国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八五年第三期　总第五十一期　No. 3 1985　Sum. 51

椭圆型方程 Galerkin 方法的研究*

黄 允 忠

提　要　本文考察一类二阶椭圆型方程的 Galerkin 方法，首先，借助于 $(-\Delta)^{-1}$，将方法置于算子框架中，然后，应用算子方程的近似理论，研究了方法的收敛性，如同往常那样，有限元近似的误差估计是

$$\|u_0-u_h\|_{H^0(\Omega)}+h|u_0-u_h|_{H^1(\Omega)}\leqslant ch^{k+1}|u_0|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

同时，得到了 Aubin-Nitsche 技巧的一种易于应用的形式（定理 2）。文献[1]及[2]中的方法和文献[3]及[5]中的一些结果得到了推广。

一、引　　言

设 $R^n\supset\Omega$ 是一个多角形区域。

规定 $H^m=W^{m,2}(\Omega)$. 如所周知，H^m 中的范数与半范分别是

$$\forall v\in H^m,\ \|v\|_m=\left\{\int_\Omega\Sigma_{|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha v|^2dx\right\}^{1/2}$$

及

$$|v|_m=\left\{\int_\Omega\Sigma_{|\alpha|=m}|D^\alpha v|^2dx\right\}^{1/2}.$$

在 $H^0=L_2(\Omega)$ 中，分别以 $(\cdot,\cdot)$ 及 $\|\cdot\|$ 记作內积与范数，即

$$\forall f,g\in H^0,\ (f,g)=\int_\Omega fgdx$$

及

$$\|g\|=(g,g)^{1/2}$$

在 $H_0^1=\{v|\ v\in H^1;\ v|_{\partial\Omega}=0\}$ 中，由 Friedrich 不等式，我们可取半范 $|\cdot|_1$ 作为等价范数，相应的內积是

$$\forall u,v\in H_0^1,\ (u,v)_1=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla vdx.$$

并且因此，在 $H^{-1}=(H_0^1)'$ 中的范数可定义为

* 原文曾在1982年4月北京中法有限元讨论会上散发，在此发表前作了修改。

本文1985年8月5日收到

$$\forall q\in H^{-1},\ \|q\|_{-1}=\sup_{v\in H_0^1,\ v\neq 0}\frac{|\langle q,v\rangle|}{|v|_1},$$

此处，$\langle\cdot,\cdot\rangle$是$H^{-1}\times H_0^1$到$R$内的一个双线性映射。

现在，考虑如下的抽象变分问题：寻找$u\in H_0^1$使

$$\forall v\in H_0^1,\ (Lu,v)=(Fu,v), \tag{1}$$

此处，L是一个线性二阶椭圆型偏微分算子的主部，而Fu是满足如下条件的变元x，$y=u$及$z_i=\partial_i u$的通常函数：

$$\forall v\in H_0^1,\ Fv\in H^{-1}. \tag{2}$$

于是，所谓 Calerkin 方法在此便是：在H_0^1的k-Lagrange 有限元子空间$S^{k,h}$中寻求u_h使

$$\forall v_h\in S^{k,h},\ (Lu_h,\ v_h)=(Fu_h,\ v_h). \tag{3}$$

A.H.Schatz ([5]) 和李荣华 ([3]) 在Fu关于y和z_i为线性的情形讨论了这个方法，而本文则不要求Fu的线性性质，在[1]中，林群先生曾如下定义了算子A：$v=Au$当且仅当

$$\forall \varphi\in H_0^1,\ (v,\varphi)_1=(-\Sigma_1^3 u_i\partial_i u+g,\varphi).$$

事实上，$Au=K(-\Sigma_1^3 u_i\partial_i u+g)$，此处$K=(-\Delta)^{-1}$是$H^{-1}$到$H_0^1$上的等矩同构，利用算子$K$，不仅能够方便地建立起 Calerkin 方法的算子框架，而且也利于问题的讨论。

二、算 子 框 架

我们从 Calerkin 方法的算子框架开始，让我们约定，同一个字母c表示不同的正常数。

假定双线性型(Lu,v)是正定的，幷且是連续的，即

$$\forall u\in H_0^1,\ c_1|u|_1^2\leqslant(Lu,u), \tag{4}$$

此处，c_1与u无关，幷且

$$\forall u,v\in H_0^1,\ |(Lu,v)|\leqslant c_2|u|_1|v|_1, \tag{5}$$

此处c_2与u，v无关，那么存在可逆算子τ使

$$\forall u,v\in H_0^1,\ (Lu,v)=(\tau u,v)_1, \tag{6}$$

幷且τ^{-1}是連续的（参阅文献[3]）. 由K的意义，成立

$$\forall u,v\in H_0^1,\ (Fu,v)=(KFu,v)_1 \tag{7}$$

因而，方程(1)可以改写为算子方程

$$u\in H_0^1,\ u=Tu\quad (T=\tau^{-1}KF). \tag{8}$$

同样可以引入算子$\tau_h\in\mathscr{L}(S^{k,h},\ S^{k,h})$：

$$\forall u_h,v_h\in S^{k,h},\ (Lu_h,\ v_h)=(\tau_h u_h,\ v_h)_1. \tag{9}$$

幷且τ_h^{-1}存在及$\in\mathscr{L}(S^{k,h},\ S^{k,h})$。这样，方程(3)就等价于算子方程

$$u_h\in S^{k,h},\ u_h=Q_hTu_h\quad (Q_h=\tau_h^{-1}P_h\tau), \tag{10}$$

此处，P_h是H_0^1到$S^{k,h}$上的 Riesz 投影，即

$$P_h^2=P_h \tag{11}$$

并且

$$\forall u,v\in H_0^1,\ (P_h u,v)_1=(u,P_h v)_1. \tag{12}$$

容易证明在 $S^{k,h}$ 中,

$$\tau_h=P_h\tau. \tag{13}$$

事实上，由(6)式我们有

$$\begin{aligned}\forall u_h,v_h\in S^{k,h},\ (Lu_h,v_h)&=(\tau u_h,v_h)_1\\&=(\tau u_h,P_h v_h)_1=(P_h\tau u_h,v_h)_1,\end{aligned}$$

结合(9)式，成立

$$\forall u_h,v_h\in S^{k,h},\ (\tau_h u_h,v_h)_1=(P_h\tau u_h,v_h)_1,$$

上式给出(13)式。

引理 1 $Q_h=\tau_h^{-1}P_h\tau$ 是 H_0^1 到 $S^{k,h}$ 上的一个线性投影，即

$$Q_h^2=Q_h \tag{14}$$

并且

$$Q_h H_0^1=S^{k,h}. \tag{15}$$

其证明可由(13)式得到。从此看出，方程(10)正是方程(8)的 Calerkin 近似。

三、收敛性， H^1 - 估计

定理 1 假定方程(8)存在孤立解 u_0，并设 F 是全連续的（作为 H_0^1 到 H^{-1} 内的算子）。如果 F 在 u_0 連续 Fréchet 可微，那么，对于充分小的 h，方程(10)在 u_0 的邻近有唯一解 u_h，而且 u_h 满足

$$|u_0-u_h|_1\leqslant c\,|Q^{(h)}u_0|_1, \tag{16}$$

此处，c 与 h 无关，$Q^{(h)}=I-Q_h$.

证: 首先证明 Q_h 在 H_0^1 中是一致有界的，并且当 $h\to 0$ 时 Q_h 强斂于 I.

由(4)、(5)两式，成立

$$\forall u_h\in S^{k,h},\ c_1|u_h|_1^2\leqslant(Lu_h,\ u_h)=(\tau_h u_h,\ u_h)_1\leqslant|\tau_h u_h|_1|u_h|_1,$$

或者，$\|\tau_h\|_{\mathscr{L}(S^{k,h},\,S^{k,h})}\geqslant c_1$，因而連同 τ_h^{-1} 一起，$Q_h=\tau_h^{-1}P_h\tau$ 是一致有界的。紧接着，由 P_h 强斂于 I 可得有关 Q_h 的第二个论断，事实上，(13)式推出 $Q^{(h)}P_h=0$，故

$$Q^{(h)}=Q^{(h)}P^{(h)}+Q^{(h)}P_h=Q^{(h)}P^{(h)},$$

此处，$P^{(h)}=I-P_h$，由于已经得 Q_h 的一致有界性，从而連同 P_h 一起，Q_h 强斂于 I.

由以上所证，本定理的所有断言可直接从文献[4]中定理19.7直接推出。

推论 如果 $u_0\in H^{k+1}$，那末对于充分小的 h,

$$|u_0-u_h|_1\leqslant ch^k|u|_{k+1}, \tag{17}$$

此处，c 与 h 无关。

证: 设 π_h 是 H_0^1 到 $S^{k,h}$ 上的插值算子，并且记 $\pi^{(h)}=I-\pi_h$，由(16)式得

$$\begin{aligned}|u_0-u_h|_1&\leqslant c|Q^{(h)}u_0|_1\leqslant c|Q^{(h)}P^{(h)}u_0|_1\\&\leqslant c|P^{(h)}u_0|_1\leqslant c|\pi^{(h)}u_0|_1\leqslant ch^k|u_0|_{k+1},\end{aligned}$$

此处，c 与 h 无关，上面最后一个不等式来之于插值不等式。

四、H^0－估计

在本段中，假定双线性型 (Lu,v) 还是对称的，即

$$\forall u,v\in H_0^1,\ (Lu,v)=(u,Lv). \tag{18}$$

不失一般性，设$L=-\Delta$，那末，易见$\tau=\tau_h=I$，$Q_h=P_h$，而方程(10)化为更简洁的形式：

$$u_h\in S^{k,h},\ u_h=P_hTu_h. \tag{10'}$$

定理 2 假定定理 1 中的诸条件成立，设 $F'(u_0)\in\mathscr{L}(H^0,H^{-1})$．如果在$u_0$的邻近存在一致有界的二阶 Fréchet 导算子$F''(u)$，那么对充分小的 h，成立

$$\|u_0\|\leqslant ch^{k+1}|u_0|_{k+1}. \tag{19}$$

此处，c 与 h 无关。

证：证明主要依赖于下述的

引理 2 （林群，1980）如果 $u\in H^{k+1}\cap H_0^1$，那么，对充分小 h

$$\|P^{(h)}u\|\leqslant ch^{k+1}|u|_{k+1}, \tag{20}$$

此处，c 与 h 无关。

证：由正则性引理，成立

$$\forall g\in H^0,\ Kg\in H^2\cap H_0^1, \tag{21}$$

并且

$$\|Kg\|_2\leqslant c\|g\|, \tag{22}$$

此处，c 与g 无关，既然 $H^0\subset H^{-1}$，故

$$\begin{aligned}\forall g\in H^0,\ |(P^{(h)}u,g)|&=|(P^{(h)}u,Kg)_1|\\&=|(P^{(h)}u,P^{(h)}Kg)_1|\leqslant|P^{(h)}u|_1|P^{(h)}Kg|_1\\&\leqslant ch^k|u|_{k+1}\cdot ch|Kg|_2\leqslant ch^{k+1}|u|_{k+1}\|g\|,\end{aligned}$$

此处，c 与g、h 无关，或等价地，(20)式成立。

现在来证明定理，记

$$\mathscr{K}_h=Tu_h-Tu_0-T'(u_0)(u_h-u_0).$$

由定理的条件，可设$F''(u)$在某球$B_\rho=\{v|v\in H_0^1;\ |v-u_0|_1\leqslant\rho，\rho$是某一正常数$\}$内是一致有界的。由定理 1 的推论知，当 h 充分小时 u_h 落入B_ρ中，于是

$$\begin{aligned}\|P_h\mathscr{K}_h\|&\leqslant c|P_h\mathscr{K}_h|_1\leqslant c|\mathscr{K}_h|_1\\&\leqslant c\sup_{u\in B_\rho}\|T''(u)\|_{\mathscr{L}(H_0^1\times H_0^1,\ H_0^1)}|u_h-u_0|_1^2\\&\leqslant ch^{2k}|u_0|_{k+1},\end{aligned} \tag{23}$$

其中，c 与 h 无关。容易验证

$$[I-P_hT'(u_0)](u_0-u_h)=P^{(h)}u_0-P_h\mathscr{K}_h,$$

联系引理 2 及(23)式，便得

$$\|[I-P_hT'(u_0)](u_0-u_h)\|\leqslant\|P^{(h)}u_0\|+\|P_h\mathscr{K}_h\|$$
$$\leqslant ch^{k+1}|u_0|_{k+1},$$

此处，c 与 h 无关。为了得到定理，剩下只须证明：当 h 充分小时，$I-P_hT'(u_0)$ 在 H^0 中是可逆的，并且其逆一致有界。

事实上，设 $f\in H^0$，使得 $f=T'(u_0)f$，那么由于 $T'(u_0)=\tau^{-1}KF'(u_0)$ 是 H^0 到 H_0^1 中的算子，所以 $f\in H_0^1$，但是 $I-T'(u_0)$ 在 H_0^1 中可逆，故 f 只能是 0，因此 $I-T'(u_0)$ 如同在 H_0^1 中那样在 H^0 中亦是可逆的；另一方面，由嵌入引理知 $T'(u_0)$ 在 H^0 中是全連续算子，结果，$[I-T'(u_0)]^{-1}$ 在 H^0 中存在且有界。现在，

$$I-P_hT'(u_0)=I-T'(u_0)+P^{(h)}T'(u_0).$$

而当 h 充分小时，$P^{(h)}T'(u_0)$ 在 H^0 中是小算子，事实上

$$\forall g\in H^0,\ \|P^{(h)}T'(u_0)g\|\leqslant ch|T'(u_0)g|_1\leqslant ch\|g\|,$$

此处，c 与 h、g 无关，这意味着上述断言成立，由此知算子 $I-P_hT'(u_0)$ 可逆，并且其逆一致有界。

证完。

五、应　　用

在本段中，我们将举例说明定理 2 的应用，为简短起见，对于所述例子就不一一去验证它们与定理 1 的相容性了。

例 1　设 $u_0\in H^{k+1}\cap H_0^1$ 是如下方程的一个解：

$$\sum_{i,j}{}_1^n\partial_i(-a_{ij}\partial_ju)=\Sigma_1^n b_i\partial_iu+b_0u+f, \tag{24}$$

此处，a_{ij}，$b_i\in c^1(\Omega)$，$b_0\in c^0(\Omega)$，$f\in H^0$，并且双线性型 $\sum_{i,j}{}_1^n a_{ij}\xi_i\xi_j$ 是正定的。

由 Fredholm 二择一原理，u_0 是方程(24)的唯一解。

记　$Fu=\Sigma_1^n b_i\partial_iu+b_0u+f$. 那末，

$$\forall g\in H^0\ 及\ \forall v\in H_0^1,\ |\langle F'(u_0)g,v\rangle|$$
$$=|\langle\Sigma_1^n b_i\partial_ig+b_0g,\ v\rangle|$$
$$=|\langle-\Sigma_1^n g\partial_ib_i+b_0g,v\rangle-\Sigma_1^n\langle b_ig,\ \partial_iv\rangle|$$
$$\leqslant c\|g\|\,|v|_1,$$

此处，c 与 g、v 无关，或等价地，$\|F'(u_0)g\|_{-1}\leqslant c\|g\|$. 这蕴含了 $F'(u_0)\in\mathscr{L}(H_0,H^{-1})$，结合 $F''(u)=0$，便知定理 2 有效。

注 1　由这个例子，可以看出，至少在线性場合中，定理 2 与 Aubin-Nitsche 技巧等效。

例 2　设 $\Omega\in R^3$，并且 $u^*\in(H^2)^3$ 是下列变分问题的孤立解：寻求 $u\in(H_0^1)^3$，使得

$$\forall v\in(H_0^1)^3,\ (u,v)_1=(-\Sigma_1^3u_i\partial_iu+f,v), \tag{25}$$

此处，$u=(u_1,u_2,u_3)$，$f=(f_1,f_2,f_3)\in(H^0)^3$，并且內积为

$$(u,v)=\sum_{i,j}{}_1^3\int_\Omega\partial_ju_i\partial_jv_idx,$$

$$(f,\ g)=\Sigma_1^3\int_\Omega f_i g_i dx.$$

由嵌入引理，成立 $\|u^*\|_{L\infty(\Omega)}\leqslant c\|u^*\|_2$. 记 $Fu=-\Sigma_1^3 u_i\partial_i u+f$，那末，

$$\forall g\in(H^0)^3 \text{ 及 } \forall v\in(H_0^1)^3,\ |\langle F'(u^*)g,v\rangle|$$
$$=|\langle-\Sigma_1^3(u_i^*\partial_i g+g_i\partial_i u_i^*),\ v\rangle|$$
$$=|\Sigma_1^3\langle g\partial_i u_i^*-\partial_i(gu^*)-g_i\partial_i u^*,\ v\rangle|$$
$$\leqslant c\|u^*\|_2\|g\||v|_1,$$

此处，c 与 g 、v 无关，或等价地，$\|F'(u^*)g\|_{-1}\leqslant c\|g\|$，这表明 $F'(u^*)\in\mathscr{L}(H^0,H^{-1})$，联系 $F''(u)=0$，便知定理 2 有效。

注 2　此例曾在文献[1]中被讨论过，在那里是用 Aubin-Nitche 技巧得到 H^0－估计。

最后，我们考虑两点边值问题

$$\begin{cases}-u''=f(x,u,u'),\quad x\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=0,\end{cases}\tag{26}$$

此处，$f=f(x,\ y,\ z)$ 为二阶连续可微的通常函数，且其二阶偏导数在 R^3 内是一致有界的。

假定 $u_0\in H^2$ 是问题(26)的孤立解，由嵌入引理，$u_0\in c^1[0,1]$，并且

$$\forall v\in H^1,\ \|v\|_{L\infty(0,1)}\leqslant c|v|_1,$$

此处，c 与 v 无关，记 $Fu=f(x,u,u')$，则

$$\forall g\in H^0 \text{ 及 } \forall v\in H_0^1,\ |\langle F'(u_0)g,v\rangle|$$
$$=|\langle f_y(x,u_0,u_0')g+f_z(x,u_0,u_0')g',v\rangle|$$
$$=|\langle f_y(x,u_0,u_0')g,v\rangle-\langle[f_z(x,u_0,u_0')v]',g\rangle|$$
$$=|\langle f_y(x,u_0,u_0')-f_{xz}(x,u_0,u_0')-f_{yz}(x,u_0,u_0')u_0'$$
$$-f_{zz}(x,u_0,u_0')u_0'',\ vg\rangle-\langle f_z(x,u_0,u_0')v',\ g\rangle|$$
$$\leqslant|\langle f_y(x,u_0,u_0')-f_{xz}(x,u_0,u_0')-f_{yz}(x,u_0,u_0')u_0',\ vg\rangle|$$
$$+|\langle f_{zz}(x,u_0,u_0')v,u_0''g\rangle|+|\langle f_z(x,u_0,u_0'),v'g\rangle|$$
$$\leqslant c\|v\|\|g\|+c\|v\|_{L\infty(0,1)}\|u_0\|_2\|g\|+c|v|_1\|g\|$$
$$\leqslant c\|g\||v|_1,$$

此处，c 与 g 、v 无关，由此得 $\|F'(u_0)g\|_{-1}\leqslant c\|g\|$，即 $F'(u_0)\in\mathscr{L}(H^0,\ H^{-1})$. 另一方面，对于 H_0^1 中的任一个固定的球 B，有

$$\forall u\in B \text{ 及 } \forall v_1、v_2、w\in H_0^1,\ |\langle F''(u)v_1v_2,w\rangle|$$
$$=|\langle f_{yy}(x,u,u')v_1v_2+f_{yz}(x,u,u')v_1v_2'$$
$$+f_{yz}(x,u,u')v_1'v_2+f_{zz}(x,u,u')v_1'u_2',\ w\rangle|$$
$$\leqslant c|v_1|_1|v_2|_1|w|_1,$$

此处，c 与 v_1、v_2、w 无关，或 $F''(u)$ 是一致有界的，结果，定理 2 有效。

注 3　企图验证上述问题的共轭变分问题的正则性，似乎比较困难，而应用定理 2 来得到 H^0－估计则比较容易。

参 考 文 献

[1] 林群，算子方程近似解的一些问题，数学学报，第 3 期，1979.
[2] 林群，加速收敛，在浙江大学的讲学，1980.
[3] 李荣华，Galerkin 方法收敛阶的估计，计算数学，第一期，1980.
[4] M.A.Krasnoselskii et al. Approximate solution of operator equations, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen 1972.
[5] A.H.Schatz, An Observation Conserning Ritz-Galerkin Methods with Infinite Bilinear Form, Math. Com. Vol. 28(1974).

A Researh on the Galerkin Method of Elliptic Equations

Huang Yunzhong

Abstract

In this paper, the Galerkin method for solving a class of homogeneous Dirichlet problems of the second-order elliptic equation is put into the operator scheme by verture of $(-\Delta)^{-1}$. I study the convergence of the method. The error estimates of the finite elemenl and a form wich is applied more conveniently in some cases than the Aubin-Nitche technique are obtained.