国 防 科 技 大 学 学 报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八五年第三期　总第五十一期　No.3 1985　Sum. 51

关于离散时间、时不变系统的可达性与可控性的若干定理

刘 良 佐

提 要　本文对离散时间、时不变系统的可达性与可控性的若干引理、定理及系作出了一个系统的严格的证明。

Louis Padulo, Michael Arbib 著《System Theory》[1]一书第四章第三节，对离散时间、时不变系统Σ的可达性与可控性作了比较详细的讨论。但该节中定理 2 的证明，采用了一个不明显的等式 $S_{l+1}^{(x_0)}=\varphi(S_{k+1}^{(x_0)},\ U^{l-k})$ （219页）。这个式子的不明显性在于：一个从状态x_0可以通过 j 步，$j<l-k$，达到的状态 $\tilde{x}\in S_{l+1}^{(x_0)}$，一般地，找不到一个$x\in S_{k+1}^{(x_0)}$及一个$w\in U^{l-k}$，使 $\tilde{x}=\varphi(x,\ w)\in\varphi(S_{k+1}^{(x_0)},\ U^{l-k})$。

本文打算对该节中的各个引理、定理及系作出一个比较系统的严格的证明，供大家参考。本文采用的符号与该书采用的符号完全相同。

设Σ是一个离散时间、时不变系统，其状态空间为X，输入集为U，输出集为Y，状态转移函数和输出函数分别为

$$\varphi: X\times U^*\longrightarrow X$$

和

$$\eta: X\longrightarrow Y$$

其中U^*为所有有限长输入序列的集合

$$U^*=\{u_0u_1\cdots u_{n-1}\mid n\geqslant 0,\ u_j\in U\}$$

$\forall x_0\in X$，令

$$S^{(x_0)}=\{\hat{x}\in X\mid \exists w\in U^*,\ 使\ \varphi(x_0,\ w)=\hat{x}\}$$
$$=\varphi(x_0,\ U^*)$$

$$\overset{e}{S}{}_j^{(x_0)}=\{\hat{x}\mid \exists u_0u_1\cdots u_{j-1},\ u_i\in U,\ 使\ \varphi(x_0,\ u_0u_1\cdots u_{j-1})=\hat{x}\}$$
$$=\varphi(x_0,\ U^j),$$

本文1984年12月15日收到

这里 U^j 表示卡的逊乘积 $\underbrace{U\times U\times\cdots\times U}_{j\text{个}}$,

$$S_k^{(x_0)}=\{\hat{x}\mid\exists u_0u_1\cdots u_{j-1},\ 0\leqslant j\leqslant k,\ u_i\in U,\ \text{使}\ \varphi(x_0,\ u_0u_1\cdots u_{j-1})=\hat{x}\}$$
$$=\overset{e}{S}{}_0^{(x_0)}\cup\overset{e}{S}{}_1^{(x_0)}\cup\cdots\cup\overset{e}{S}{}_k^{(x_0)}$$

性质 1 $S^{(x_0)}=\bigcup\limits_{j=0}^{\infty}\overset{e}{S}{}_j^{(x_0)}=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}S_k^{(x_0)}$, 而且

$$S_0^{(x_0)}\subset S_1^{(x_0)}\subset S_2^{(x_0)}\subset\cdots\subset S^{(x_0)}$$

证 从状态 x_0 通过 j 个输入值可达的每一个状态是一个从 x_0 可达的状态。因此 $S^{(x_0)}\supset\bigcup\limits_{j=0}^{\infty}\overset{e}{S}{}_j^{(x_0)}=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}S_k^{(x_0)}$. 反之，对于从状态 x_0 可达的每一个状态 $\hat{x}$，$\exists u_0u_1\cdots u_{j-1}\in U^*$ 使

$$\hat{x}=\varphi(x_0,\ u_0u_1\cdots u_{j-1})\in\overset{e}{S}{}_j^{(x_0)}$$

因此 $S^{(x_0)}\subset\bigcup\limits_{j=0}^{\infty}\overset{e}{S}{}_j^{(x_0)}=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}S_k^{(x_0)}$. 所以

$$S^{(x_0)}=\bigcup_{j=0}^{\infty}\overset{e}{S}{}_j^{(x_0)}=\bigcup_{k=0}^{\infty}S_k^{(x_0)}$$

包含关系 $S_0^{(x_0)}\subset S_1^{(x_0)}\subset S_2^{(x_0)}\subset\cdots\subset S^{(x_0)}$ 是显然的。

定理 2 设 x_0 是系统 Σ 的一个状态，如果存在整数 k，使 $S_k^{(x_0)}=S_{k+1}^{(x_0)}$，那么

$$S_k^{(x_0)}=S^{(x_0)}$$

证 先证 $\forall k'>k$，有 $S_{k'}^{(x_0)}=S_k^{(x_0)}$.

我们采用归纳法，当 $k'=k+1$ 时，根据已知条件，有

$$S_{k'}^{(x_0)}=S_{k+1}^{(x_0)}=S_k^{(x_0)}$$

现在假定对于 $k'=l(>k)$ 有

$$S_l^{(x_0)}=S_k^{(x_0)}$$

下证 $S_{l+1}^{(x_0)}=S_k^{(x_0)}$

首先，因为

$$S_{k+1}^{(x_0)}=S_k^{(x_0)}\cup\overset{e}{S}{}_{k+1}^{(x_0)}=S_k^{(x_0)}$$

我们得到

$$\overset{e}{S}{}_{k+1}^{(x_0)}\subset S_k^{(x_0)}\qquad(*)$$

其次，因为 Σ 是一个确定性系统，则 φ 满足相容性条件

$$\varphi(x_0,\ u_0u_1\cdots u_l)$$
$$=\varphi(x_0,\ (u_0u_1\cdots u_k)\ (u_{k+1}\cdots u_l))$$
$$=\varphi(\varphi(x_0,\ u_0u_1\cdots u_k),\ u_{k+1}\cdots u_l)$$

因此有 $$\begin{aligned}\overset{e}{S}{}_{l+1}^{(x_0)}&=\varphi(x_0,\ U^{l+1})\\&=\varphi(x_0,\ U^{k+1}U^{l-k})\\&=\varphi(\overset{e}{S}{}_{k+1}^{(x_0)},\ U^{l-k})\end{aligned}$$

考虑到 (*) 式，得知

$$\begin{aligned}\overset{e}{S}{}_{l+1}^{(x_0)}&=\varphi(\overset{e}{S}{}_{k+1}^{(x_0)},\ U^{l-k})\\&\subset\varphi(S_k^{(x_0)},\ U^{l-k})\\&\subset S_l^{(x_0)}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}S_{l+1}^{(x_0)}&=S_l^{(x_0)}\cup\overset{e}{S}{}_{l+1}^{(x_0)}\\&=S_l^{(x_0)}\\&=S_k^{(x_0)}\qquad\text{(由归纳法假定)}\end{aligned}$$

于是 $\forall k'>k$，有 $S_{k'}^{(x_0)}=S_k^{(x_0)}$. 根据明显成立的引理 3，得到

$$S^{(x_0)}=S_k^{(x_0)}$$

引理 3 如果存在整数 $k\in N$，使 $S_{k'}^{(x_0)}=S_k^{(x_0)}$，$\forall k'\geqslant k$，那么

$$S^{(x_0)}=\bigcup_{j=0}^{\infty}S_j^{(x_0)}=S_k^{(x_0)}$$

因为 $S_0^{(x_0)}\subset S_1^{(x_0)}\subset\cdots\subset S_k^{(x_0)}=S_{k+1}^{(x_0)}=\cdots$，这个引理是显然成立的。

下面考虑离散时间、时不变线性系统 $\Sigma=(F,G,H)$：

$$\begin{aligned}x(t+1)&=Fx(t)+Gu(t)\\y(t)&=Hx(t)\end{aligned}$$

这个系统的状态转移函数 φ：$X\times U^*\longrightarrow X$ 由下式确定

$$\begin{aligned}&\varphi(x_0,\ u_0u_1\cdots u_{k-1})\\&=F^kx_0+\sum_{j=0}^{k-1}F^{k-j-1}Gu_j,\qquad k>0,\end{aligned}$$

$\forall x_0\in X$，$u_0u_1\cdots u_{k-1}\in U^*$. 记 $S_k^{(0_X)}=S_k$，$\overset{e}{S}{}_k^{(0_X)}=\overset{e}{S}_k$，$S^{(0_X)}=S$.

引理 4 离散时间、时不变线性系统 (F,G,H) 的所有从零状态至多 k 步可达的状态的集合等于线性变换

$$[F^{k-1}G,\ F^{k-2}G,\cdots,G]:U^k\longrightarrow X$$

的值域.

证 注意到 $0_X=F0_X+G0_U$，有 $S_k=\overset{e}{S}_k$. 所以，$\forall \hat{x}\in S_k$，$\exists u_0u_1\cdots u_{k-1}\in U^k$，使 $\hat{x}=\varphi(0_X,\ u_0u_1\cdots u_{k-1})$。于是

$$S_k \ni \hat{x}=\varphi(0x,\ u_0u_1\cdots u_{k-1})$$
$$=F^{k-1}0x+\sum_{j=0}^{k-1}F^{k-j-1}Gu_j$$
$$=F^{k-1}Gu_0+F^{k-2}Gu_1+\cdots+Gu_{k-1}$$
$$=[F^{k-1}G,\ F^{k-2}G,\cdots,G]\begin{bmatrix}u_0\\u_1\\\vdots\\u_{k-1}\end{bmatrix}$$
$$\in R[F^{k-1}G,\ F^{k-2}G,\cdots,G]$$

由此可见

$$S_k=R[F^{k-1}G,\ F^{k-2}G,\cdots,G]$$

定理 5 如果离散时间、时不变线性系统(F,G,H)是n维的，那么每一个从零状态可达的状态至多n步可达，即

$$S_n=S$$

证 $\forall \bar{x},\ \tilde{x}\in S_k$，存在$u_0u_1\cdots u_{s-1}$及$v_0v_1\cdots v_{t-1}\in U^*$，$0\leqslant S,\ t\leqslant k$，使

$$\bar{x}=\varphi(0x,\ u_0u_1\cdots u_{s-1})$$
$$=\sum_{j=0}^{s-1}F^{s-j-1}Gu_j$$
$$\tilde{x}=\varphi(0x,\ v_0v_1\cdots v_{t-1})$$
$$=\sum_{j=0}^{t-1}F^{t-j-1}Gv_j$$

因为F，G为线性映射，则 F^iG，$i=1,2,\cdots$，全为线性映射。所以

$$\bar{x}+\tilde{x}=\sum_{j=0}^{s-1}F^{s-j-1}Gu_j+\sum_{j=0}^{t-1}F^{t-j-1}Gv_j$$
$$=\sum_{j=0}^{r-1}F^{r-j-1}Gw_j,\ \text{其中}\ r=\max\{s,t\},$$

$w_j\in U$.

因此 $\bar{x}+\tilde{x}\in S_k$. 其次，$\forall\lambda\in\Gamma$（Γ为向量空间X和U的共同系数域），

$$\lambda\bar{x}=\lambda\sum_{j=0}^{s-1}F^{s-j-1}Gu_j$$
$$=\sum_{j=0}^{s-1}F^{s-j-1}G(\lambda u_j)\in S_k$$

所以S_k是X的子空间。

考虑子空间序列

$$S_0\subset S_1\subset S_2\subset\cdots\subset S_{n-1}\subset S_n\subset\cdots\subset S$$

果如 $S_{n-1}=S_n$，则由定理 2

$$S=S_{n-1}=S_n$$

如果 $S_{n-1}\neq S_n$，则 $S_0\neq S_1$，$S_1\neq S_2,\cdots$，$S_{n-2}\neq S_{n-1}$. 因为，若对于某个 $1\leqslant j<n$，$S_{j-1}=S_j$，则必推出 $S_{n-1}=S_n$，矛盾. 因此

$$0=\dim S_0<\dim S_1<\dim S_2<\cdots<\dim S_n$$

由此可见

$$\dim S_n \geqslant n$$

另一方面 S_n 是 X 的子空间，有

$$\dim S_n \leqslant \dim X = n$$

所以

$$\dim S_n = n$$

因而 $S_n = X$，又因 $S_n \subset S \subset X$，故

$$S = S_n$$

系 6 n 維线性系统 (F, G, H) 从 0_X 可达，当且仅当

$$\operatorname{rank}[F^{n-1}G,\ F^{n-2}G,\ \cdots,\ G] = n$$

证： (F, G, H) 从 0_X 可达

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow\ X = S\\
&\Longleftrightarrow\ X = S_n \qquad \text{(由定理 2)}\\
&\Longleftrightarrow\ X = R[F^{n-1}G,\ F^{n-2}G, \cdots, G] \qquad \text{(由引理 4)}\\
&\Longleftrightarrow\ \dim R[F^{n-1}G,\ F^{n-2}G, \cdots, G] = n\\
&\Longleftrightarrow\ \operatorname{rank}[F^{n-1}G,\ F^{n-2}G, \cdots, G] = n
\end{aligned}$$

引理 7 设 $\dim X = n$，$F: X \to X$ 为任一线性变换，那么

$$R(F^n) \subset R(F^i),\quad \forall i \in N$$

$$R(F^n) = R(F^i),\qquad i \geqslant n$$

其中 $R(F^i) = F^i(X)$ 为线性变换 F^i 的值域。

证 设 $x \in R(F^{i+1})$，那么存在 $y \in X$，使

$$\begin{aligned}
x &= F^{i+1}(y)\\
&= F^i(Fy)\\
&\in F^i(X) = R(F^i)
\end{aligned}$$

所以 $R(F^{i+1}) \subset R(F^i)$，因此有子空间序列

$$\{0_X\} \subset \cdots \subset R(F^{i+1}) \subset R(F^i) \subset \cdots \subset R(F^2) \subset R(F) \subset R(F^0) = X$$

可见对于小于或等于 n 的 i，有

$$R(F^n) \subset R(F^i) \tag{1}$$

其次，如果所有的 $R(F^n)$，$R(F^{n-1}), \cdots, R(F)$，$R(F^0) = X$ 互不相等，则

$$\dim R(F^n) < \dim R(F^{n-1}) < \cdots < \dim X = n$$

此时，必有 $\dim R(F^n) = 0$，从而 $R(F^n) = \{0_X\}$。于是

$$\{0_X\} = R(F^n) = R(F^{n+1}) = \cdots\cdots$$

如果 $R(F^n), \cdots, R(F)$，$R(F^0) = X$ 中有相邻的两个相等，则令 i 是使

$$R(F^{i+1}) = R(F^i),\qquad n-1 \leqslant i \leqslant 0$$

的最大的一个指标，这时有

$$\begin{aligned} R(F^{i+2}) &= F^{i+2}(X) \\ &= F(F^{i+1}X) \\ &= F(F^{i}X) \\ &= F^{i+1}X \\ &= R(F^{i+1}) \\ &= R(F^{i}) \\ R(F^{i+3}) &= R(F^{i+2}) \\ &= R(F^{i}) \\ \cdots \quad \cdots & \quad \cdots \quad \cdots \end{aligned}$$

可见对所有的 $k\geqslant 1$，有

$$R(F^{i+k})=R(F^{i})$$

于是

$$R(F^{i})=R(F^{n})=R(F^{n+1})=\cdots\cdots$$

因此对 $i\geqslant n$ 恒有

$$R(F^{n})=R(F^{i}) \tag{2}$$

由(1)，(2)两式可见

$$R(F^{n})\subset R(F^{i}),\ \forall i\in N.$$

定理 8 n 維系统(F,G)：$x(t+1)=Fx(t)+Gu(t)$ 可控，当且仅当

$$R(F^{n})\subset R[F^{n-1}G,\ F^{n-2}G,\cdots,G].$$

证 当，设有

$$R(F^{n})\subset R[F^{n-1}G,\ F^{n-2}G,\cdots,G]$$

那么，$\forall x\in X$

$$\begin{aligned} F^{n}x &\in R(F^{n}) \\ &\subset R[F^{n-1}G,\ F^{n-2}G,\cdots,G] \end{aligned}$$

故存在 $u_0u_1\cdots u_{n-1}\in U^{*}$，使

$$\begin{aligned} F^{n}x &= [F^{n-1}G,\ F^{n-2}G,\ \cdots,\ G]\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} F^{n-j-1}Gu_j \end{aligned}$$

因此，有

$$\begin{aligned} &\varphi(x,\ (-u_0)(-u_1)\cdots(-u_{n-1})) \\ &= F^{n}x+\sum_{j=0}^{n-1}F^{n-j-1}G(-u_j) \\ &= F^{n}x-\sum_{j=0}^{n-1}F^{n-j-1}Gu_j \\ &= 0x \end{aligned}$$

这就是说，存在一个输入序列 $-u_0,\ -u_1,\cdots,-u_{n-1}$，使系统从状态 x 转变成零状态，

由 $x\in X$ 的任意性，知 (F,G) 是可控的。

仅当，设(F,G)是可控的，那么存在$k\in N$，使

$$R(F^k)\subset R[F^{k-1}G,\ F^{k-2}G,\cdots,G]$$

由引理 7，有

$$\begin{aligned} R(F^n)\subset R(F^k)&\subset R[F^{k-1}G,\cdots,G] \\ &=S_k \qquad\text{（由引理 4）} \\ &\subset S_n \qquad\text{（由定理 5）} \\ &=R[F^{n-1}G,\ F^{n-2}G,\cdots,G]. \end{aligned}$$

系 9　对于n維系统(F,G)，有

(i)　(F,G)可达$\Rightarrow(F,G)$可控

(ii)　(F,G)可控，且F可逆$\Rightarrow(F,G)$可达

证　(i) (F,G) 可达

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mathrm{rank}[F^{n-1}G,\cdots,G]=n \qquad\text{（由系 6）} \\ &\Rightarrow R[F^{n-1}G,\cdots,G]=X \\ &\Rightarrow R(F^n)\subset R[F^{n-1}G,\cdots,G] \\ &\Rightarrow (F,G)\ \text{可控} \qquad\text{（由定理 8）} \end{aligned}$$

(ii)　由于F是可逆的，这意味着F是一个双射，因此$R(F)=X$，从而$R(F^n)=X$，又因为(F,G)可控，那么由定理 8，有

$$R(F^n)\subset R[F^{n-1}G,\ F^{n-2}G,\cdots,G]$$

因此

$$X\subset R[F^{n-1}G,\ F^{n-2}G,\cdots,G]$$

从而

$$R[F^{n-1}G,\cdots,G]=X$$

$$\dim R[F^{n-1}G,\cdots,G]=n$$

即

$$\mathrm{rank}[F^{n-1}G,\cdots,G]=n$$

因系统(F,G)是n維的，那么由系 6，(F,G)是可达的。

系 10　如果F是幂零的，那么n維系统(F,G)：$x(t+1)=Fx(t)+Gu(t)$ 是可控的。

证　因F是幂零的，那么存在 $k\in N$，使 $F^k=0$，从而 $R(F^k)=0$。

由引理 7

$$R(F^n)\subset R(F^k)$$

因此，

$$R(F^n)=\{0_X\}\subset R[F^{n-1}G,\ F^{n-2}G,\cdots,G]$$

由定理 8，系统(F,G)是可控的。

例： 如图 1 所示 2 維系统，有方程

$$x(t+1)=\boldsymbol{F}x(t)+\boldsymbol{G}u(t),$$
$$y(t)=\boldsymbol{H}x(t)$$

中其 $$F=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}\quad G=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\quad H=[c,d]$$

考察矩阵

$$C=[FG,\ G]=\begin{bmatrix}\alpha a & a\\ \beta b & b\end{bmatrix}$$

注意到，当 $\alpha\neq0$，$\beta\neq0$ 时，F 是可逆的。

此时如果 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $\alpha=\beta$，则有

$$\det C=ab(\alpha-\beta)=0$$

$$\operatorname{rank} C\neq2.$$

因此，由系 6 此系统不可达，从而由系 9 (ii)，此系统不可控。

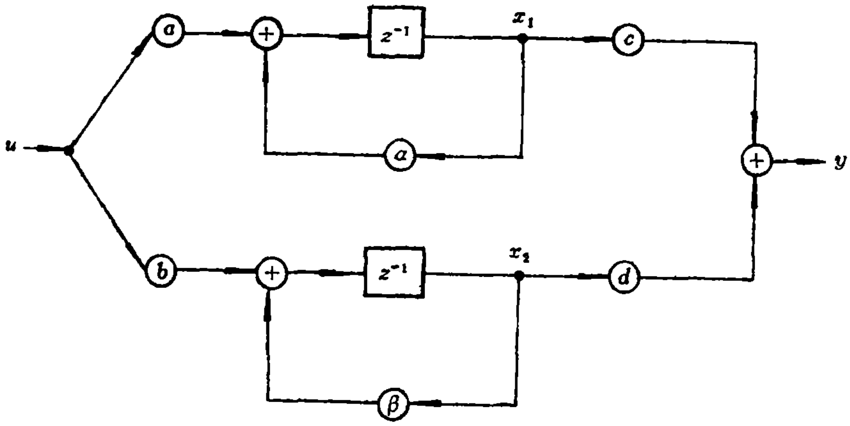

图 1

参 考 文 献

[1] Louis Padulo, Michael Arbib, System Theory, W.B.Saunders Company Philadelphia London Toronto, 1974.

Several Theorems of Reachability and Controllability for Discrete-Time and Time-Invariant Systems

Liu Liangzuo

Abstract

This article presents a systematic and rigorous proof of several lemmas, theorems and corollaries of reachability and controllability for discrete-time, time-invariant systems.