国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八五年第三期　总第五十一期　　No.3 1985 Sum. 51

Fuzzy 环的直和

姜华彪

提　要　自 A.Rosenfeld 1971年提出 Fuzzy 群的概念以来，Fuzzy 代数有了较大的发展，发表了很多有关这方面的论文。本文作为这方面的继续，考虑了 Fuzzy 环的直和，得到了环的直和环上的 Fuzzy 环可表现为各个环上的 Fuzzy 子环的直和的充要条件。最后指出了对 t-Fuzzy 环也可以进行类似的讨论。

一、预备知识

定义 1.1　设R是环，μ是R的一个 Fuzzy 子集，如果满足下面的条件，则称μ是R的 Fuzzy 子环：

(1)　$\forall x,y\in R$，$\mu(x\cdot y)\geqslant\mu(x)\wedge\mu(y)$；

(2)　$\forall x,y\in R$，$\mu(x+y)\geqslant\mu(x)\wedge\mu(y)$；

(3)　$\forall x\in R$，$\mu(x)=\mu(-x)$。

推论　若μ是R的一个 Fuzzy 子环，则 $\forall x\in R$

$\mu(x)\leqslant\mu(0)$。

定理 1.1　设R是环，μ是R的 Fuzzy 子集，则下列条件等价：

(1)　μ是R的一个 Fuzzy 子环；

(2)　$\forall x,y\in R$，$\mu(x\cdot y)\geqslant\mu(x)\wedge\mu(y)$，

$\mu(x-y)\geqslant\mu(x)\wedge\mu(y)$；

(3)　$\forall x,y\in R$，$\min\{\mu(x\cdot y),\ \mu(x-y)\}\geqslant\mu(x)\wedge\mu(y)$

定义 1.2　设μ是环R的 Fuzzy 子环，μ称为R的Fuzzy 左（右）理想，如果$\forall x,y\in R$，$\mu(x\cdot y)\geqslant\mu(y)\,(\mu(x))$.若$\mu$既是 Fuzzy 左理想，又是 Fuzzy 右理想，则称μ是R的双边 Fuzzy 理想。简称为 Fuzzy 理想。

注：上面这些定义和结果均可从文献[2]中找到。

本文1985年4月25日收到

二、Fuzzy 环的直和

为简单起见，本文只对两个环的直和进行讨论，对任意有限多个环的情况，完全可以类似进行。在本节中若无特别声明，R_1 和R_2 均指环。

定义 2.1　设X，Y是两个集合，μ_1，μ_2分别是X，Y上的Fuzzy子集。定义$X\times Y$上的Fuzzy子集μ：$\forall(x,y)\in X\times Y$，$\mu(x,y)=\mu_1(x)\wedge\mu_2(y)$，我们称$\mu$为$\mu_1$与$\mu_2$的直积，记为$\mu=\mu_1\otimes\mu_2$。

定理 2.1　设R_1,R_2是两个环，μ_1,μ_2分别是R_1,R_2的Fuzzy子环，则μ_1与μ_2的直积是直和环$R_1\oplus R_2$上的Fuzzy子环，称之为μ_1与μ_2的直和Fuzzy子环，为统一起见记$\mu=\mu_1\oplus\mu_2$。

证明：　$\forall x,y\in R_1\oplus R_2$，设$x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$　则

$$\begin{aligned}\mu(x\cdot y)&=\mu(x_1\cdot y_1,x_2\cdot y_2)=\mu_1(x_1\cdot y_1)\wedge\mu_2(x_2\cdot y_2)\\&\geqslant\mu_1(x_1)\wedge\mu_1(y_1)\wedge\mu_2(x_2)\wedge\mu_2(y_2)\\&=\mu_1(x_1)\wedge\mu_2(x_2)\wedge\mu_1(y_1)\wedge\mu_2(y_2)\\&=\mu(x_1,x_2)\wedge\mu(y_1,y_2)=\mu(x)\wedge\mu(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(x-y)&=\mu(x_1-y_1,x_2-y_2)=\mu_1(x_1-y_1)\wedge\mu_2(x_2-y_2)\\&\geqslant\mu_1(x_1)\wedge\mu_1(y_1)\wedge\mu_2(x_2)\wedge\mu_2(y_2)=\mu(x)\wedge\mu(y)\end{aligned}$$

由定理1.1可知μ是$R_1\oplus R_2$的Fuzzy子环。　　Q.E.D.

定理 2.2　若μ_1，μ_2分别是环R_1,R_2的Fuzzy（左，右）理想，则$\mu=\mu_1\oplus\mu_2$也是$R_1\oplus R_2$的Fuzzy（左，右）理想。

证明：　由定理2.1可知μ是$R_1\oplus R_2$的Fuzzy子环。

所以若μ_1，μ_2分别是R_1,R_2的Fuzzy左理想，则只须证明$\forall x,y\in R_1\oplus R_2$，$\mu(x\cdot y)\geqslant\mu(y)$即可。

事实上：设$x=(x_1,\ x_2)$，$y=(y_1,y_2)$

$$\begin{aligned}\mu(x\cdot y)&=\mu(x_1\cdot y_1,\ x_2\cdot y_2)=\mu_1(x_1\cdot y_1)\wedge\mu_2(x_2\cdot y_2)\\&\geqslant\mu_1(y_1)\wedge\mu_2(y_2)=\mu(y)\end{aligned}$$

所以μ是$R_1\oplus R_2$的Fuzzy左理想。

同理可证Fuzzy（右）理想的情况。　　Q.E.D.

反过来，人们很自然会问：若μ是$R_1\oplus R_2$的Fuzzy子环或理想，是否存在R_1,R_2中的Fuzzy子环或理想，使得$\mu=\mu_1\oplus\mu_2$呢？答案一般来说是不成立的(反例见下面)，还需要有其它一些条件。下面我们就来研究这个问题。

反例　设$Z_3=\{\bar0,\bar1,\bar2\}$是3的同余类环，考虑$Z_3\oplus Z_3$上的Fuzzy子环$\mu$：

$$\mu(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)=(\bar0,\bar0),\\0.8 & (x,y)\in\{(\bar1,\bar1),(\bar2,\bar2)\},\\0.5 & \text{其它}\end{cases}$$

容易验证μ是$Z_3\oplus Z_3$上的Fuzzy子环，但又不能表为Z_3上的两个Fuzzy子环的直和。

设μ是$R_1\oplus R_2$上的Fuzzy子集，令$\mu_1(x)=\bigvee\limits_{y\in R_2}\mu(x,y)$，$\mu_2(y)=\bigvee\limits_{x\in R_1}\mu(x,y)$，$\forall x\in R_1$，$y\in R_2$，则$\mu_1$，$\mu_2$分别是$R_1,R_2$的Fuzzy子集，分别称之为$\mu$在$R_1,R_2$上的投影。

而$\forall x\in R_1$，$y\in R_2$，$\mu_1'(x)=\mu(x,0)$，$\mu_2'(y)=\mu(0,y)$，也分别是R_1,R_2的Fuzzy子集。仿照概率论中的边际分布，称μ_1'，μ_2'为μ的边际Fuzzy子集。

引理 X是任一集合，$f(x)$是X上的函数，α是任一给定的实常数，则
$\alpha\wedge(\bigwedge\limits_{x\in X}\sup f(x))=\sup\limits_{x\in X}(\alpha\wedge f(x))$。

证明 本引理是关于Zadeh算子的分配律，故证明从略。 Q.E.D.

定理 2.3 设R_1,R_2都是环，μ是$R_1\oplus R_2$上的Fuzzy子环，则μ在R_1与R_2上的投影μ_1，μ_2分别是R_1与R_2上的Fuzzy子环。

证明 仅就μ_1来证，μ_2的情况类似。

$$\begin{aligned}\forall x_1,x_2\in R_1,\quad \mu_1(x_1\cdot x_2)&=\bigvee_{y\in R_2}\mu(x_1\cdot x_2,y)\\
&\geqslant\bigvee_{y_1,y_2\in R_2}\mu(x_1\cdot x_2,y_1\cdot y_2)\\
&=\bigvee_{y_1\in R_2}\bigvee_{y_2\in R_2}\mu((x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2))\\
&\geqslant\bigvee_{y_1\in R_2}\bigvee_{y_2\in R_2}[\mu(x_1,y_1)\wedge\mu(x_2,y_2)]\\
&=[\bigvee_{y_1\in R_1}\mu(x_1,y_1)]\wedge[\bigvee_{y_2\in R_2}\mu(x_2,y_2)]\quad\text{（由引理）}\\
&=\mu_1(x_1)\wedge\mu_1(x_2)\end{aligned}$$

所以 $\qquad\mu_1(x_1\cdot x_2)\geqslant\mu_1(x_1)\wedge\mu_1(x_2)$.

同样可证 $\qquad\mu_1(x_1-x_2)\geqslant\mu_1(x_1)\wedge\mu_1(x_2)$.

由定理1.1可知$\mu_1(x)$是R_1的Fuzzy子环。 Q.E.D.

定理 2.4 设R_1,R_2是环，μ是$R_1\oplus R_2$的Fuzzy（左，右）理想，则μ在R_1,R_2上的投影μ_1,μ_2也都是R_1,R_2上的Fuzzy（左，右）理想。

证明 由定理2.3可知，μ_1，μ_2分别是R_1,R_2的Fuzzy子环。若μ是$R_1\oplus R_2$的Fuzzy理想，则只须证明：$\forall x_1,x_2\in R_i$，$\mu_i(x_1\cdot x_2)\geqslant\max\{\mu_i(x_1),\mu_i(x_2)\}$ $i=1,2$即可。

事实上：

$$\begin{aligned}\forall x_1,x_2\in R_1,\quad \mu_1(x_1\cdot x_2)&=\bigvee_{y\in R_2}\mu(x_1\cdot x_2,y)\\
&\geqslant\bigvee_{y_1,y_2\in R_2}\mu(x_1\cdot x_2,y_1\cdot y_2)=\bigvee_{y_1,y_2\in R_2}\mu((x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2))\\
&\geqslant\bigvee_{y_1,y_2\in R_2}[\mu(x_1,y_1)\vee\mu(x_2,y_2)]\end{aligned}$$

$$=[\bigvee_{y_1\in R_2}\mu(x_1,y_1)]\vee[\bigvee_{y_1\in R_2}\mu(x_2,y_2)]$$

$$=\mu_1(x_1)\vee\mu_1(x_2)$$

故 μ_1 是 R_1 的 Fuzzy 理想。

同理可证 μ_2 是 R_2 的 Fuzzy 理想和 Fuzzy 左，右理想的情况。 Q.E.D.

定理 2.5 若 μ 是 $R_1\oplus R_2$ 的 Fuzzy 子环（理想），则 μ 的边际 Fuzzy 子集 μ_1'，μ_2' 也分别是 R_1,R_2 的 Fuzzy 子环（理想）。

证明 若 μ 是 $R_1\oplus R_2$ 的 Fuzzy 子环，$\forall x_1,x_2\in R_1$，$\mu_1'(x_1\cdot x_2)=\mu(x_1\cdot x_2,0)$

$$=\mu(x_1\cdot x_2,0\cdot 0)\geqslant\mu(x_1,0)\wedge\mu(x_2,0)$$

$$=\mu_1'(x_1)\wedge\mu_1'(x_2)$$

$$\mu_1'(x_1-x_2)=\mu(x_1-x_2,0)=\mu(x_1-x_2,0-0)$$

$$\geqslant\mu(x_1,0)\wedge\mu(x_2,0)=\mu_1'(x_1)\wedge\mu_1'(x_2)$$

由此可知 μ_1' 是 R_1 的 Fuzzy 子环，

同理可证 μ_2' 是 R_2 的 Fuzzy 子环。

若 μ 是 $R_1\oplus R_2$ 的 Fuzzy 理想，只须证明 $\forall x_1,x_2\in R_i$，$\mu_i'(x_1\cdot x_2)\geqslant\mu_i'(x_1)\vee\mu_i'(x_2)$ $i=1,2$ 即可。

事实上：$\forall x_1,x_2\in R_1$，$\mu_1'(x_1\cdot x_2)=\mu(x_1\cdot x_2,0)=\mu(x_1\cdot x_2,0\cdot 0)$

$$\geqslant\mu(x_1,0)\vee\mu(x_2,0)=\mu_1'(x_1)\vee\mu_1'(x_2)。$$

所以 μ_1' 是 R_1 的 Fuzzy 理想。

同理可证 μ_2' 是 R_2 的 Fuzzy 理想。 Q.E.D.

引理 设 R_1,R_2 是环，μ 是 $R_1\oplus R_2$ 的 Fuzzy 子环（理想），μ_1',μ_2' 和 μ_1,μ_2 分别是 μ 的边际 Fuzzy 子集和在 R_1,R_2 上的投影，则 $\mu_1'\oplus\mu_2'\subseteq\mu\subseteq\mu_1\oplus\mu_2$.

证明 $\forall x\in R_1$，$y\in R_2,\mu_1'(x)=\mu(x,0)$，$\mu_2'(y)=\mu(0,y)$

所以 $$\mu(x,y)=\mu[(x,0)+(0,y)]\geqslant\mu(x,0)\wedge\mu(0,y)$$

$$=\mu_1'(x)\wedge\mu_2'(y)=(\mu_1'\oplus\mu_2')(x,y)$$

由 x,y 的任意性可知 $\mu_1'\oplus\mu_2'\subseteq\mu$. 又因为 $\forall x\in R_1,y\in R_2$

$$\mu_1(x)=\bigvee_{y\in R_2}\mu(x,y)\geqslant\mu(x,y)$$

$$\mu_2(y)=\bigvee_{x\in R_1}\mu(x,y)\geqslant\mu(x,y)$$

所以 $$\mu(x,y)\leqslant\mu_1(x)\wedge\mu_2(y)=(\mu_1\oplus\mu_2)(x,y)$$

因此 $$\mu\subseteq\mu_1\oplus\mu_2$$

由此可知 $$\mu_1'\oplus\mu_2'\subseteq\mu\subseteq\mu_1\oplus\mu_2$$ Q.E.D.

定理 2.6 设 μ 是 $R_1\oplus R_2$ 的一个 Fuzzy 子环（理想），则 μ 可分解成为 R_1 和 R_2 上的两个 Fuzzy 子环（理想）的直和的充要条件是 $\mu_1\oplus\mu_2=\mu_1'\oplus\mu_2'$.

证明 充分性由引理可知结论成立。

必要性： 设 $\mu=\mu_1''\oplus\mu_2''$，μ_1''，μ_2'' 分别是 R_1，R_2 上的 Fuzzy 子环（理想），则有

$$\mu_i''(x)\leqslant\mu_i''(0)\quad\forall x\in R_i$$

所以
$$\bigvee_{x\in R_i}\mu_i''(x)=\mu_i''(0),\qquad i=1,2$$

故
$$\begin{aligned}\mu_1'(x)&=\mu(x,0)=(\mu_1''\oplus\mu_2'')(x,0)\\&=\mu_1''(x)\wedge\mu_2''(0)=\mu_1''(x)\wedge[\bigvee_{y\in R_2}\mu_2''(y)]\\&=\bigvee_{y\in R_2}[\mu_1''(x)\wedge\mu_2''(y)]=\bigvee_{y\in R_2}\mu(x,y)=\mu_1(x)\end{aligned}$$

因此
$$\mu_1'(x)=\mu_1(x)\quad(\forall x\in R_1)$$

即
$$\mu_1'=\mu_1$$

同理可证
$$\mu_2'=\mu_2$$

因此
$$\mu_1'\oplus\mu_2'=\mu_1\oplus\mu_2\qquad\text{Q.E.D.}$$

三、t-Fuzzy 子 环 的 直 和

在(二)中对 Zadeh 算子的 Fuzzy 环的直和结构进行了研究，本节将从 T-模算子的角度来考虑，本节中若沒有给出而又要用到的概念均可从文献 [1-2] 中找到。本节中的结论都不证明，因为证明与前一节中相应命题的证明方法类似。

定义 3.1 设 R 是环，μ 是 R 的 Fuzzy 子集，如果满足下列条件，则称 μ 是关于 t-模 T 的 Fuzzy 子环：

(1) $\mu(x\cdot y)\geqslant T(\mu(x),\mu(y))\qquad \forall x,y\in R$

(2) $\mu(x+y)\geqslant T(\mu(x),\mu(y))\qquad \forall x,y\in R$

(3) $\mu(-x)=\mu(x)\qquad \forall x\in R$

(4) $\mu(0)=1\qquad$ 0 是 R 的零元。

定义 3.2 设 μ_1,μ_2 分别是环 R_1,R_2 的 Fuzzy 子集，在 $R_1\oplus R_2$ 上定义的Fuzzy集 μ：

$$\forall\,(x,y)\in R_1\oplus R_2\quad \mu(x,y)=T(\mu_1(x),\mu_2(y))$$

则称 μ 为 μ_1，μ_2 关于 T 的直和，简记为 $\mu=\mu_1\oplus_T\mu_2$.

定理 3.1 若 μ_1，μ_2 分别是 R_1,R_2 的 t-Fuzzy 子环，则 $\mu=\mu_1\oplus_T\mu_2$ 也是 $R_1\oplus R_2$ 的 t-Fuzzy 子环。

定理 3.2 设 μ_1,μ_2 分别是 $R_1\oplus R_2$ 的 Fuzzy 左（右）理想，则 $\mu=\mu_1\oplus_T\mu_2$ 也是 $R_1\oplus R_2$ 的 Fuzzy左（右）理想。

引理 $\forall X\subset I=[0,1]$，T 是連续的三角模，则 $\forall\alpha\in I$ 有 $\sup\limits_{x\in X}T(\alpha,x)=T(\alpha,\sup\limits_{x\in X}x)$

定理 3.3 设 R_1,R_2 是环，μ 是 $R_1\oplus R_2$ 上的 t-Fuzzy 子环，T 是連续的 t-模，则 μ 在 R_1,R_2 上的投影 μ_1,μ_2 分别是 R_1,R_2 上的 t-Fuzzy 子环。

定理 3.4 若 μ 是直和环 $R_1\oplus R_2$ 上的 t-Fuzzy 子环，T 是連续的t-模，μ_1',μ_2' 分别是 μ 在R_1，R_2 上的边际 Fuzzy 子集，则 μ_1',μ_2' 也分别是 R_1,R_2 的 t-Fuzzy 子环。

定理 3.5 设T 是連续的 t-模，且 $\forall\alpha\in[0,1]$，$T(\alpha,\alpha)\geqslant\alpha$，$\mu$ 是 $R_1\oplus R_2$ 的

t-Fuzzy 子环，则μ可表为R_1和R_2上的两个 t-Fuzzy 子环关于t-模T的直和的充要条件是$\mu_1'\oplus_T\mu_2'=\mu_1\oplus_T\mu_2$. 此处 μ_1,μ_2 是 μ 在 R_1,R_2 上的投影，μ_1'，μ_2'是 μ 的边际 Fuzzy 子环。

作者得到导师汪浩教授和王华兴老师的指导和关怀，本文是在他们指导下完成的，在此表示衷心的感谢。

本文在1985年 4 月于桂林召开的“全国首届 Fuzzy 代数讨论会”上报告过。

参 考 文 献

[1] M.T.Abu Osman, On the Direct Product of Fuzzy Subgroups, Fuzzy Sets and System, 12(1984) 87—91.

[2] Salvatore Sessa, On Fuzzy Subgroups and Fuzzy Ideals undev Triangulav Norm, ibid, 13(1984) 95—100.

[3] A. Rosenfeld, Fuzzy Groups, J. Math Anal Appl, 35(1971) 512—517.

[4] C.V.尼古塔，D.A.拉莱斯库，模糊集在系统分析中的应用，汪浩，沙钰译，湖南科技出版社，1980.

The Direct Sum of Fuzzy Rings

Jiang Huabiao

Abstract

Many papers about Fuzzy algebra have been published since A. Rosenfeld presented the concept of Fuzzy subgroups in 1971. As further work in this respect, we study the direct sum of Fuzzy subrings in this paper, introduce the concepts of projective Fuzzy sets and marginal Fuzzy sets of direct sum rings, and abtain a necessary and sufficient condition that a Fuzzy subring on the direct sum of rings may be represented by the direct sum of Fuzzy subrings on each ring. Finally, a similar discussion of t-Fuzzy subrings is suggested.