d_j^+ 的超多重态融合而成的维数增大许多的超多重态才是在质壳超多重态。在这超多重态中独立的费米 (复合) 粒子态数目增多, 用来描写现实的轻子将是困难的。

我们在结束本段之前还想提到一点。

可以把本模型推广到有两种物质场。这使物质场的基态产生算子将有两套: (a^+, b_s^+) 及 ($a', b_s'^+$)。如以

$$a^+ (a'^+)^N |0\rangle \quad (38)$$

为代表态, 仿前述步骤, 可以构造一个“在质壳”超多重态, 它含有的独立态是

$$\begin{aligned} & a^+ (a'^+)^N |0\rangle, \quad a^+ (b_s'^+ b_s'^+) (a'^+)^{N-1} |0\rangle, \quad b_s^+ b_s'^+ (a'^+)^{N-1} |0\rangle, \\ & b_s^+ (a'^+)^N |0\rangle, \quad a^+ b_s'^+ (a'^+)^{N-1} |0\rangle, \quad b_s^+ (b_s'^+ b_s'^+) (a'^+)^{N-2} |0\rangle. \end{aligned} \quad (39)$$

这是个 12 维表示, 其中含有的费米 (复合) 粒子只是 3 个能量简并的自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子。显然, 我们可以考虑这 3 个费米子对应三种不同颜色的同种夸克, 而取不同 N 对应属于不同“代”的三色夸克。再选 $a'^+ (a^+)^N |0\rangle$ 为代表态可构造出另一套结构上完全相似的表示。我们可以考虑用这两套表示来描写上、下两套夸克。有了两种物质场, 就可以有两个以形如 (31) 的代表态的表示 (结构与 (36) 相同), 这可以用来描写上、下两套轻

子。由此可见,有两种物质场的超对称性场论口袋模型,在弱耦合情况下有可能比较自然地给出统一描写轻子、夸克的框架,它可以自动给出“颜色”自由度及“代”自由度。关于用超对称复合模型描写轻子、夸克等的可能性,我们以前曾不止一次提出过^{[10], [11]}。

五、结 束 语

通过对一个具体的超对称模型的分析,关于“在质壳”的超多重态,我们知道了以下几点:

1. 在用场的产生算子作用在裸真空态上构造的态向量空间上讨论超对称性的有限维表示是方便的,容易把得到的结论直接用于求解超对称模型的束缚态,特别是低能束缚态。在超对称守恒荷 Q 可表示为物质场、口袋场分开的两算子相乘项的形式(本文讨论的模型就是这样的)时,这样处理最为优越。这时,有限维表示的条件将简化为(12)及(13)。

2. 条件(12)对于口袋场的波函数及物质场的基态($n=1$)波函数来说是从属于条件(13)的。而条件(13)比需要的强了些;不但可有助于给出有限维表示,同时还使裸真空态成为 H 的零本征值本征态(物理真空)。

3. 为了满足有限维表示条件,展开场算子用的正交波函数不能完全随意选取,而是要遵从一组互不矛盾的准则[即(22)、(22)'、(23)、(23)'、(24)、(26)、(27)及(30)],这组准则的要点是:模型中各费米场的展开波函数的空间部分正比于其标量伙伴场的展开波函数(取复数共轭),分出来的那个常数旋量是与展开波函数的能级无关的并满足确定的自由粒子 Dirac 方程。这一点不但会使求解超对称模型束缚态的工作大为简化,而且有与超对称性直观猜测相一致的物理意义。粒子在束缚态内的费米子态与玻色子态的空间分布情况是相同的)。

4. “在质壳”的超对称多重态与“离质壳”超多重态在求法上虽然一样(用超荷 Q 作用于某个代表态上),但前者由于 Q 已表为场算子,其中费米算子又要遵从反对易规则,使得其不可约表示的维数常小于后者的 $4(2j+1)$,而且如果两个不可约表示所含独立态之间有关联,具体说,就是如果哈密顿算子 H 夹在它们之间的矩阵元不为0,那么从动力学来看这两个不可约表示将融合成为一个在动力学上可能的超多重态。其维数则由融合后有几个独立正交态来决定。

附 录 A

本文第一段中出现的 ϵ_a 是超坐标 θ_a 的增量, ϵ 、 θ 都是反对易 Majorana 旋量($\alpha=1, 2, 3, 4$),而由于

$$\theta_a \rightarrow \theta_a + \epsilon_a \quad (A-1)$$

所引起的普通时空坐标 x^μ 的变化^[1]是

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + i\alpha \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta, \quad (A-2)$$

α 是个可任意选定的归一常数。

以超空间坐标 (x^μ, θ_a) 为宗量的超场^[1-4] $\Phi(x, \theta)$,在按 θ 的幂次项展开后,可

给出关于它的分量场的表示式。这时每一展开项都允许差一个任意的归一常数。但是，不难看出，除了(A-2)中的 a 之外，只需再选一个独立的归一常数 c_1 ，就足以确定

$$\begin{aligned}\Phi(x, \theta) = & A(x) + c_1 \bar{\theta} \psi(x) + \frac{a}{2} \bar{\theta} \theta F(x) + \frac{a}{2} \bar{\theta} i \gamma_5 \theta G(x) \\ & + \frac{a}{2} \bar{\theta} i \gamma_\nu i \gamma_5 \theta A^\nu(x) + \frac{a c_1}{2} \bar{\theta} \theta \bar{\chi}(x) + \frac{a^2}{8} (\bar{\theta} \theta)^2 D(x),\end{aligned}\quad (A-3)$$

同时使因(A-1)引起的各分量场的超变换规则^[1]取下列在系数结构上为最简单的形式：

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon A &= c_1 \bar{\epsilon} \psi, \\ \delta_\epsilon \psi &= \frac{a}{c_1} (F + i \gamma_5 G + i \gamma_\mu i \gamma_5 A^\mu - i \not{\epsilon} A) \epsilon, \\ \delta_\epsilon F &= \frac{c_1}{2} \bar{\epsilon} (\chi - i \not{\epsilon} \psi), \\ \delta_\epsilon G &= \frac{c_1}{2} \bar{\epsilon} (i \gamma_5 \chi - i \gamma_5 i \not{\epsilon} \psi), \\ \delta_\epsilon A^\mu &= \frac{c_1}{2} \bar{\epsilon} (i \gamma_\mu i \gamma_5 \chi + i \gamma_\nu i \gamma_\mu i \gamma_5 \partial^\nu \psi), \\ \delta_\epsilon \chi &= \frac{a}{c_1} (D - i \not{\epsilon} F + i \gamma_\nu i \gamma_5 \partial^\nu \psi), \\ \delta_\epsilon D &= c_1 \bar{\epsilon} (-i \not{\epsilon} \chi).\end{aligned}\quad (A-4)$$

如果 $\Phi(x, \theta)$ 是左手手征场^[1]，则 $\chi = -i \not{\epsilon} \psi$ 、 $D = -\partial^2 A$ 、 $G = iF$ 、 $A^\mu = i\partial^\mu A$ ，这使得独立的场分量只有三个(A, ψ, F)，并且超变换规则也简化为

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon A &= c_1 \bar{\epsilon} \psi \\ \delta_\epsilon \psi &= \frac{2a}{c_1} \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) (F - i \not{\epsilon} A) \epsilon, \\ \delta_\epsilon F &= -c_1 i \bar{\epsilon} \not{\epsilon} \psi.\end{aligned}\quad (A-4)'$$

在文献中常数 a, c_1 大都是取了具体的数值，比如Salam取 $a = \frac{1}{2}$ ， $c_1 = 1$ ^[1]，Wess

取 $a = 1$ ， $c_1 = \sqrt{2}$ ^[4]。我们在这里给出了对 a, c_1 的一般依赖关系，这不是为了方便而是由于我们从其它文章^{[7]、[8]}可以知道 a, c_1 具有重要的动力学的意义。

由超变换规则(A-4)、(A-4)'可以看到，一般超场的 D 分量和手征超场的 F 分量在超变换下的改变是一个四维向量的散度，而且这个向量也已完全确定（各与该超场的 χ 分量或 ψ 分量有关）。这一结论不只对单个的超场成立而且对于由若干个超场相乘得到的关于 (x, θ) 的任意函数也是对的，因为关于 (x, θ) 的任意函数都可以写成(A-3)的形式。特殊地讲，一个超对称理论的拉氏函数密度 $\mathcal{L}(x)$ 如果是由某个一般超坐标函数^(一般) $\mathcal{L}(x, \theta)$ 的 D 分量及手征超坐标函数^(手征) $\mathcal{L}(x, \theta)$ 的 F 分量两部分构成的（这正是通常构造超不变拉氏函数密度的办法）：

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}^{(一般)}(x, \theta)|_D + \mathcal{L}^{(手征)}(x, \theta)|_F.\quad (A-5)$$

那么, 由 (A-4)、(A-4)' 可以看出: 在超变换下 $\mathcal{L}(x)$ 的变化乃是四維散度

$$\delta_s \mathcal{L}(x) = \overline{\epsilon} \partial_\mu K^\mu,$$

而

$$K^\mu = -ic_1 \gamma^\mu [\mathcal{L}_{(x,\theta)}^{(\text{一般})} |_x + \mathcal{L}_{(x,\theta)}^{(\text{手征})} |_\psi]. \quad (A-6)$$

这给出了求 K^μ 的简单而有效的办法。

在 $\mathcal{L}(x, \theta)$ 由有限个超場相乘而得到的情形下, 为了求 $\mathcal{L}(x, \theta)$ 的有关分量, 只需重复运用两个超場的乘积公式^[1]即可:

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(x, \theta) \Phi^{(2)}(x, \theta) &= A^{(12)}(x) + c_1 \bar{\theta} \psi^{(12)}(x) + \frac{a}{2} \bar{\theta} \theta F^{(12)}(x) \\ &+ \frac{a}{2} \bar{\theta} i \gamma_5 \theta G^{(12)}(x) + \frac{a}{2} \bar{\theta} i \gamma_\nu i \gamma_5 \theta A^{(12)\nu}(x) \\ &+ \frac{c_1 a}{2} \bar{\theta} \theta \bar{\chi}^{(12)}(x) + \frac{a^2}{8} \bar{\theta} \theta D^{(12)}(x), \end{aligned} \quad (A-7)$$

其中

$$\begin{aligned} A^{(12)}(x) &\equiv A^{(1)}(x) A^{(2)}(x), \\ \psi^{(12)}(x) &\equiv \psi^{(1)}(x) A^{(2)}(x) + \psi^{(2)}(x) A^{(1)}(x), \\ F^{(12)}(x) &\equiv F^{(1)}(x) A^{(2)}(x) + A^{(1)}(x) F^{(2)}(x) - \frac{c_1^2}{2a} \psi^{(1)c}(x) \psi^{(2)}(x), \\ G^{(12)}(x) &\equiv G^{(1)}(x) A^{(2)}(x) + A^{(1)}(x) G^{(2)}(x) + \frac{c_1^2}{2a} \psi^{(1)c}(x) i \gamma_5 \psi^{(2)}(x), \\ A^{(12)\mu}(x) &\equiv A^{(1)\mu}(x) A^{(2)}(x) + A^{(2)\mu}(x) A^{(1)}(x) + \frac{c_1^2}{2a} \psi^{(1)c}(x) i \gamma^\mu i \gamma_5 \psi^{(2)}(x), \\ \chi^{(12)}(x) &\equiv \chi^{(1)}(x) A^{(2)}(x) + \chi^{(2)}(x) A^{(1)}(x) + \frac{c_1^2}{2a} \psi^{(1)}(x) F^{(2)}(x) \\ &+ \frac{c_1^2}{2a} \psi^{(2)}(x) F^{(1)}(x) \\ &- i \gamma_5 \psi^{(1)}(x) G^{(2)}(x) - i \gamma_5 G^{(1)}(x) \psi^{(2)}(x) - i \gamma_\nu i \gamma_5 \psi^{(1)}(x) A^{(2)\nu}(x) \\ &- i \gamma_\nu i \gamma_5 \psi^{(2)}(x) A^{(1)\nu}(x), \\ D^{(12)}(x) &\equiv A^{(1)}(x) D^{(2)}(x) + A^{(2)}(x) D^{(1)}(x) + 2 F^{(1)} F^{(2)} + 2 G^{(1)} G^{(2)} \\ &+ 2 A_\mu^{(1)}(x) A^{(2)\mu}(x) - \frac{c_1^2}{a} \psi^{(1)c}(x) \chi^{(2)}(x) - \frac{c_1^2}{a} \chi^{(1)c}(x) \psi^{(2)}(x). \end{aligned}$$

我们采用的符号及时空度规定如下:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z), \quad g^{\mu\nu} = \text{对角}(1, -1, -1, -1),$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu, \quad \partial^2 \equiv g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu,$$

$$\not{D} = \not{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \not{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \not{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \not{D} = \gamma^k \partial_k.$$

在Weyl表示下, $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} \sigma^\mu \\ \sigma^\mu \end{pmatrix}$, $\sigma^\mu = (1, \sigma^k)$, $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^k)$, σ^k 是泡利矩阵。
($k=1, 2, 3$).

附录 B

由正文中 (2) 式给出的 $\mathcal{L}(x)$, 按变分原理, 可得到場算子的运动方程:

$$\begin{aligned} & -a^2 \partial^2 A + a(m + f\sigma^+) G^+ + af K^+ B^+ - \frac{c_1^2}{2} f \eta \chi^c = 0, \\ & -a^2 \partial^2 B + a(m + f\sigma^+) F^+ + af K^+ A^+ - \frac{c_1^2}{2} f \eta \xi^c = 0, \\ & -a^2 \partial^2 \sigma + aM K^+ + \frac{a}{2} f(G^+ A^+ + F^+ B^+) - \frac{c_1^2}{4} f \bar{\xi} \chi^c = 0, \\ & ia \not{D} \xi - (m + f\sigma^+) \chi^c - f \eta^c B^+ = 0, \\ & ia \not{D} \chi^c - (m + f\sigma) \xi - f \eta A = 0, \\ & ia \not{D} \eta - M \eta^c - \frac{f}{2} (\xi^c B^+ + \chi^c A^+) = 0 \\ & K = -\frac{1}{a} \left(M \sigma^+ + \frac{f}{2} A^+ B^+ \right), \\ & F = -\frac{1}{a} (m + f\sigma^+) B^+, \\ & G = -\frac{1}{a} (m + f\sigma^+) A^+. \end{aligned} \tag{B-1}$$

与此 $\mathcal{L}(x)$ 相应的哈密顿函数密度将是

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) = & \frac{a^2}{2} [\partial_0 A^+ \partial^0 A + \partial_0 B^+ \partial^0 B + 2\partial_0 \sigma^+ \partial^0 \sigma \\ & + \not{D} A^+ \cdot \not{D} A + \not{D} B^+ \cdot \not{D} B + 2\not{D} \sigma^+ \cdot \not{D} \sigma] \\ & + \frac{a^2}{2} (F^+ F + G^+ G + 2K^+ K) + \frac{a^2 c_1}{8} [(i \bar{\xi} \overleftrightarrow{\not{D}} \xi - i \bar{\xi} \not{D} \xi) \\ & + (i \bar{\chi}^c \overleftrightarrow{\not{D}} \chi^c - i \bar{\chi}^c \not{D} \chi^c) + 2(i \bar{\eta} \overleftrightarrow{\not{D}} \eta - i \bar{\eta} \not{D} \eta)] \\ & + \frac{c_1^2}{4} [(m + f\sigma^+) \xi \chi^c + (m + f\sigma) \bar{\xi}^c \xi + f \eta^c (\xi B + \chi A) \\ & + f \eta (\xi^c B^+ + \chi^c A^+) + M(\eta \eta^c + \bar{\eta} \bar{\eta})] \end{aligned} \tag{B-2}$$

当充分运用运动方程(B-1)之后可以消去大部分口袋場与物质場耦合项而得到

$$\begin{aligned}
H = \int d^3x \mathcal{H}(x) = \int d^3x \left\{ \frac{a^2}{2} (\partial_0 A^+ \partial_0 A + \not{D} A^+ \cdot \not{D} A + \partial_0 B^+ \partial_0 B + \not{D} B^+ \cdot \not{D} B \right. \\
+ 2\partial_0 \sigma^+ \partial_0 \sigma + 2\not{D} \sigma^+ \cdot \not{D} \sigma) + \frac{1}{2} (m + f\sigma^+) (m + f\sigma) (A^+ A + B^+ B) \\
+ \left(M\sigma^+ + \frac{f}{2} A^+ B^+ \right) \left(M\sigma + \frac{f}{2} AB \right) + \frac{a^2 c_1}{8} (i\xi^+ \partial_0 \xi + i\xi^{c+} \partial_0 \xi^c + i\chi^{c+} \partial_0 \chi^c \\
\left. + i\chi^+ \partial_0 \chi + 2i\eta^+ \partial_0 \eta + 2i\eta^{c+} \partial_0 \eta^c) \right\} + \text{重整化抵消项}. \quad (B-3)
\end{aligned}$$

通过直接演算, 可以证实(B-3)给出的 H 与正文中(9)给的 Q 之间有超代数要求的^[1-4]

$$H \propto Q_+^* Q_-. \quad (B-3)'$$

为了得到(B-3)', 要注意到: 由于 H 与 t 无关, Q^+, Q 可取相同的 t , 这使得可以直接应用两个场算子的等时量子规则。还有一点, 本模型是可重整的, $\mathcal{L}(x)$ 中含有重整抵消项只不过是相当于对场算子进行重整^[2]。所以, 考虑了重整化抵消项后, 对本文的整个结论并无影响。

下面几个关系式对于化简有关的算子表示式是有用的。利用关于 F 及 χ^c 的运动方程可得到

$$\xi F^+ + i\gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 \chi^c \partial_\nu B = \frac{f}{a} \eta AB - i\gamma^k \partial_k (\chi^c B) + i\gamma^0 \overset{\leftrightarrow}{\chi^c} \partial_0 B \quad (B-4)$$

类似地还会有

$$\xi^c F' + i\gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 \chi \partial_\nu B^+ = \frac{f}{a} \eta^c A^+ B^+ - i\gamma^k \partial_k (\chi B^+) + i\gamma^0 \overset{\leftrightarrow}{\chi} \partial_0 B^+$$

$$\chi G^+ + i\gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 \xi^c \partial_\nu A = \frac{f}{a} \eta AB - i\gamma^k \partial_k (\xi^c A) + i\gamma^0 \overset{\leftrightarrow}{\xi^c} \partial_0 A,$$

$$\chi^c G + i\gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 \xi \partial_\nu A^+ = \frac{f}{a} \eta^c A^+ B^+ - i\gamma^k \partial_k (\xi A^+) + i\gamma^0 \overset{\leftrightarrow}{\xi} \partial_0 A^+$$

由 K 的运动方程, 有

$$2(\eta^c K + \eta K^+) = -\frac{1}{a} [2M(\sigma^+ \eta^c + \sigma \eta) + f(\eta^c A^+ B^+ + \eta AB)] \quad (B-5)$$

可是, 把 ξ 、 ξ^c 、 χ 及 χ^c 的运动方程加起来后除以2, 可得

$$\frac{f}{a} (\eta^c A^+ B^+ + \eta AB) = \frac{1}{2} [(A^+ i \not{D} \xi + A i \not{D} \xi^c + B^+ i \not{D} \chi + B i \not{D} \chi^c)$$

$$- m(A^+ \chi^c + B^+ \xi^c + A \chi + B \xi)] - \frac{1}{2a} [f\sigma^+ (\chi^c A^+ + B^+ \xi^c) + f\sigma (\chi A + \xi B)]$$

再对之用一次 η 、 η^c 的运动方程以消去末项(交叉项)可得

$$\begin{aligned} \frac{f}{a}(\eta^c A^+ B^+ + \eta AB) = \frac{1}{2}[(A^+ i \not{\partial} \xi + A i \not{\partial} \xi^c) + (A \rightarrow B) + 2(A \rightarrow \sigma)] - \frac{m}{2a}(A^+ \chi^c \\ + A\chi + B^+ \xi^c + B\xi) + \frac{M}{a}(\eta^c \sigma^+ + \eta\sigma) \end{aligned} \quad (B-6)$$

附录 C

在求解本模型的束缚态时, 我们仿照[6]的办法, 把场算子按正交波函数系展开, 用所得到的产生算子及裸真空态 $|0\rangle$ 来构造变分法求解所需要的试探态向量。

对于物质场, 我们把两个手征费米算子 $\xi(x)$ 、 χ^c_x 合并成一个通常的 Dirac 旋量 $\psi(x)$ 再进行展开,

$$\psi(x) = \xi(x) + \chi^c_x = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [u_{s,n}(\vec{x}) b_{s,n}(t) + u^c_{s,n}(\vec{x}) \bar{b}^+_{s,n}(t)] \quad (C-1)$$

其中 $\{u_{s,n}(\vec{x})\}$ 是正交完备波函数系 (c 数四维 Dirac 旋量), $b^+_{s,n}(t)$ 和 $\bar{b}^+_{s,n}(t)$ 分别是自旋分量为 s 、能级为 n 的正粒子态消灭算子和对应的反粒子态产生算子 (我们用产生、消灭算子上面加一横表示对应的反粒子态)。从超对称性的角度来看, 物质场的玻色算子 $A(x)$ 、 $B^+(x)$ 也应合起来考虑进行如下的展开,

$$\begin{pmatrix} A(x) \\ B^+(x) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} w_{L,n}(\vec{x}) \\ w_{R,n}(\vec{x}) \end{pmatrix} \frac{a_n(t)}{\sqrt{2\omega_n}} + \begin{pmatrix} w^*_{L,n}(\vec{x}) \\ w^*_{R,n}(\vec{x}) \end{pmatrix} \frac{\bar{a}^+_n(t)}{\sqrt{2\omega_n}} \right\} \quad (C-2)$$

其中 $\{w_{L,n}(\vec{x})\}$ 、 $\{w_{R,n}(\vec{x})\}$ 是 c 数标量正交完备归一波函数系。

由于本模型中对应于标量场 A 的广义动量 Π_A 是简单地正比于 $\dot{A}$, 所以由量子化规则

$$[\Pi_A(\vec{x}, t), A(\vec{x}', t)] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

可以断定消灭算子对 t 的依赖是

$$a_n(t) = a_n(0) e^{-i\omega_n t} \equiv a_n e^{-i\omega_n t}, \quad (C-3)$$

对于 $B^+(x)$ 的类似分析也导致同样结论。这里的 ω_n 将由决定正交完备波函数系 $\{w_{L,n}\}$ 的方程决定。有了 (C-3), 我们为了方便就可以定义

$$\bar{w}_n(\vec{x}, t) \equiv \frac{w_n(\vec{x})}{\sqrt{2\omega_n}} e^{-i\omega_n t} \quad (C-4)$$

使得 (C-2) 采取下列形式:

$$\begin{pmatrix} A(x) \\ B^+(x) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} \bar{w}_{L,n}(\vec{x}, t) \\ \bar{w}_{R,n}(\vec{x}, t) \end{pmatrix} a_n + \begin{pmatrix} \bar{w}^*_{L,n}(\vec{x}, t) \\ \bar{w}^*_{R,n}(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \bar{a}^+_n \right\} \quad (C-2)'$$

对于口袋场, 仿照[6], 先分出经典场, 再将其余部分按一组正交归一完备函数系 (比如平面波) 展开,

$$\sigma(x) = \sigma_{cl}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sigma_j(\vec{x}) e^{-i\omega_j t}}{\sqrt{2\omega_j}} c_j + \frac{\sigma_j^*(\vec{x})}{\sqrt{2\omega_j}} e^{i\omega_j t} c_j^+ \right) \quad (C-5)$$

$$\xi(x) = \eta(x) + \eta^c(x) = \xi_{cl}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\xi_{js}(\vec{x}) d_{js}(t) + \xi^c_{js}(\vec{x}) d^+_{js}(t) \right] \quad (C-6)$$

这里应注意, 对于费米场我们不能简单从它的量子化规则定下 $b_{s,n}(t)$ 、 $d_{js}(t)$ 对 t

依赖的形式。不过,在超对称性理论的情况下,由构成有限维超对称性表示的要求,关于 $b_{s,n}(t)$ 、 $d_{j,s}(t)$ 也可以达到类似于(C-3)的结论。这一点请见正文式(16)。

还有一个问题: $\{w_{L,n}\}$ 、 $\{w_{R,n}\}$ 、 $\{u_{s,n}\}$ 以及 σ_{ei} 、 η_{ei} 是怎么确定的。

对于有超对称不变性的本模型来说,经过正文第三段的分析,最后需要我们解方程确定的只有一组标量函数系 $\{w_{L,n}(\vec{x})\}$ 和 $\sigma_{ei}(\vec{x})$ 、 $\eta_{ei}(\vec{x})$ 。对于给定的物理问题,(比如有若干个处于 $n=1$ 态的物质场粒子组成的束缚态),首先,计算 $\langle t|H|t\rangle$ 。通过对 $w_{L,n}$ 、 σ_{ei} 、 η_{ei} 变分 $\langle t|H|t\rangle$ 取极小而得到一组关于 $w_{L,1}(\vec{x})$ 和 $\sigma_{ei}(\vec{x})$ 的联立方程组(以 ω_1 为本征值的本征问题)。由此解出 $w_{L,1}(\vec{x})$ 、 $\sigma_{ei}(\vec{x})$ 及 ω_1 来。而后固定选用此 $\sigma_{ei}(\vec{x})$,再解 $w_{L,1}(\vec{x})$ 满足的本征方程的高能级激发态,这样求得的就是整个 $\{w_{L,n}(\vec{x})\}$ 。 $\langle t|H|t\rangle$ 对于 η_{ei} 变分取极值得到的方程有一个特点:它允许取 $\eta_{ei}=0$ 为解。关于这些求解的问题,我们在文章[7]中要加以阐述,这里只概略地提一下。

参 考 文 献

- [1] A. Salam, J. Strathdee, Phys. Rev. D11(1975)1521.
- [2] 同上作者, Fortschritte Der Physik 26(1978)2.
- [3] P. Fayet, S. Ferrara, Physics Reports 32C(1977)№5
- [4] J. Wess, Supersymmetry and supergravity, Part I, Lectures given at Princeton University, 1982.
- [5] S. Ferrara 等二人的一份, 1982年, 西欧中心(CERN)预印本。
- [6] R. Friedberg, T. D. Lee, Phys. Rev. D15(1977)1694.
- [7] 岳宗五, 赵佩英, 非拓扑性孤粒子解与超对称性的动力学破缺, 二系论文, 1984.
- [8] 岳宗五, 赵佩英, 超对称口袋模型的低能束缚态解, 二系论文, 1984.
- [9] M. Creutz, Phys. Rev. D10(1974)1749.
- [10] Yue Zong Wu, A supersymmetric mechanism for color degree of freedom, 高能物理研究所, 预印本 BIHEP-TH-8(81), 改写本 BIHEP-TH-12(82).
- [11] 陈中谟, 岳宗五, 1982武汉粒子物理讨论会文集, 74页, 华中师范学院学报编辑出版。
- [12] Yue Zong Wu, Comments on the representation of supersymmetry on Composite states, 高能所预印本 BIHEP-TH-14(82)
- [13] B. dewit, D. Z. Freedman, Phys. Rev. D12(1975)2286.

Representation of Supersymmetry on Bound States

Yue Zongwu

Abstract

After an analysis by means of expressing the supersymmetric charge in terms of particle's creation and destruction operators, we find the conditions,

under which supersymmetry on the bound state of a Supersymmetric field-Theoretic Bag model represents finite dimensions. From these conditions, we get the rules of choosing wave functions for particles inside a bound state, which will largely simplify the task of finding bound state of the model.

Examples are given to show the new features of such notation in comparison with "off such" notation.

The possibility of describing leptons and quarks by a Supersymmetric Field-Theoretic Bag model is also discussed.