国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八五年第二期　总第五十期　No.2 1985　Sum. 50

用特殊弹道分离制导工具误差系数并推算正常弹道的制导工具误差

贾 沛 然

摘　要　本文讨论了两个问题：(*a*) 在运用验前估值的条件下，用Bayes方法分离特殊弹道的制导工具误差系数，并给出了估值的计算公式及其协方差阵；(*b*) 在(*a*)的基础上介绍了计算正常弹道下制导工具误差的方法。

一、遥、外测弹道参数偏差与工具误差系数的关系

我们知道，导弹在空间飞行中绝对加速度$\dot{\mathbf{V}}$与视加速度$\dot{\mathbf{W}}$、引力加速度$\mathbf{g}$有如下关系：

$$\dot{\mathbf{V}}=\mathbf{g}+\dot{\mathbf{W}} \tag{1}$$

其中$\dot{\mathbf{V}}$、$\mathbf{g}$、$\dot{\mathbf{W}}$为各自在惯性坐标系中三个分量所组成的一列矢量。

不计外测的测量误差，并注意到引力加速度$\mathbf{g}$是导弹位置矢量$\mathbf{r}$的函数，将上式在标准弹道近旁展开后，可得外测弹道相对于标准弹道的摄动方程：

$$\delta\dot{\mathbf{V}}=\left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{r}^T}\right]_{\tilde{\mathbf{r}}}\delta\mathbf{r}_0+\delta\dot{\mathbf{W}}_0 \tag{2}$$

其中$\delta\dot{\mathbf{V}}_0$为外测参数$\dot{\mathbf{V}}_0$与标准弹道参数$\dot{\mathbf{V}}_{\tilde{0}}$之差；$\delta\mathbf{r}_0$、$\delta\dot{\mathbf{W}}_0$的意义，同上类似；

$\left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{r}^T}\right]_{\tilde{\mathbf{r}}}$为引力加速度矢量$\mathbf{g}$对位置矢量$\mathbf{r}$求偏微分，并代以标准弹道位置矢量$\widetilde{\mathbf{r}}$的值。

不难理解，$\delta\dot{\mathbf{W}}_0$是导弹在飞行中因飞行条件偏离标准弹道条件引起的视加速度偏差，亦称是外界干扰因素引起的偏差。

对于遥测结果，也可建立以标准弹道为基准的摄动方程：

$$\delta\dot{\mathbf{V}}_t=\left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{r}^T}\right]_{\tilde{\mathbf{r}}}\delta\mathbf{r}_t+\delta\dot{\mathbf{W}}_t \tag{3}$$

式中有註脚“t”的等时偏差量是表示遥测参数与标准弹道参数之差。

式(3)中之$\delta\dot{\mathbf{W}}_t$，既包括外界干扰因素引起的视加速度偏差量$\delta\dot{\mathbf{W}}_0$，还包括与惯

一九八四年十二月收到

性系统及元件的工具误差系数有关的视加速度测量误差量 $\delta\dot{\mathbf{W}}_p$，即

$$\delta\dot{\mathbf{W}}_t=\delta\dot{\mathbf{W}}_0+\delta\dot{\mathbf{W}}_p \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式后，再减去(2)式，得：

$$\delta\dot{\mathbf{V}}=\left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{r}^T}\right]_{\tilde{\mathbf{r}}}\delta\mathbf{r}+\delta\dot{\mathbf{W}}_p \tag{5}$$

其中：

$$\delta\dot{\mathbf{V}}=\delta\dot{\mathbf{V}}_t-\delta\dot{\mathbf{V}}_0$$

$$\delta\mathbf{r}=\delta\mathbf{r}_t-\delta\mathbf{r}_0$$

式 (5) 是以外测弹道为基准，可用来求取工具误差引起的运动参数偏差。严格的做法是根据外测数据建立外测弹道，式 (5) 中 $\left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{r}^T}\right]$ 应代以外测弹道中位置矢量 $\mathbf{r}_0$ 的值。但由(5)式可看出，将其代以标准弹道数据，在线性化条件下，其误差是高阶的。

惯性系统及元件的工具误差系数 $\delta\mathbf{C}$ 引起的视加速度测量偏差 $\delta\dot{\mathbf{W}}_p$，通常可表示为：

$$\delta\dot{\mathbf{W}}_p=\mathbf{B}\delta\mathbf{C} \tag{6}$$

其中：$\delta\mathbf{C}$——工具误差系数，为一列向量；

$\mathbf{B}$——与视加速度分量有关的比例系数，

$$\mathbf{B}=[B_{ij}]$$

为方便计，可将(5)式写成一般摄动方程的形式：

$$\frac{d\delta\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{A}\delta\mathbf{X}+\mathbf{B}\delta\mathbf{C} \tag{7}$$

其中

$$\delta\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\delta\mathbf{V}\\ \delta\mathbf{r}\end{bmatrix}=[\delta v_x\delta v_y\delta v_z x\, y\, z]^T$$

此为惯性坐标系中遥测与外测运动参数之差；

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{0} & \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{r}^T}\\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0}\end{array}\right]\text{——系数矩阵；}$$

$$\mathbf{B}\delta\mathbf{C}=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\cdots\cdots B_{1n}\\ B_{21} & B_{22}\cdots\cdots B_{2n}\\ B_{31} & B_{32}\cdots\cdots B_{3n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta C_1\\ \delta C_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \delta C_n\end{pmatrix}$$

利用 (7) 式，可求解任一时刻遥、外测运动参数之差。通常用共轭方程法求解。对应 (7) 式的共轭方程为：

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} \tag{8}$$

根据 Bliss 公式有

$$\boldsymbol{\lambda}^T(t)\delta\mathbf{X}(t)=\boldsymbol{\lambda}^T(t_0)\delta\mathbf{X}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\lambda}^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\delta\mathbf{C}(\tau)d\tau \tag{9}$$

当给定$\boldsymbol{\lambda}(t)=\mathbf{I}$，则可由(8)解得$\boldsymbol{\lambda}(\tau)$，从而得：

$$\delta\mathbf{X}(t)=\boldsymbol{\lambda}^T(t_0)\delta\mathbf{X}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\lambda}^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\delta\mathbf{C}(\tau)d\tau \tag{10}$$

若且 $\delta\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{0}$，则有：

$$\delta\mathbf{X}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\lambda}^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\delta\mathbf{C}(\tau)d\tau \tag{11}$$

此式可在给定$\mathbf{B}\delta\mathbf{C}$的条件下，算得工具误差引起的 t 时刻的运动参数偏差。

二、遥、外测弹道视速度差与工具误差系数的关系

显然，遥、外测弹道视加速度偏差量$\varDelta\dot{\mathbf{W}}(t)$为：

$$\varDelta\dot{\mathbf{W}}(t)=\delta\dot{\mathbf{W}}_t(t)-\delta\dot{\mathbf{W}}_0(t)$$

将(4)式之$\delta\dot{\mathbf{W}}_t$代入上式，并注意到(6)式，即得：

$$\varDelta\dot{\mathbf{W}}(t)=\delta\dot{\mathbf{W}}_p(t)=\mathbf{B}\delta\mathbf{C} \tag{12}$$

积分上式得：

$$\varDelta\mathbf{W}(t)=\varDelta\mathbf{W}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{B}(\tau)\delta\mathbf{C}(\tau)d\tau \tag{13}$$

当 $\varDelta\mathbf{W}(t_0)=\mathbf{0}$ 时，有

$$\varDelta\mathbf{W}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{B}(\tau)\delta\mathbf{C}(\tau)d\tau \tag{14}$$

式(14)左端即为遥、外测视速度偏差量，该式反映出该偏差量与工具误差系数的关系。

三、进行误差系数分离的基点

本文以后讨论误差系数分离时，均以(14)式为依据。不难理解，具体方法对(11)式也是完全适用的。在此基础上，对于形如(10)式及(13)式这类非零起始条件的方程进行误差系数分离，应是不困难的。

在后面讨论中，首先认为工具误差系数 $\delta\mathbf{C}$ 在推力飞行段内为常值。因此，(14) 式即可写为：

$$\varDelta\mathbf{W}(t)=\mathbf{S}(t)\delta\mathbf{C} \tag{15}$$

其中

$$\mathbf{S}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{B}(\tau)d\tau$$，称之为环境函数。

另外，考虑观测值有误差，且认为观测误差为白噪声。因此，可以(15)式为基础，写成

$$\varDelta\mathbf{W}(t)=\mathbf{S}(t)\delta\mathbf{C}+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{16}$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为观测误差，它与$\varDelta\mathbf{W}(t)$为同維列向量，且满足$E[\boldsymbol{\varepsilon}]=\mathbf{0}$，$E[\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^T]=\mathbf{R}$，观测噪声的协方差阵$\mathbf{R}$由外测手段的精度所提供。

四、工具误差系数的分离方法

工具误差系数是維数 δC 高达数十阶的一列向量，根据一些资料提供，通常有二十项左右是主要的。如果将一般试验弹道的测量结果利用(16)式来进行误差分离，会遇到矩阵求逆的病态问题。我们注意到(16)式中环境函数 $\mathbf{S}(t)$ 是矩阵 $\mathbf{B}$ 的积分结果，而 $\mathbf{B}$ 矩阵各元素分别是与视加速度无关的零次项，或与视加速度分量的一次项、二次项、交叉项有关的项。因此，完全可考虑将试验弹道设计成一种特殊弹道，来控制和形成一种验试环境，使得惯性系统或其元件呈现的误差有利于误差系数的精确分离。例如，将弹道设计为有较长时间的垂直飞行段，后面再加一段具有确定程序的转弯段；利用垂直段，将与视加速度无关的零次项误差系数及仅与视加速度分量$\dot{W}_y$各次项有关的误差系数分离出来；在此基础上再利用转弯段的测量数据对其他误差系数进行分离。

为此，将公式(16)改写为：

$$\Delta \mathbf{W}(t)=\mathbf{S}_1(t)\delta\mathbf{C}_1+\mathbf{S}_2(t)\delta\mathbf{C}_2+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{17}$$

式中：$\delta\mathbf{C}_1$为垂直段所要分离的误差系数矩阵；

$\delta\mathbf{C}_2$为转弯段所要补加分离的与$\dot{W}_x$、$\dot{W}_z$的一次项、二次项、交叉项有关的误差系数矩阵；

$\mathbf{S}_1(t)$、$\mathbf{S}_2(t)$是与$\delta\mathbf{C}_1$、$\delta\mathbf{C}_2$分别对应的环境函数矩阵。

1. 垂直段分离误差系数 $\delta\mathbf{C}_1$

注意到在垂直段处有$\mathbf{S}_2(t)=\mathbf{O}$，则(17)式改写为：

$$\Delta \mathbf{W}(t)=\mathbf{S}_{1.1}(t)\delta\mathbf{C}_1+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{18}$$

假设飞行试验前对惯性系统及元件进行地面测试，得到误差系数列向量 $\delta\mathbf{C}_1$ 的统计值为 $\delta\mathbf{C}_{10}$，其服从协方差阵为

$$\operatorname{cov}[\delta\mathbf{C}_{10}\delta\mathbf{C}_{10}^T]=\mathbf{P}_1 \tag{19}$$

的正态分布。以此作为验前信息，在获得观测信息量$\Delta\mathbf{W}$后，利用Bayes估计可得：

$$\begin{aligned}\delta\hat{\mathbf{C}}_1&=E[\delta\mathbf{C}_1/\Delta\mathbf{W}]\\&=[\mathbf{S}_{1.1}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}_{1.1}+\mathbf{P}_1^{-1}]^{-1}[\mathbf{S}_{1.1}^T\mathbf{R}^{-1}\Delta\mathbf{W}+\mathbf{P}_1^{-1}\delta\mathbf{C}_{10}]\end{aligned} \tag{20}$$

此Bayes估计$\delta\hat{\mathbf{C}}_1$值是有偏估计。可以证明，当验前均值$\delta\mathbf{C}_{10}=\delta\mathbf{C}_1$时，$\delta\hat{\mathbf{C}}_1$即为无偏估计。由矩阵求逆引理可导得估值$\delta\hat{\mathbf{C}}_1$的协方差阵为

$$\operatorname{Var}[\delta\mathbf{C}_1/\Delta\mathbf{W}]=[\mathbf{S}_{1.1}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}_{1.1}+\mathbf{P}_1^{-1}]^{-1}\triangleq\Sigma_1 \tag{21}$$

故(20)式可写为：

$$\delta\hat{\mathbf{C}}_1=[\Sigma_1\mathbf{S}_{1.1}^T\mathbf{R}^{-1}]\Delta\mathbf{W}+[\Sigma_1\mathbf{P}_1^{-1}]\delta\mathbf{C}_{10} \tag{22}$$

由上式可看出，$\delta\hat{\mathbf{C}}_1$是$\Delta\mathbf{W}$的线性组合与$\delta\mathbf{C}_{10}$的线性组合之和，反映出测量值与验前估算对误差系数估计值的可靠的加权关系。

(22)式中，如果$\mathbf{P}_1^{-1}=\mathbf{O}\cdot\mathbf{I}$，则

$$\begin{cases}\delta\hat{\mathbf{C}}_1=[\mathbf{S}_{1.1}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}_{1.1}]^{-1}\mathbf{S}_{1.1}^T\mathbf{R}^{-1}\Delta\mathbf{W}\\\operatorname{Var}[\delta\mathbf{C}_1/\Delta\mathbf{W}]=[\mathbf{S}_{1.1}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}_{1.1}]^{-1}\end{cases} \tag{23}$$

此为最大似然(ML)估计值及方差。显然，ML估计比 Bayes 验前估计的方差要大。

2. 转弯段分离误差系数 $\delta\mathbf{C}_2$

根据(17)式，考虑对应转弯段的弹道，则有：

$$\varDelta\mathbf{W}=\mathbf{S}_{1.2}\delta\mathbf{C}_1+\mathbf{S}_{2.2}\delta\mathbf{C}_2+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{24}$$

该式的起点选在转弯段的起始时刻，应注意的是由式(13)可知，在计算 $\varDelta\mathbf{W}$ 时需扣除垂直段末点的值。

由于在垂直段已进行了对 $\delta\mathbf{C}_1$的分离，得到：

$$\delta\hat{\mathbf{C}}_1=\delta\mathbf{C}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_1 \tag{25}$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$是指误差系数$\delta\mathbf{C}_1$的估值与眞值的误差，该误差系数估值的协方差阵由(21)式给出。

假设对除$\delta\mathbf{C}_1$以外的待分离的误差系数$\delta\mathbf{C}_2$有验前信息$\delta\mathbf{C}_{20}$，且设已知

$$\delta\mathbf{C}_{20}=\delta\mathbf{C}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_2 \tag{26}$$

其中$\boldsymbol{\varepsilon}_2$是验前信息$\delta\mathbf{C}_{20}$与眞值$\delta\mathbf{C}_2$的误差，其方差亦由地面测试给出，记为

$$\mathrm{Var}[\delta\mathbf{C}_{20}]=\mathbf{P}_2 \tag{27}$$

将(25)式乘相应环境函数$\mathbf{S}_{1.2}$，得：

$$\mathbf{S}_{1.2}\delta\hat{\mathbf{C}}_1=\mathbf{S}_{1.2}\delta\mathbf{C}_1+\mathbf{S}_{1.2}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \tag{28}$$

由等式(24)的两端分别减去等式(28)的两端，可得：

$$\varDelta\mathbf{W}-\mathbf{S}_{1\cdot2}\delta\hat{\mathbf{C}}_1=\mathbf{S}_{2\cdot2}\delta\mathbf{C}_2+(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{S}_{1\cdot2}\boldsymbol{\varepsilon}_1) \tag{29}$$

记：

$$\begin{cases}\varDelta\mathbf{W}'=\varDelta\mathbf{W}-\mathbf{S}_{1\cdot2}\,\delta\hat{\mathbf{C}}_1\\ \boldsymbol{\varepsilon}'=\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{S}_{1\cdot2}\boldsymbol{\varepsilon}_1\end{cases} \tag{30}$$

则有：

$$\varDelta\mathbf{W}'=\mathbf{S}_{2\cdot2}\delta\mathbf{C}_2+\boldsymbol{\varepsilon}' \tag{31}$$

由(30)式的第二个等式可求取 $\boldsymbol{\varepsilon}'$ 的协方差阵：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\boldsymbol{\varepsilon}']&=E[(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{S}_{1\cdot2}\boldsymbol{\varepsilon}_1)(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{S}_{1\cdot2}\boldsymbol{\varepsilon}_1)^T]\\&=E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T-\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}_1^T\mathbf{S}_{1\cdot2}^T-\mathbf{S}_{1\cdot2}\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}^T+\mathbf{S}_{1\cdot2}\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_1^T\mathbf{S}_{1\cdot2}^T]\\&=\mathbf{R}-\mathbf{S}_{1\cdot2}\Sigma_1\mathbf{S}_{1\cdot2}^T\triangleq\Sigma_{\varepsilon'}\end{aligned} \tag{32}$$

这样，原来由(24)式来分离误差系数$\delta\mathbf{C}_2$，就改为用(31)式来求。仍然运用 Bayes 估计，即得：

$$\begin{aligned}\delta\hat{\mathbf{C}}_2&=E[\mathbf{C}_2/\varDelta\mathbf{W}']\\&=[\mathbf{S}_{2\cdot2}^T\Sigma_{\varepsilon'}^{-1}\mathbf{S}_{2\cdot2}+\mathbf{P}_2^{-1}]^{-1}[\mathbf{S}_{2\cdot2}^T\Sigma_{\varepsilon'}^{-1}\varDelta\mathbf{W}'+\mathbf{P}_2^{-1}\delta\mathbf{C}_{20}]\end{aligned} \tag{33}$$

而估值 $\delta\hat{\mathbf{C}}_2$的协方差阵为：

$$\mathrm{Var}[\delta\mathbf{C}_2/\varDelta\mathbf{W}']=[\mathbf{S}_{2\cdot2}^T\Sigma_{\varepsilon'}^{-1}\mathbf{S}_{2\cdot2}+\mathbf{P}_2^{-1}]^{-1}\triangleq\Sigma_2 \tag{34}$$

将其代入(33)式：

$$\delta\hat{\mathbf{C}}_2=[\Sigma_2\mathbf{S}_{2\cdot2}^T\Sigma_{\varepsilon'}^{-1}]\varDelta\mathbf{W}'+[\Sigma_2\mathbf{P}_2^{-1}]\delta\mathbf{C}_{20} \tag{35}$$

至此，利用特殊弹道即将工具误差系数$\delta \mathbf{C}$的估值$\delta \hat{\mathbf{C}}$求得：

$$\delta \hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{C}}_1 \\ \delta \hat{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} \tag{36}$$

式中之$\delta \hat{\mathbf{C}}_1$、$\delta \hat{\mathbf{C}}_2$分别由(22)式及(35)式算得。

五、折合正常弹道的工具误差

折合的前提认为：对同一发导弹而言，其工具误差系数不因试验弹道的性能变化而改变。因此，在对特殊弹道分离出$\delta \hat{\mathbf{C}}$后，即以此用于正常弹道，来估算由于存在$\delta \hat{\mathbf{C}}$所引起的关机点视速度偏差量，即认为

$$\Delta \mathbf{W}_k = \mathbf{S}(t_k)\delta \hat{\mathbf{C}} \tag{37}$$

其中 $\delta \hat{\mathbf{C}}$是用特殊弹道分离出的误差系数列向量；

$\mathbf{S}(t_k)$ 是用正常弹道的视加速度值算得的环境函数矩阵值。

利用$\delta \hat{\mathbf{C}}$，折合到正常弹道的视速度偏差$\Delta \mathbf{W}$的协方差阵为

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[\Delta \mathbf{W}_k] &= E[(\mathbf{S}\delta \hat{\mathbf{C}})(\mathbf{S}\delta \hat{\mathbf{C}})^T] \\ &= \mathbf{S}E[\delta \hat{\mathbf{C}}\delta \hat{\mathbf{C}}^T]\mathbf{S}^T \\ &= \mathbf{S}\Sigma\mathbf{S}^T \end{aligned} \tag{38}$$

其中

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2] \tag{40}$$

利用(37)式算得正常弹道的关机点视速度偏差值，并通过积分(15)式得视位置偏差量：

$$\Delta \dot{\mathbf{W}}_k = \int_{t_0}^{t_k} \mathbf{S}(t)dt \cdot \delta \hat{\mathbf{C}} \tag{41}$$

需要强调指出的是：(37)及(41)两式中的t_k系指实际关机时刻，不能简单地代以标准弹道给定的关机时刻$\tilde{t_k}$。在我们仅讨论工具误差系数造成的落点偏差时，此实际关机时刻也不是事先确定的，必须在考虑有工具误差系数的条件下，通过制导方程进行实时计算，来确定t_k值。不同的制导方案有不同的制导方程。下面即以射程关机方案来讨论工具误差系数造成的落点偏差。

设导弹射程完全取决于关机点的视速度、视位置及关机时刻；对标准弹道与实际弹道而言分别可以$L(\widetilde{\mathbf{W}_k}, \widetilde{\dot{\mathbf{W}}_k}, \tilde{t_k})$、$L(\mathbf{W}, \dot{\mathbf{W}}, t)$表示。按射程关机的制导方程可表示为：

$$L(\widetilde{\mathbf{W}_k}, \widetilde{\dot{\mathbf{W}}_k}, \tilde{t_k}) = L(\mathbf{W}, \dot{\mathbf{W}}, t) \tag{42}$$

在不存在工具误差而仅有外界干扰时，因导弹实际飞行偏离标准弹道，因此当(42)式成立时，等式两端括号内的参数不可能同时相等。反之，在不存在外界干扰作用而仅有工

具误差时，只要不是闭路制导，那么导弹则可认为按标准弹道飞行。但此时，等式(42)右端的$\mathbf{W}$、$\underset{\cdot}{\mathbf{W}}$也不是标准弹道参数，因为工具误差系数造成的$\varDelta\mathbf{W}$、$\varDelta\underset{\cdot}{\mathbf{W}}$误差量已反映入测量值中。因而使(42)式成为

$$L(\widetilde{\mathbf{W}_{\tilde{k}}}、\widetilde{\underset{\cdot}{\mathbf{W}}_{\tilde{k}}}、\widetilde{t_k})=L(\widetilde{\mathbf{W}(t)}+\varDelta\mathbf{W}(t)、\widetilde{\underset{\cdot}{\mathbf{W}}(t)}+\varDelta\underset{\cdot}{\mathbf{W}}(t)、t) \tag{43}$$

这样，即可利用(37)、(41)式进行小步长的实时计算t时刻的$\varDelta\mathbf{W}$、$\varDelta\underset{\cdot}{\mathbf{W}}$值，并与该$t$时刻的标准弹道参数值$\widetilde{\mathbf{W}(t)}$、$\widetilde{\underset{\cdot}{\mathbf{W}}(t)}$同时代入(43)式右端，计算$L$。当等式成立时，此时的$t$即为实际关机时刻$t_k$。不难理解，当$t_k$确定后，那么工具误差系数造成的射程偏差即为

$$\varDelta L=L(\widetilde{\mathbf{W}(t_k)}、\widetilde{\underset{\cdot}{\mathbf{W}}(t_k)}、t_k)-L(\widetilde{\mathbf{W}_{\tilde{k}}}、\widetilde{\underset{\cdot}{\mathbf{W}}_{\tilde{k}}}、\widetilde{t_k}) \tag{44}$$

如将上式右端第一项在标准弹道$\widetilde{t_k}$时刻展级数取一阶项，则可得

$$\varDelta L=\frac{\partial L}{\partial\mathbf{W}^{T}_{\tilde{k}}}\varDelta\widetilde{\mathbf{W}_k}+\frac{\partial L}{\partial\underset{\cdot}{\mathbf{W}}^{T}_{\tilde{k}}}\varDelta\widetilde{\underset{\cdot}{\mathbf{W}}_k}+\frac{\partial L}{\partial t_{\tilde{k}}}\varDelta t_k \tag{45}$$

式中

$$\varDelta\widetilde{\mathbf{W}_k}=\widetilde{\mathbf{W}(t_k)}-\widetilde{\mathbf{W}_{\tilde{k}}}$$

$$\varDelta\widetilde{\underset{\cdot}{\mathbf{W}}_{\tilde{k}}}=\widetilde{\underset{\cdot}{\mathbf{W}}(t_k)}-\widetilde{\underset{\cdot}{\mathbf{W}}_{\tilde{k}}}$$

$$\varDelta t_k=t_k-t_{\tilde{k}}$$

同样，将(43)式右端展级数取至一阶项，并代以$t_{\tilde{k}}$处的值，则有

$$\frac{\partial L}{\partial\mathbf{W}^{T}_{\tilde{k}}}(\varDelta\widetilde{\mathbf{W}_k}+\varDelta\mathbf{W}_k)+\frac{\partial L}{\partial\underset{\cdot}{\mathbf{W}}^{T}_{\tilde{K}}}(\varDelta\widetilde{\underset{\cdot}{\mathbf{W}}_k}+\varDelta\underset{\cdot}{\mathbf{W}})+\frac{\partial L}{\partial t_{\tilde{k}}}\varDelta t_k=0 \tag{46}$$

比较(45)与(46)式，即可得计算工具误差系数造成的射程偏差的另一种形式：

$$\varDelta L=-\frac{\partial L}{\partial\mathbf{W}^{T}_{\tilde{k}}}\varDelta\mathbf{W}_k-\frac{\partial L}{\partial\underset{\cdot}{\mathbf{W}}^{T}_{\tilde{k}}}\varDelta\underset{\cdot}{\mathbf{W}}_k \tag{47}$$

要求工具误差系数引起的落点侧向偏差，可用类似(45)的形式来求：

$$\varDelta Z=\frac{\partial L}{\partial\mathbf{W}^{T}_{\tilde{k}}}\varDelta\widetilde{\mathbf{W}_{\sim}}+\frac{\partial Z}{\partial\underset{\cdot}{\mathbf{W}}^{T}_{\tilde{k}}}\varDelta\widetilde{\underset{\cdot}{\mathbf{W}}_k}+\frac{\partial Z}{\partial t_{\tilde{k}}}\varDelta t_k \tag{48}$$

但不可能得到类似于(47)式形式的计算式，这是由于在射程制导的条件下，才能导出(47)式的结果。

现将求取工具误差系数引起的落点射程和侧向偏差的计算公式统一写为：

$$\begin{pmatrix}\varDelta L\\ \varDelta Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial L}{\partial(\mathbf{W}^{T}_{\tilde{k}}\underset{\cdot}{\mathbf{W}}^{T}_{\tilde{k}}t_{\tilde{k}})}\\[2ex] \dfrac{\partial Z}{\partial(\mathbf{W}^{T}_{\tilde{k}}\underset{\cdot}{\mathbf{W}}^{T}_{\tilde{k}}t_{\tilde{k}})}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varDelta\widetilde{\mathbf{W}_k}\\ \varDelta\widetilde{\underset{\cdot}{\mathbf{W}}_k}\\ \varDelta t_k\end{pmatrix} \tag{49}$$

式中$\varDelta\widetilde{\mathbf{W}_k}$、$\varDelta\widetilde{\underset{\cdot}{\mathbf{W}}_k}$是指满足等式(43)的那个时刻$t_k$的视速度、视位置偏差量（见(45)式）。

偏导数矩阵中各元素，可利用标准弹道的标准关机点的参数计算得到，其具体计算

公式应在制导设计方案中提供；亦可用改变关机点参数运用数值计 算 弹 道的方法去获取。对此本文不再赘述。

参 考 文 献

[1] 张金槐等，飞行器试验统计学，国防科技大学出版。1984年

[2] Utilization of a priori estimates in ICBM trajectory determination, ADA 029568

[3] 张最良等，弹道导弹的制导与控制，国防科技大学，1981年

Use Special Trajectory Separate Error Coefficient of Guidance Tool and Deduce Guidance Tool Error of Normal Trasectory

Jia Peiran

Abstract

In this paper, two problems have been studied, i.e, (a) Under the condition of operate priori estimates, error coefficient of guidance tool of special Trajectory is separated by Bayes' method. Calculate formula aud variance matrix of estiminates of error coefficient are also given. (b) On the basis of (a) the method of calculating guidance tool error for normal trajectory is introduced