

# 推广的卡尔曼滤波用于 对运动辐射源的测时差被动定位

孟 阳 石 昱

**摘 要** 本文讨论了以测时差法从地面对空中匀速运动辐射源进行无源定位与跟踪的问题,并运用推广的卡尔曼滤波算法进行数据处理以提高定位与跟踪的精度,研究了滤波器初始条件的确定方法及对滤波器的敛散性进行自动监测的方法,还介绍了用计算机对系统进行模拟的过程,并对部分模拟结果进行了初步的分析。分析与模拟的结果表明,推广的卡尔曼滤波方法应用于测时差无源跟踪系统是行之有效的。

在现代战争中,由于导弹及飞机技术的发展,使得进攻的快速性、突然性大大增加,为了能给我方以较长的反应时间来采取克敌措施,在远距离上定出敌方运动辐射源的位置并实时进行跟踪和识别,是十分必要的。无源定位技术,具有定位精度高,跟踪距离远等优点,许多国家都十分重视,它是现代防御体系不可缺少的部分。

本文试图对一个从地面对空中目标进行测时差无源定位与跟踪的系统作一些探讨,研究推广的卡尔曼滤波算法在数据处理方面的应用以提高定位与跟踪的精度。

## 一、定位与跟踪的体制及数据处理算法的选择

利用测时差法实现对空中目标的单脉冲定位,至少需要四个侦察站,其中一个为主站,其余三个为副站。每一个副站与主站协同,可以测得目标辐射信号到达这两站时形成的时间差,其所对应的距离差在空间确定了一个双叶双曲面,这样,我们共可获得三个双叶双曲面,它们在空间相交出若干公共交点,其中必有一点对应于目标的位置,其余虚假点可以设法剔除。这就是本系统对目标定位的原理。

为了提高定位的精度,并对运动辐射源作实时跟踪,采用卡尔曼滤波算法对侦察站的测量结果进行统计处理。这种算法较之其它方法有不少优点,如适应能力强,能处理系统误差,跟踪精度高等。

## 二、推广卡尔曼滤波算法的建立

### 1. 站的布局与坐标系的选择

采用空间三维直角坐标系,坐标原点选在主站处,四个站的坐标分别为 $(x_i, y_i, z_i)$

( $i=0,1,2,3$ ), 相对关系如图 1 所示, 其中  $T(x, y, z)$  是目标位置,  $d_i (i=1,2,3)$  是各副站到主站的距离,  $r_i (i=0,1,2,3)$  是目标到各站的斜距。

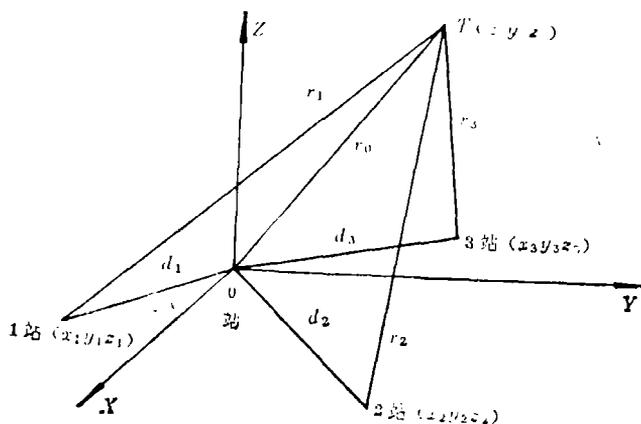


图 1

## 2. 目标动力学方程的建立

假设目标在空间作匀速运动, 为了准确描述其状态, 选取  $k$  时刻目标的三个位置坐标  $x(k)$ 、 $y(k)$  和  $z(k)$  及其在三个坐标轴方向上的速度  $\dot{x}(k)$ 、 $\dot{y}(k)$  和  $\dot{z}(k)$  为状态变量, 即系统的状态矢量为

$$S(k) = [x(k) \dot{x}(k) y(k) \dot{y}(k) z(k) \dot{z}(k)]^T \quad (1)$$

若取测量间隔时间为  $T$ , 则在一阶近似的前提下, 可写出目标的动力学方程如下:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ \dot{x}(k+1) \\ y(k+1) \\ \dot{y}(k+1) \\ z(k+1) \\ \dot{z}(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ \dot{x}(k) \\ y(k) \\ \dot{y}(k) \\ z(k) \\ \dot{z}(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ n_x(k) \\ 0 \\ n_y(k) \\ 0 \\ n_z(k) \end{pmatrix}$$

简记为

$$S(k+1) = \Phi \cdot S(k) + n(k) \quad (2)$$

式中  $n_x(k)$ 、 $n_y(k)$ 、 $n_z(k)$  为由于阵风或发动机短时间内推力不规则等因素而产生的目标的随机速度所带来的动态速度噪声。

## 3. 测量方程的建立

参见图 1, 目标到各站的距离为

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \quad (i=0,1,2,3)$$

副站与主站测得的时差为

$$\Delta t_i = (r_0 - r_i) / c \quad (i=1,2,3)$$

式中  $c$  为光速。令

$$\delta'_i = \Delta t_i \cdot c = r_0 - r_i \quad (i=1,2,3)$$

即距离差为等效测量量，则系统的测量方程可写为

$$\delta_1 = (r_0 - r_1) + U_1 \triangle f_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) + U_1$$

$$\delta_2 = (r_0 - r_2) + U_2 \triangle f_2(x, y, z, x_2, y_2, z_2) + U_2$$

$$\delta_3 = (r_0 - r_3) + U_3 \triangle f_3(x, y, z, x_3, y_3, z_3) + U_3$$

式中  $U = [U_1 U_2 U_3]^T$  是测量过程中的加性噪声。上式可简记为

$$\delta(k) = F(k) + U(k) \quad (3)$$

这就是测量方程，它是非线性的。因此在应用卡尔曼滤波方程组时，需要对它线性化。

#### 4. 动态噪声方差阵和测量误差方差阵

假设  $n_x(k)$ 、 $n_y(k)$ 、 $n_z(k)$  是零均值的，方差各为  $\sigma_x^2$ 、 $\sigma_y^2$ 、 $\sigma_z^2$ ，且互不相关，即有

$$Q(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

造成测量误差的主要因素是测距离差误差和侦察站的站址误差，设这两者互不相关，并设测距离差误差是零均值的、方差均为  $\sigma^2$ ，且相关系数为  $\rho$ ；设站址误差亦为零均值，方差均为  $\sigma^2$  且互不相关，即有

$$R(k) = \begin{bmatrix} b_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33}^2 \end{bmatrix} \sigma^2 + \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{bmatrix} \sigma^2 \quad (5)$$

#### 5. 初始状态矢量的近似解法

设目标初始位置为  $(x(o), y(o), z(o)) = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ ，则原则上它们可由下式解出：

$$\delta_i = \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2} - \sqrt{(\hat{x} - x_i)^2 + (\hat{y} - y_i)^2 + (\hat{z} - z_i)^2} \quad i=1,2,3。$$

但这是一个多元高次方程组，具有多解性，求解过程极为繁琐，且难以排除虚假解，故不宜使用。这里我们采用一种简单的解法（在一定的假设条件下）。

假设四个站位于同一平面即  $XOY$  平面，则  $z_i = 0$  ( $i=1,2,3$ )，则代入上式得到一个关于  $\hat{x}, \hat{y}, r_0$  的三元一次方程组：

$$\begin{cases} x_1 \cdot \hat{x} + y_1 \cdot \hat{y} - \delta_1 \cdot r_0 = V_1 \\ x_2 \cdot \hat{x} + y_2 \cdot \hat{y} - \delta_2 \cdot r_0 = V_2 \\ x_3 \cdot \hat{x} + y_3 \cdot \hat{y} - \delta_3 \cdot r_0 = V_3 \end{cases}$$

$$\text{其中, } V_i = \frac{1}{2} (d_i^2 - \delta_i^2) \quad (i=1,2,3) \quad d_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \quad (i=1,2,3)$$

由克莱姆法则知：

$$\dot{x} = \frac{D_x}{D}, \quad \dot{y} = \frac{D_y}{D}, \quad r_0 = \frac{D_z}{D} \quad (D \neq 0) \quad (6)$$

而  $\dot{z}$  可由  $r_0$  的表达式求出:

$$\dot{z} = \sqrt{r_0^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2} \quad (7)$$

故由(2-6)和(2-7)两式我们便可解出  $(x(0), y(0), z(0))$ , 同理我们还可以解出  $(x(1), y(1), z(1))$ 。因此通过求差商, 便可近似求得目标的初始速度:

$$\begin{cases} \dot{x}(1) = \frac{x(1) - x(0)}{T} \\ \dot{y}(1) = \frac{y(1) - y(0)}{T} \\ \dot{z}(1) = \frac{z(1) - z(0)}{T} \end{cases} \quad (8)$$

这样, 通过在  $k=0, 1$  两个时刻的测量, 我们便可获得目标状态的初始估值为

$$S(1) = [x(1) \dot{x}(1) y(1) \dot{y}(1) z(1) \dot{z}(1)]^T$$

理论分析和计算机模拟的结果都表明, 用上述方法解得的目标位置的初始估值是真解。

### 6. 初始估值误差协方差矩阵的确定

在系统模拟时发现, 初始估值误差协方差矩阵  $P(1/1)$  是一个关键参数, 它直接影响了滤波器的收敛速度和估值精度, 因此如何求出  $P(1/1)$  是一项重要的工作。

一种常用的方法是利用  $S(1)$ , 在马尔柯夫估计的意义下求出  $P(1/1)$ , 即

$$P(1/1) = (H^T(1) \cdot R(1) \cdot H(1))^{-1}$$

其中

$$H(1) = \left. \frac{\partial F(k)}{\partial S(k)} \right|_{S(k)=S(1)}$$

但上式只适用于测量矢量维数不小于状态矢量维数的情况, 否则  $(H^T \cdot R \cdot H)$  为一退化矩阵, 不能求逆。在本系统里即属这种情况, 为解决这一问题, 可在  $(H^T \cdot R \cdot H)$  矩阵的对角线元素上加一个很小的正数  $\epsilon$ , 即令

$$P(1/1) = [\epsilon \cdot I + H^T \cdot R \cdot H]^{-1} \quad (9)$$

这种方法简单易行, 但开始滤波时精度较差, 需要经过较长时间滤波, 估值的精度才能提高。

$\epsilon$  的选取是非常重要的, 它制约着  $P(1/1)$ , 从而影响滤波的收敛速度和精度,  $\epsilon$  的选取没有现成的方法, 我们通过大量的计算机模拟, 得出在本系统中适用的一个确定  $\epsilon$  值的经验公式。

在系统模拟中发现, 使用上述方法确定  $P(1/1)$  时, 滤波器的收敛仍然较慢, 精度也不够理想, 每次试验时,  $P(k/k)$  中描述定位精度的元素总是由小到大, 再由大到小, 存在着一个极大值。而这个极大值出现得越晚, 则收敛越慢, 精度越差。虽然调试  $\epsilon$  值

可使该极大值较早出现,但仍不令人满意。为此,我们采用了另一种确定  $P(1/1)$  的方法,即所谓经验指定法。

这种方法可分为两步进行。首先在滤波过程中,把出现上述极大值的  $k$  时刻或其附近时刻所对应的  $P(k/k)$  作为  $P(1/1)$ ,重新试验;然后,根据状态矢量中各元素的收敛情况调整  $P(1/1)$  中相应行的对角线上的元素,直到满意为止。

上述  $P(1/1)$  的指定虽然是在一个特定的试验条件下进行的,但它一经确定后,即可适用于广泛的试验条件,因此这种方法是简单且行之有效的,这已为大量的计算机模拟所证明。

### 7. 推广的卡尔曼滤波递推方程组

前面已经确定了系统的动力学方程和测量方程,有关的误差协方差矩阵及初始条件,故可利用一整套的EKF方程组了,它们是:

- 预测估值:

$$S(k+1/k) = \Phi \cdot S(k/k)$$

- 预测误差协方差阵:

$$P(k+1/k) = \Phi \cdot P(k/k) \Phi^T + Q(k)$$

- 最佳增益矩阵:

$$K(k+1) = P(k+1/k) H^T(k+1) \cdot [H(k+1) \cdot P(k+1/k) \cdot H^T(k+1) + R(k)]^{-1}$$

- 滤波估值:

$$S(k+1/k+1) = S(k+1/k) + K(k+1) \cdot [\delta(k) - F(S(k+1/k))]$$

- 滤波误差协方差矩阵:

$$P(k+1/k+1) = [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot P(k+1/k)$$

$$\text{其中 } H(k+1) = \left. \begin{array}{l} \frac{\partial F(k+1)}{\partial S(k+1)} \\ S(k+1) = S(k+1/k) \end{array} \right\}$$

### 8. 跟踪与定位精度的描述方法

我们这里采用GDOP来描述定位精度,它是对目标在三个坐标轴方向上的位置估计误差的方差之和的平方根,即

$$\text{GDOP} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} \quad (10)$$

显然,它是一个统计量,它与目标-侦察站的相对几何关系有关,还与测量误差的方差有关。它是作为一个误差概率球的半径来描述定位精度的,实际的目标位置估值以一定概率落入到此球中(球心即为目标的真实位置)。

### 9. 滤波器散性的自动检测

由于本系统是以匀速运动的辐射源为定位目标的,故当遇到目标机动时,滤波器将发散,还有其它因素可能导致滤波器的发散。因此及时判别滤波器是否发散,是滤波器必不可少的一项任务。

因为新息

$$\nu(k+1) = \delta(k+1) - F(k+1) \quad (11)$$

具有一定的统计特性，故我们可以利用此统计特性来判断滤波器的敛散性。

根据参考资料[5]介绍的滤波器敛散性自动检测方法，本系统在设置判别统计量  $B_{k,N}$  时，取  $N=1$ 。若在滤波过程中  $B_{k,1}$  连续三次超过门限，则判为发散。

### 三、系统模拟的说明

#### 1. 系统模拟的流程图

如图 2 所示：

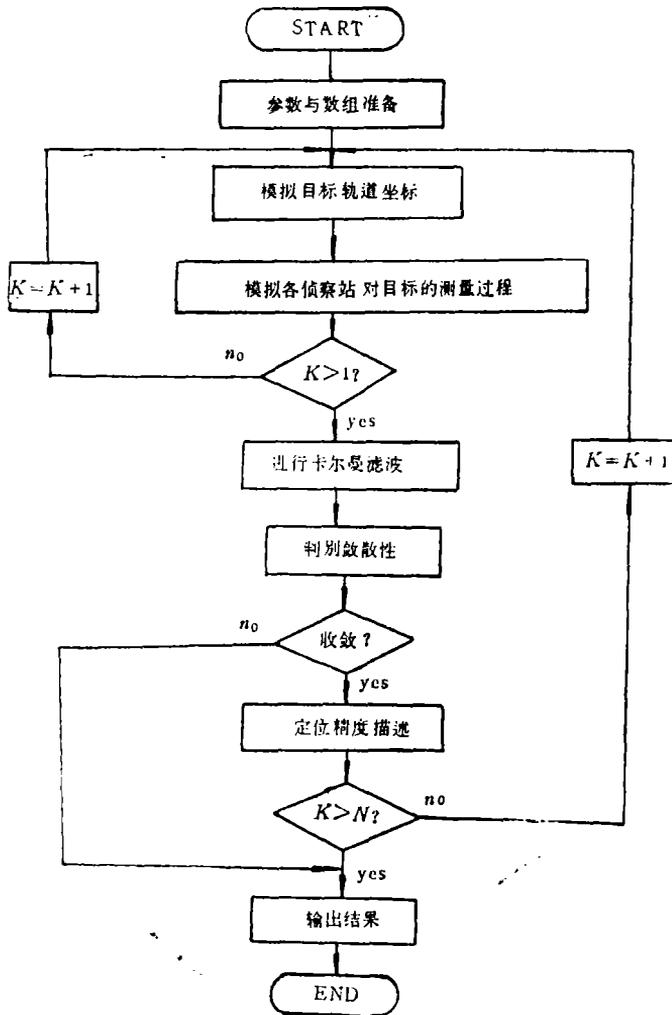


图 2

#### 2. 模拟时的假设条件

本系统在模拟时假设：

1. 目标辐射源作匀速直线运动。

2. 在计算  $Q(k)$  矩阵时, 设

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \sigma_0^2$$

3. 测量噪声是高斯白噪声。

4. 每对站在测目标的距离差时, 其测量误差具有相同的方差。

### 3. 关于初始速度估计的一点说明

在第2章第5节中介绍的求目标的初始速度估计的方法, 有时会使初始速度估计的误差很大, 因之会引起滤波器不收敛。为解决这一问题, 我们采用了当出现上述情况时, 把目标的初始速度人为地置为一个合理值的办法。具体作法是, 若解出的初始速度估计大于  $1\text{km/s}$  (或小于  $-1\text{km/s}$ ) 时, 强制它 (们) 为  $0.5\text{km/s}$  (或  $-0.5\text{km/s}$ )。这种方法在道理上是讲得通的, 使用的结果也是令人满意的。

## 四、部分计算机模拟结果及其分析

### 1. 基本试验参数及目标运动轨道

在以下的分析中, 若无特别申明, 有关试验参数取值如下:

- 侦察站位置:  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, L, 0)$ ,  $(L, 0, 0)$ ,  $(L, L, 0)$ , 其中  $L = 20\text{km}$ 。
- 测量时间间隔  $T = 5\text{s}$ 。
- 随机加速度噪声的均方根  $\sigma_0 = 7\text{m/s}^2$ 。
- 站址误差均方根  $\sigma_s = 10\text{m}$ 。
- 测距离差误差均方根  $\sigma = 30\text{m}$ 。
- 相关系数  $\rho = 0.5$ 。

模拟了两条目标运动轨道, 它们是:

I. 位置:  $(180, 100, 8) \rightarrow (133, 53, 8)$  (km)

速度:  $V_x = -300\text{m/s}$ ,  $V_y = -300\text{m/s}$ ,  $V_z = 0$ 。

II. 位置:  $(280, 200, 8) \rightarrow (233, 153, 8)$  (km)

速度: 同 I。

### 2. 滤波过程示例

附图1所示为一个正常滤波过程中, GDOP和位置估值误差 ERROR (即目标位置的估计点与其真实点之间的距离) 随滤波时间  $k$  变化的曲线。由图可见, GDOP随  $k$  而平稳地减小, ERROR则在GDOP的上下波动, 而其趋势也是逐步减小的。当滤波进行到  $k=15$  次时,  $\text{GDOP} < 5\text{km}$ , 这时目标距侦察站斜距为  $170\text{km}$  左右。

### 3. $P(1/1)$ 的确定与滤波器的性能

附图2和附图3是用式(2-9)确定  $P(1/1)$  时对应不同  $\varepsilon$  值的两次滤波结果。由图易见,  $\varepsilon$  的取值对滤波结果影响很大。在附图2中,  $\varepsilon = 10^{-5}$ , GDOP出现极大值的时间要早一些, 但精度较差, 在附图3中,  $\varepsilon = 10^{-4}$ , 情况相反。GDOP之所以都有一个上升的过程, 是因为由此法确定的  $P(1/1)$  与真实的  $P(1/1)$  相差较大之故, 在滤波进行一段时间后,  $P(k/k)$  矩阵逐渐趋于合理, 于是GDOP开始减小。

若采用经验指定法确定  $P(1/1)$ , 则可避免附图2、3中出现的情况, 附图1所示即为一例。

#### 4. 速度估计误差及其与位置估计误差的关系

附图4所示为 $x$ 的估计误差与 $V_x$ 的估计误差的变化规律。由图可见,两个误差的变化是相伴随的。只有当速度误差减小时,位置误差才能减小。这是因为当速度误差较大时,显然下一次的位置预测值可能偏离真实位置更远,从而引起位置误差大;反之,当速度估计误差减小时,预测的位置误差也必须减小,从而滤波后的位置误差也就减小了。

#### 5. 测距离差误差对定位精度的影响

附图5是当 $\sigma = 50\text{m}$ 时的滤波曲线图,把它与当 $\sigma = 30\text{m}$ 时(其余参数皆相同)的滤波曲线相比较可见,GDOP和ERROR的变化规律是相同的,但滤波的精度明显不同: $\sigma = 50\text{m}$ 时,定位精度比 $\sigma = 30\text{m}$ 时下降了4km左右。显然,测距离差误差是影响滤波精度的主要因素。

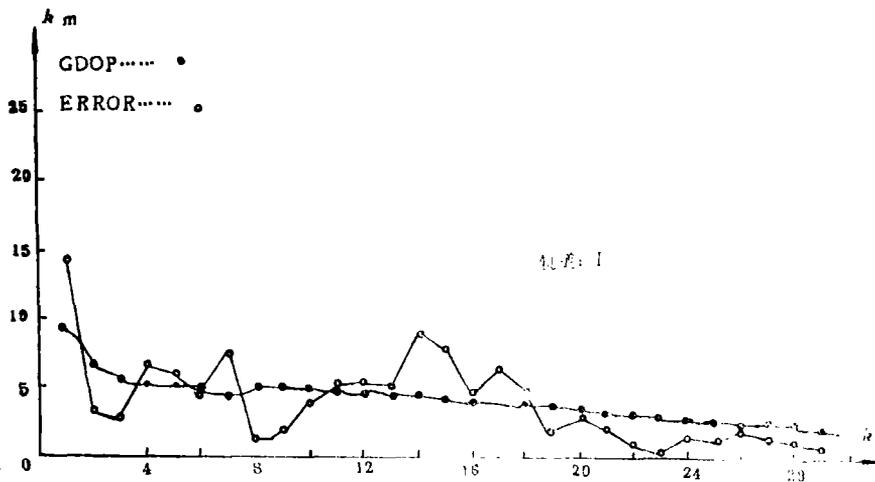
#### 6. 滤波器敛散性自动判别的试验

为对滤波器的敛散性进行判别,设立了统计量 $B_{k,1}$ ,并由一定的 $\alpha$ 值建立了判别门限 $\lambda_a^2$ 。

附图6所示为滤波器正常工作(收敛情形)时 $B_{k,1}$ 的变化情况以及门限值,由图可见 $B_{k,1}$ 超过门限只发生了一次,确是小概率事件。在另一次滤波器为发散的试验中, $B_{k,1}$ 在 $k=14$ 以后便连续超过门限且不断增大,由于在程序中设定若 $B_{k,1}$ 连续三次超过门限便判定为发散,所以滤波器可在 $k=17$ 时刻停止工作并说明滤波器现在发散,以便调整滤波器的工作状态。

### 五、几点结论及存在的问题

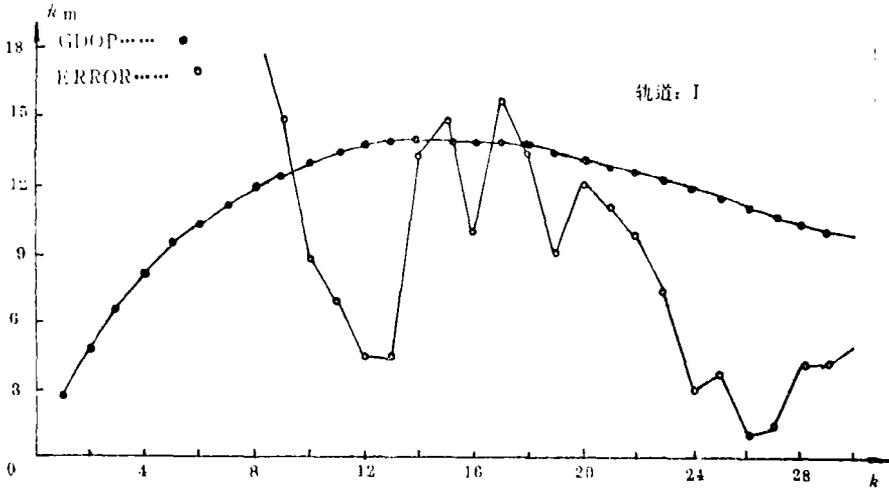
- 本系统的定位精度还是比较高的。在滤波起始距离为400多公里时,位置误差仍可收敛到10km以下,且定位精度有进一步提高的潜力。
- 当侦察站的布局一定时,决定定位精度的主要因素是测距离差误差及起始滤波距



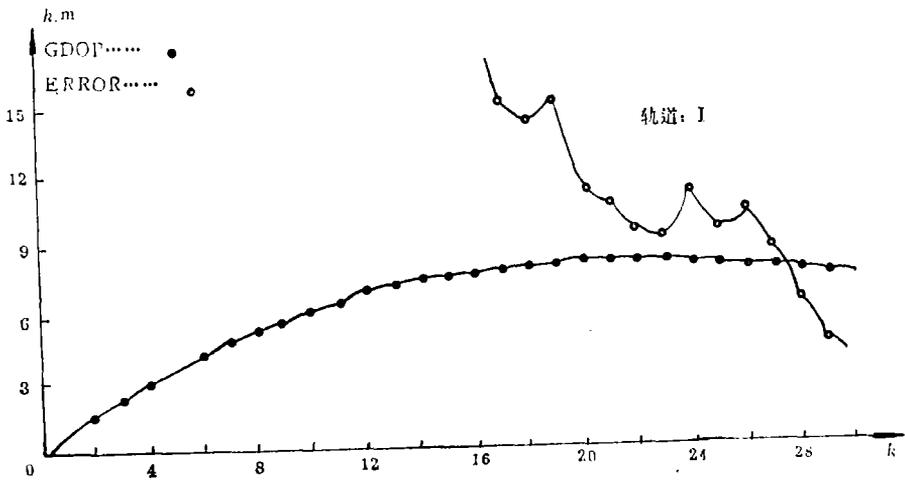
附图 1

离。

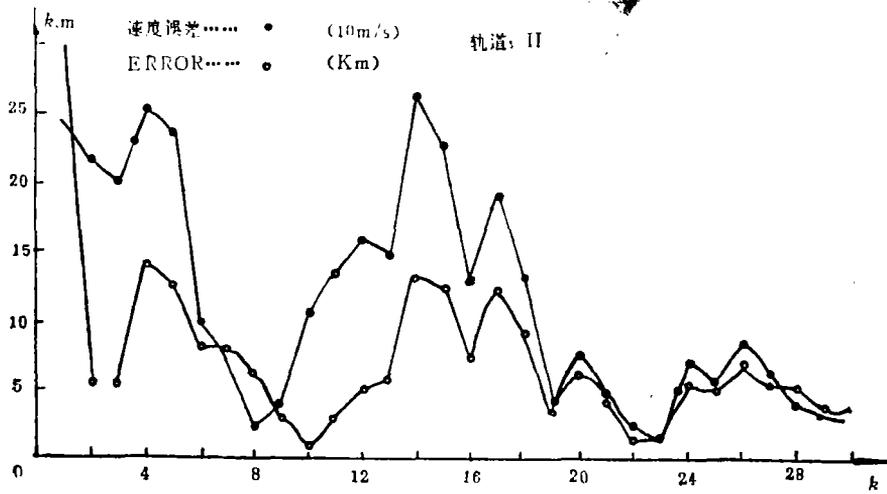
- 用经验指定法来确定  $P(1/1)$  是行之有效的。
- $S(1)$  的近似解法和初始速度的强制方法都是可行的。
- 本系统对于变速运动的目标及机动目标将丢失跟踪。
- 对定位误差的描写采用了 GDOP，描写不够细致。



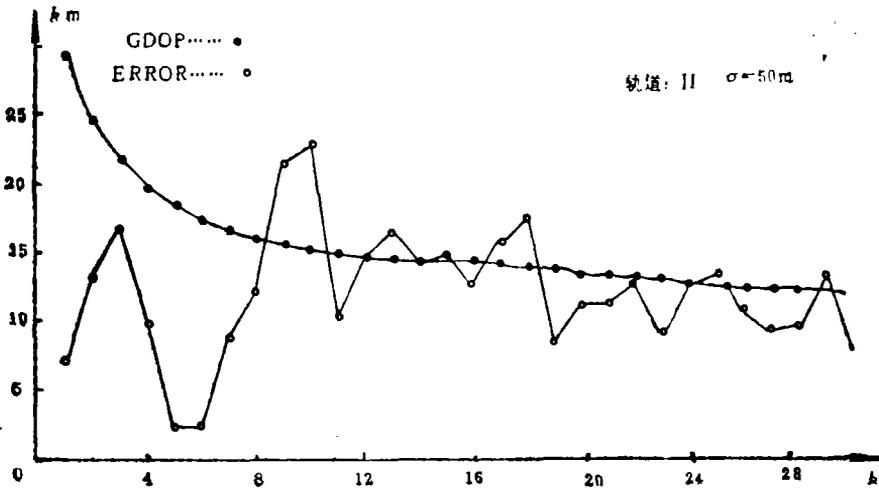
附图 2



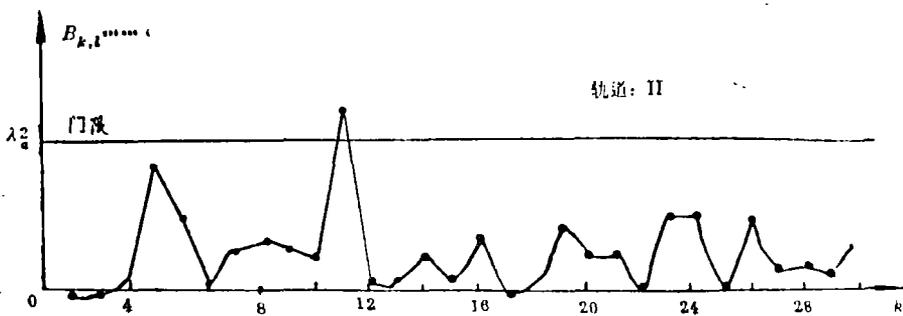
附图 8



附图 4



附图 5



附图 6

## 参 考 文 献

- [1] 孙仲康, 定位与制导, 国防科技大学, 1978年。
- [2] 许树生, 统计信号处理, 国防工业出版社, 1985年。
- [3] 沈振康, 最佳估计讲义, 国防科技大学, 1978年。
- [4] 孙仲康, 雷达数据数字处理, 国防工业出版社, 1983年。
- [5] 张金槐, 卡尔曼滤波发散性的统计识别及自适应技术, 国防科技大学学报, 1980年第一期。
- [6] 朱德君, 电子侦察技术(讲义), 国防科技大学, 1981年。

## Application of Extended Kalman Filtering to Passive Locating and Tracking of Moving Emitters by Time Difference Measurements

Meng Yang    Shi Yu

### Abstract

The passive locating and tracking of moving emitters in space by time difference measurements is discussed in this paper. Extended Kalman Filter is utilized to process the measurements in order to improve the accuracy of locating and tracking. The determination of initial conditions of the filter is also studied. The results from computer simulation are satisfactory.