国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八五年第三期　总第五十一期　No.3 1985　Sum. 51

二次规划的分解问题

吴 秉 惠

提　要　二次规划在规划论研究中起着重要的作用。能够对更多更广的一类二次规划给出一个可行的算法是人们长期一直探求的工作。本文在很一般的假设下证明了一个二次规划总可以使之成为凸的超平面上进行分解，并且分解后的每个子规划也是二次的。

符 号 说 明

1. 用大写的英文字母表示集合，如R、P、M；
2. 用小写的英文或希腊文字母表示数，如a、h、l、ε；
3. 用大写的英文黑体字母表示矩阵，如$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$；
4. 用小写的英文黑体字母表示向量，如$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{t}$、$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{q}$.

一、基 本 问 题

给出一个二次规划的一般形式

$$\min Z = a + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

(QP)

$$St.\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d}$$

其中$\boldsymbol{C}$是对称矩阵，$\boldsymbol{x}$是n維变量。

令

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{S}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_l & \\ & -\boldsymbol{I}_h \end{pmatrix}\boldsymbol{S}$$

$\boldsymbol{S}$是可逆方阵。若$h=0$，那么(QP)是凸规划；若$h=n$，那么(QP)是另一类特殊的规划。我们仅考虑$0<h<n$的情况。注意到这时$\boldsymbol{C}$是可逆的。

本文1984年11月5日收到

令

$$S=\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}$$

其中 S_2是 $h\times n$ 阶的满行秩矩阵，我们假定(QP)的可行集非空，令

$$M=\{t\in R^h \mid t=S_2x,\ Ax\leqslant d\}$$

称M为 (QP) 的分解可行集，其中 R^h 是 h 維向量集。又令

$$f(t)=\min\left\{a+b^Tx+\frac{1}{2}x^TCx \mid Ax\leqslant d,\ S_2x=t\right\}$$

称 f 为 (QP) 的分解目标函数。

M是一个多面体。若存在有限多个多面体 $M_1,\cdots,M_r$，使

$$M=\bigcup_{i=1}^{r} M_i$$

那么称 $\{M_1,\cdots,M_r\}$ 为M的一个有限多面体分解，每个 M_i 称为M的一个分解多面体。

定理 1 对于规划 (QP)，存在分解可行集M的一个有限多面体分解，使分解目标函数 f 在M的每个分解多面体上是二次的。

二、预 备 知 识

给出一个凸二次规划的一般形式

$$(CQP)\qquad \begin{aligned} &\min Z=a+b^Tx+\frac{1}{2}x^TCx \\ &St.\ Ax\leqslant d \\ &\quad\ \ Bx=e \end{aligned}$$

其中 $Z=Z(x)$ 在(CQP)的可行集上是凸函数。

设 d 是m維的，e 是 h 維的。对于 $\varepsilon>0$，令

$$L(\varepsilon)=\left\{q=\begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix}\middle| q^1\text{是 }m\text{ 維的，}q^2\text{是 }h\text{ 維的，它们的分量均在}(-\varepsilon,\varepsilon)\text{之间}\right\}。$$

对于 $q\in L(\varepsilon)$，定义规划

$$(CQP)_q\qquad \begin{aligned} &\min Z=a+b^Tx+\frac{1}{2}x^TCx \\ &St.\ Ax\leqslant d+q^1 \\ &\quad\ \ Bx=e+q^2 \end{aligned}$$

我们说规划 (CQP) 是合理的，指对于任意 $\varepsilon>0$，使规划 $(CQP)_q$ 的可行集非空且为凸的 $q\in L(\varepsilon)$ 之全体 $M(\varepsilon)$ 含有 $m+h$ 維欧氏空间中的非空开集。本节我们假定 (CQP) 是合理的。

令

$$R=\{1,\cdots,m\}$$

定理 2 对于任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\boldsymbol{q}\in M(\varepsilon)$ 和 R 的子集 P，使规划 $(CQP)_{\boldsymbol{q}}$ 的最优解 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q})$ 满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_P\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{d}_P+\boldsymbol{q}_P^1\\ \boldsymbol{A}_{R-P}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q})<\boldsymbol{d}_{R-P}+\boldsymbol{q}_{R-P}^1\end{cases}\tag{1}$$

并且矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_P\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

是满行秩的。

证 对于任意的 $\boldsymbol{q}\in M(\varepsilon)$，总存在 R 的子集 P 使得(1)成立，若矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_P\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

不是满行秩的，我们证明这样的 $\boldsymbol{q}$ 之全体 $N(\varepsilon)$ 不含非空开集。对于 $\boldsymbol{q}\in N(\varepsilon)$，存在一个非零行向量 $\boldsymbol{W}_P$，使

$$\boldsymbol{W}_P\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_P\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=0$$

从而

$$\boldsymbol{W}_P\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_P\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}x(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{W}_P\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}_P+\boldsymbol{q}_P^1\\ \boldsymbol{e}+\boldsymbol{q}^2\end{pmatrix}=0$$

因此由 R 的子集 P 是有限的得到 $N(\varepsilon)$ 不含非空开集，由于 (CQP) 是合理的，所以存在一个 $\boldsymbol{q}\in M(\varepsilon)-N(\varepsilon)$. ▮

因为 (CQP) 是凸二次规划，那么 $\boldsymbol{x}$ 是它的最优解，其充要条件是存在向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{v}=0\\ \boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d})=0\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}\leqslant 0\\ -\boldsymbol{u}\leqslant 0\\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}=0\end{cases}\tag{2}$$

设 P 是 R 的子集，且满足

$$\boldsymbol{A}_P\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_P=0$$
$$\boldsymbol{A}_{R-P}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_{R-P}<0$$

令

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_P\\ \boldsymbol{u}_{R-P}\end{pmatrix}$$

由(2)可推出 $\boldsymbol{u}_{R-P}=0$，又记 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_P$，那么(2)式变成

$$\begin{cases}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}_P^T\boldsymbol{u}_P+\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{v}=0\\ \boldsymbol{A}_P\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{d}_P=0\\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{e}=0\\ \boldsymbol{u}_P\geqslant 0\end{cases}\tag{3}$$

令

$$E_P=\begin{pmatrix}A_P\\B\end{pmatrix},\quad e_P=\begin{pmatrix}d_P\\e\end{pmatrix}$$

若 E_P 是满行秩的，那么由(3)式可以得到

$$x_P=C^{-1}E_P^T(E_PC^{-1}E_P^T)^{-1}(E_PC^{-1}b+e_P)-C^{-1}b$$

$$\begin{pmatrix}u_P\\v\end{pmatrix}=-(E_PC^{-1}E_P^T)^{-1}(E_PC^{-1}b+e_P)$$

由此我们得到下定理。

定理 3 若存在 R 的子集 P 使 E_P 满行秩且 x_P 是 (CQP) 的可行解，$u_P\geqslant 0$. 那么 x_P 是 (CQP) 的最优解。

定理 4 对于规划 (CQP)，存在 R 的子集 P 使 E_P 满行秩，且 x_P 是 (CQP) 的可行解，$u_P\geqslant 0$. 从而 x_P 是 (CQP) 的最优解。

证 由于 (CQP) 是合理的，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $q\in M(\varepsilon)$ 使 $(CQP)_q$ 是凸规划。

对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $q\in M(\varepsilon)-N(\varepsilon)$，使 E_P 是满行秩的，且 $x_P(q)$ 是 $(CQP)_q$ 的最优解且 $u_P(q)\geqslant 0$，其中

$$x_P(q)=C^{-1}E_P^T(E_PCE_P^T)^{-1}(E_PC^{-1}b+e_P+q_P)-C^{-1}b$$

$$\begin{pmatrix}u_P(q)\\v\end{pmatrix}=-(E_PCE_P^T)^{-1}(E_PC^{-1}b+e_P+q_P)$$

$$q_P=\begin{pmatrix}q_P^1\\q^2\end{pmatrix}$$

由于 R 的子集是有限的，当 $\varepsilon\to 0$ 时存在 $q\in M(\varepsilon)-N(\varepsilon)$，与之对应的 R 的子集 P 是不变的，从而

$$x_P=\lim_{\varepsilon\to 0}x_P(q)=\lim_{q\to 0}x_P(q)$$

$$u_P=\lim_{\varepsilon\to 0}u_P(q)=\lim_{q\to 0}u_P(q)$$

这样 E_P 是满行秩的，且 x_P 是 (CQP) 的可行解，且 $u_P\geqslant 0$. 由定理 3 得到证明。∎

三、定理 1 的证明

对于规划 (QP)，给一参数规划

$$(QP)_t\qquad \begin{aligned}&\min Z=a+b^Tx+\frac{1}{2}x^TCx\\&St.\ Ax\leqslant b\\&\quad\ \ S_2x=t\end{aligned}$$

其中 $t\in M$.

定理 5 对于每个 $t\in M$，规划 $(QP)_t$ 是凸且合理的。

证 首先 $(QP)_t$ 的可行集是非空的。由于 $Z=Z(x)$ 在限制 $S_2x=t$ 下是凸的，从

而 $(QP)_t$ 是凸的。同样对于任意 $\varepsilon>0$，$\boldsymbol{q}\in L(\varepsilon)$，规划 $(QP)_{tq}$ 只要可行集非空总是凸的。现在我们来找个开集使得规划 $(QP)_{tq}$ 的可行集非空的 $\boldsymbol{q}\in L(\varepsilon)$ 之全体 $M_t(\varepsilon)$ 包含它。

设 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $(QP)_t$ 的可行解，取一个 m 維的开集 G_1^m，其定义如下：

$$G_1^m=\left(\frac{\varepsilon}{2},\ \varepsilon\right)^m$$

从而存在一个 n 維的含原点的开集 G_2^n，使得

$$A(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{y})\leqslant \boldsymbol{d}+\boldsymbol{y}_1,\quad \forall \boldsymbol{y}\in G_2^n,\quad \forall \boldsymbol{y}_1\in G_1^m$$

令

$$G_3^h=\boldsymbol{S}_2\cdot G_2^n$$

$$G_4^h=G_3^h\cap(-\varepsilon,\ \varepsilon)^h$$

因为 $\boldsymbol{S}_2$ 是滿行秩的，从而 G_3^h 是 h 維的含原点的开集。那么 G_4^h 也是 h 維的开集且非空。令

$$G=(G_1^m,\ G_4^h),$$

组成一个 $m+h$ 維的非空开集且

$$G\subseteq M_t(\varepsilon)$$

即 $(QP)_t$ 是合理的。▌

因此，由定理 4，对于每个 $\boldsymbol{t}\in M$，存在一个 R 的子集 P 使矩阵

$$\boldsymbol{E}_P=\begin{pmatrix}A_P\\ \boldsymbol{S}_2\end{pmatrix}$$

是滿行秩的，令

$$\boldsymbol{e}_P(\boldsymbol{t})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}_P\\ \boldsymbol{t}\end{pmatrix}$$

那么

$$\boldsymbol{x}_P(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{E}_P\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{E}_P^T)^{-1}(\boldsymbol{E}_P\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_P(\boldsymbol{t}))-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{b}$$

是 $(QP)_t$ 的最优解，令

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_P(\boldsymbol{t})\\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\end{pmatrix}=-(\boldsymbol{E}_P\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{E}_P^T)^{-1}(\boldsymbol{E}_P\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_P(\boldsymbol{t}))$$

那么

$$\boldsymbol{u}_P(\boldsymbol{t})\geqslant 0$$

对于这样的 P，我们令

$$M_P=\{\boldsymbol{t}\mid \boldsymbol{x}_P(\boldsymbol{t})\text{ 是 }(QP)_t\text{ 的可行解且 }\boldsymbol{u}_P(\boldsymbol{t})\geqslant 0\}$$

那么 M_P 是M的子集且是一个多面体。由于这样的 P 是有限的，从而有M的一个有限多面体分解$\{M_P\}$，在每个 M_P 上，$\boldsymbol{x}_P(\boldsymbol{t})$ 是 $(QP)_t$ 的最优解，也就是

$$f(\boldsymbol{t})=a+\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}_P(\boldsymbol{t})+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_P^T(\boldsymbol{t})\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_P(\boldsymbol{t})$$

$$=a+\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_P\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_P(\boldsymbol{t}))^T(\boldsymbol{E}_P\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{E}_P^T)^{-1}(\boldsymbol{E}_P\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_P(\boldsymbol{t}))-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{b}$$

这是一个二次函数，定理 1 得证。

四、举例说明

例 1 对于规划 (QP) 令

$$a=0 \qquad \boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_n \qquad l=n-1$$

即

$$\min Z=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2-x_n^2) \qquad S.t.\ \boldsymbol{Ax}\leqslant\boldsymbol{d}$$

那么由定理 1 知道 $\qquad f(x_n)\min\{Z\mid\boldsymbol{Ax}\leqslant\boldsymbol{d},\ x_n \text{ 固定}\}$

是个分段二次函数。

例 2 给出规划

$$\min Z=x_1^2+x_2^2-x_3^2 \qquad St.\ x_1+2x_2-x_3\leqslant 8$$

$$2x_1-x_2+3x_3\leqslant 6 \qquad x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0$$

那么

$$f(x_3)=\begin{cases}-x_3^2, & 0\leqslant x_3<2\\ 8x_3^2-36x_3+36, & 2\leqslant x_3\leqslant 4\end{cases}$$

这是个分段二次函数，并且很容易得到在 $x_3=9/2$ 时达到最小值 $\min f=-9/2$.

本文是在许国志研究员的指点下写的，从中一直得到刘德铭副教授和张干宗副教授的指导，作者在此一并致谢。

参考文献

[1] M.Avriel, Nonlinear Programming, Prentice-Hall, Inc, 1976.

[2] R.T.Rockafellar, Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[3] Sacher, Decomposition Algorithm for Quadratic Programming, Math Programming 18(1980) 16—30.

Problem of Decomposition of Quadratic Programming

Wu Binghui

Abstract

This paper theoretically solves the problem of decomposition of the general quadratic programming and proves that the programming after decomposition is also locally quadratic. Section 1 consists of the general problem of decomposition and the main result. Section 2 is a preliminary and section 3 presents a prove for the main result.