国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八六年第二期　总第五十四期　No.2 1986　Sum. 54

# 电磁场边值问题的解法述评

张　钧

**摘　要**　本文综述了时谐场边值问题的各种解法。从解的特性和数学物理方法两方面评述了各种解法的特点和应用范围。

## 一、引　言

电磁場边值问题的解法为分析和设计电磁場工程问题提供了依据，它在解决和发展电磁場问题中占有极重要的地位。本文着重介绍时谐場的稳态解法，不涉及暂态解。且仅从解的特性和数学物理方法两方面作一评述。

## 二、按解的特性分类

由解的特性来分类，大致可将解法分为三类。

**1. 严格解**

这是从麦氏方程和边界条件出发，能获得严格解的方法。严格解虽然比较复杂，但在理论和工程上占有很重要的地位。即使在数值计算技术日益发展的今天，它仍然是人们感兴趣的。这是因为有以下几点：

(1) 根据边值问题的唯一性定理，严格解的正确性可以通过充分必要条件来检验。因而它可以为近似解或数值解的正确性提供检验。

(2) 严格解可以得到解析表达式，由它可直观研究各参量之间的关系，便于优化设计。

(3) 它是许多近似或数值解法发展的基础，例如几何绕射理论和微扰法等都是在严格解法基础上发展起来的。

严格解的局限性为：

(1) 分析和计算较复杂，目前只有少数电磁问题有严格解。

(2) 少数有严格解的问题往往也是在理想化条件下得到的。例如，矩形波导的严格解是在假设壁的电导率$\sigma=\infty$而得到的。如考虑$\sigma$有限，还无严格解。圆形波导考虑$\sigma$有限有严格解。

**2. 近似解**

它是指对某一实际边值问题所建立的数学模型，用近似解法得到一个具有明确表达式的近似解。例如变分法和微扰法等。这是一种常用的方法，现今仍占有一定重要地位。它的优点为：

1985年2月收到

(1) 有表达式，可以直观研究各参量间的关系，计算简便和省时，便于优化设计。

(2) 有些近似法借助计算机，原则上可得到你所要求的任意精度。当然、实际上要受计算机容量、速度和舍入误差的限制。

(3) 某些近似法（如变分法）可以估计解的误差范围。

近似解的局限性为：

(1) 解的误差或正确性不易估计。现在对许多近似解的误差已有了解，或者已得到一些粗估误差的公式。

(2) 它的应用范围虽比严格解法已大大扩展，但仍有许多复杂边值问题无近似解或得到的解误差太大而无法实用。

**3， 数值解**

这是近十来年发展最快的一种方法。它的突出优点是，原则上适用任何复杂的边界问题。且可得到你所要求的精度。任何数值解法的主要特征都是将連续函数离散化，再解联立方程组得数值解。边界形状愈复杂或要求精度愈高，则方程组的阶数愈高。因此‘实际上数值法还要受计算机容量、速度和舍入误差的限制。随着巨型计算机和数值计算方法的发展，将使许多过去只能依靠实验来设计的问题都可借助数值法来实现，并可作到优化设计。数值法除受条件和经济限制外，还有一点不足。这就是数值解目前还沒有找到一种比较简单的充分必要检验手段来验证解的正确性或估计误差。有的虽有误差估计公式，但又偏于保守而无法实用。目前行之有效的手段除实验验证外就是收斂试验，但要以大量消耗机时为代价。

综上所述，三种解各有特点，它们相互促进，互相补充，不能绝对肯定那一种，当前以数值解法发展最快。

## 三、按数学物理方法分类

解法很多，这里我们只按数学或物理方面的主要特征来说明一些基本和常用的方法。同时还应指出，一个具体问题往往可用多种解法或需数种方法联合使用。而且在解的过程还要借助许多电磁定理和概念，如二重性原理，等效定理、感应定理、巴比特定理，Schwarz 反射原理和反应概念等[1][2]。

**1． 分离变量法—偏微分方程法[3,4]**

大家知道，静电磁場边值问题可以归结为解拉普拉斯或泊松方程，再加第一或第二类边界条件或二者组合。时谐电磁場边値问题的稳态解为解矢量或标量的、齐次或非齐次的波动方程（又称亥姆霍兹方程），加边界条件。如求暂态解还要包括初始条件。

根据唯一性定理知，由 $S$ 封闭面包围的均匀空间，場或位满足波动方程，如在 $S$ 上满足 $E_t$ 或 $H_t$ 的边界条件，则解是唯一的。如在二个不同介质的均匀区域，则在交界面 $S_0$ 上还要同时满足 $E_t$ 和 $H_t$ 的連续条件、解才唯一确定。还要指出、获得解答的充分必要检验是解满足麦氏方程加边界条件。因为虽然所有满足麦氏方程的場量必须满足波动方程，但反之则不然。

为了能写出边界条件的表达式，实际问题的边界必须选择与一组正交曲线坐标系的一个或数个坐标面重合。而分离变量法只有在坐标系的斯达克尔矩阵满足一定条件

下[3][4]才能应用。对于标量亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \tag{1}$$

目前只有十一种坐标系能用分离变量，它们是直角、圆柱面、球面、椭圆柱面、抛物柱面、抛物面、旋转抛物面、长旋转椭球、扁旋转椭球、锥面和椭球。此外，还有二种坐标通过适当变换后拉普拉斯方程可分离变量，它们是双球面和环坐标[4]。

对于矢量波动方程除直角坐标系可分解为三个标量波动方程外，其它坐标系就不一定能直接得到一个到三个标量波动方程。因此，必须找到場矢量与满足标量波动方程的量之间的关系，这有很多方法，大致可分为三种情况：

(1) 直接解 $\bar{E}$ 或 $\bar{H}$ 的波动方程，而不借助位函数。这就要求場矢量至少要有一个分量满足波动方程。例如，在圆柱坐标，$E_z$ 和 $H_z$ 满足标量波动方程，通过它求其余分量。又如，当場量与 $Z$ 轴无关，则在直角、圆柱、椭圆柱和轴物柱面坐标中 $E_z$ 和 $H_z$ 可展成标量波动方程。而在場量对轴对称的情况下，在球、长和扁旋转椭球以及旋转抛物面坐标系中，$E_\psi$ 和 $H_\psi$ 可化为标量波动方程。

(2) 将 $\bar{E}$ 和 $\bar{H}$ 的分量由下列位函数表示[11]

$$\bar{L} = \nabla\varphi \qquad \text{纵向分量}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{M} &= \nabla\times(\bar{a}\psi) \\ \bar{N} &= \frac{1}{k}\nabla\times\bar{M} \end{aligned}\right\}\text{横向分量}$$

$$= \frac{1}{k}\nabla\times\nabla\times(\bar{a}\psi)$$

则 $\varphi$ 和 $\psi$ 可在直角、圆柱、椭圆柱、球、抛物圆柱和圆锥等六种坐标系下满足标量波动方程。

(3) 理论上可证明，任何一个場量可用二个标量位函数来表示。因此，我们在确定的某一坐标系下，可设法引入各种辅助位函数来求場，而这些辅助位函数是满足标量波动方程的。这是解矢量波动方程常用的一种方法。

解标量波动方程还需要用一组正交完备系来表示，这些函数组都是一些特殊函数。在这些函数中，目前只有三角函数，指数函数。各类贝塞尔函数、各类連带勒让德函数、马许函数和旋转椭球函数等研究比较完善，并已制有大量数据和图表供应用。其它函数如拉美函数、贝尔函数，韦伯函数等虽有解的形式，但数据表格不全，应用时要自算，所以还不常应用。目前实际应用较广泛的只有直角、圆柱面、球、椭圆柱、长和扁旋转椭球等六种坐标。

对于有源问题，需解非齐次标量波动方程。这时，除齐次方程的通解外，还应加一个特解(常为积分形式)，特解一般的求法是用朗斯基行列式的方法得到[2]。如果源为 $\delta$ 函数形式点源，还可用 $\delta$ 函数积分性质来求。

事实上，在高频場中许多问题具有以下特点。对不含源的边值问题，場量或位函数满足齐次标量波动方程，而边界条件常常是非齐次的。对有源边值问题，場量或位函数满足非齐次标量波动方程，而边界条件往往是齐次的。根据微分方程理论，一个具有非齐次边界的齐次方程可以化为齐次边界条件的非齐次方程的求解，或者反之。因此，对许多边值问题可以通过两种不同途径求場，视那种更为方便。

分离变量法可得严格解，特别适用于边界形状较规则的问题。它的缺点是无普遍性，

受坐标系的限制。

**2. 格林函数法——积分法[5]**

对于一个已知电流源$\bar{J}$分布的边值问题，其电場矢量滿足

$$\nabla\times\nabla\times\bar{E}-k^2\bar{E}=-j\omega\mu\bar{J} \tag{2}$$

如定义一幷矢格林函数$\overline{\overline{G}}$，它滿足方程

$$\nabla\times\nabla\times\overline{\overline{G}}-k^2\overline{\overline{G}}=-\overline{\overline{I}}\delta(\bar{r}-\bar{r}') \tag{3}$$

其中$\overline{\overline{I}}$为单位幷矢，$\delta$为狄拉克函数。

将(2)和(3)代入幷矢格林公式，可得

$$\bar{E}(\bar{r})=j\omega\mu\int_s\bar{J}(\bar{r}')\cdot\overline{\overline{G}}(\bar{r}'|\bar{r})dv'+\int_s[j\omega\mu(\bar{n}\times\bar{H})\cdot\overline{\overline{G}}(\bar{r}'|\bar{r})$$
$$-(\bar{n}\times\bar{E})\cdot\nabla'\times\overline{\overline{G}}(\bar{r}'|\bar{r})]ds \tag{4}$$

由上式可知，如已知体积$V$内$\bar{J}(\bar{r}')$和边界$S$上的$\bar{n}\times\bar{E}$和$\bar{n}\times\bar{H}$，幷已由(3)求出$\overline{\overline{G}}$,则由(4)可求出$\bar{E}(\bar{r})$。可见,格林函数法实质是把微分方程加边界条件的问题转化为一个积分问题，它已包含了边界条件。实际问题往往只知道边界$S$上的$\bar{n}\times\bar{E}$或$\bar{n}\times\bar{H}$中之一个。根据唯一性定理，場应唯一确定，直接用（4）无法确定。为此可规定$\overline{\overline{G}}$的条件。如已知$S$上$\bar{n}\times\bar{E}$，则规定在$S$上

$$\bar{n}\times\overline{\overline{G}}=0 \tag{5}$$

称为第一类电幷矢格林函数。此时，(4)中面积分中第一项消失。

当已知$S$上$\bar{n}\times\bar{H}$时，则规定$S$上

$$\bar{n}\times\nabla'\times\overline{\overline{G}}=0 \tag{6}$$

称为第二类电幷矢格林函数。此时，(4)中面积分中第二项消失。

幷矢格林函数的种类很多,可见[5]。求解幷矢格林函数的方法也很多，可采用分离变量法、鏡象法、傅里叶或拉普拉斯变换法、欧姆-瑞利法、复变函数法等。目前对各种典型边界形状的各类幷矢格林函数已在许多文献中[5][6]中列出，可以直接利用。

格林函数法的用途有三。(1) 已知$S$内源分布$\bar{J}(\bar{r}')$和$S$上边界条件之一，可以利用此法求場的严格解。(2) 如源分布未知，可根据概念和经验，假设一近似分布，根据此法求出近似解。(3) 如需求上一问题的严格解，利用格林函数可方便地建立积分方程，再利用积分方程法求出源分布或場。

格林函数法主要优点是，从数学形式上说，它具有普遍性，公式形式不依賴于坐标系。当利用近似源分布求場时，由于利用积分求場，所以计算误差较小。它的主要缺点是对复杂边界问题格林函数表示式求不出；另一缺点是积分求場有时积不出来，但总可以利用数值积分。

**3. 简正波法[7]**

这是另一种已知源求場分布的方法，它特别适用于将空间場展成波型的问题，例如传输线或辐射系统。当系统内有源激励时，可将系统内生产的場展成各种波型的迭加，

$$\bar{E}_t=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{\pm}\bar{E}_k^{\pm}$$
$$\bar{H}_t=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{\pm}\bar{H}_k^{\pm} \tag{7}$$

式中$\bar{E}_k^{\pm}$和$\bar{H}_k^{\pm}$为各种波型的模函数，上标±号分别表示正反向波或場。

在体积$V$内有电流源$\bar{J}_e$和磁流源$\bar{J}_m$，则各波型的模系数为

$$A_k^{\pm}=\mp\frac{1}{2}\int_V(\bar{J}_e\cdot\bar{E}_k^{\pm}-\bar{J}_m\cdot\bar{H}_k^{\pm})dv \tag{8}$$

一般$\bar{E}_k^{\pm}$和$\bar{H}_k^{\pm}$可以通过解体积内无源的齐次波动方程得到，所以简正波法也可看成解区域内有源的非齐次波动方程的一种方法。

简正波法和格林函数法都是已知源求場分布的方法。它们有一共同的特点，即把包含边界的复杂问题化成简单的单元问题来处理。前者将場分成若干基本波型，它类似于电路分析中傅里叶级数法；后者是将場看成若干点源产生場的组合，它类似电路分析中的丢阿蔑尔积分。可见，这两种方法都是处理已知源求場的最基本的方法。

**4. 变分法[2][8]**

许多实际工程问题的求解都可以表为一变分式，通过求泛函极值的方法求出場或参量。求泛函极值一般都不直接利用欧拉方程，因为这又回到解偏微分方程。实际求解都利用近似法，如里兹法等。

利用变分法的优点有：(1) 它可以得到一个近似表示式。(2) 当待求量是实数时，可以求出近似解的误差范围。(3) 变分式是一个稳定解，因而它对未知函数的准确性要求不高。当它具有一阶误差时，待求量具有二阶误差，即精度提高一个数量级。如果需要进一步提高精度，还可以采用迭代变分法。

变分法应用很广，许多问题的近似解都可利用它求出。而且目前发展的许多数值解法（如矩量法和有限元法等）都含有变分原理。

**5. 微扰法[1][3]**

微扰法的基本思想是，对某一区域内的場已有严格解或已知解。如在此区域内有微小的扰动，则可利用已知解再加上一项扰动解，从而得到扰动后的解。此法只适用扰动很小的情况，它是一个近似解。

微扰法也是求近似解的一种常用方法。它和变分法是有区别的，变分法是从变分式求出一近似本身的正确解的函数，而微扰法是从一个已知解求出扰动后的变分解。

**6. 积分方程法[2][3][4]**

这是解边值问题的另一种常用的方法，它可以获得严格解或近似解。积分方程的建立方法很多，常用格林函数来建立。矩量法出现后，也常用 Richmond 反应公式来建立。

积分方程的形式通常有第一类和第二类弗列德赫蒙和沃尔特拉积分方程。不同形式的积分方程解法也不完全相同，但大致可归纳为以下几种常用解法：

(1) 级数解法，将待求解的未知函数展成级数形式，通过逐步逼近法求出级数解。

(2) 函数变换解，利用傅里叶变换或双边拉普拉斯变换将未知函数变换后求出变换

解，再经反变换得解。

(3) Wiener—Hopf 法，此法可得严格解，它适用于七类边值问题．其积分方程的形式为

$$\phi(z)=V(z)+\int_0^\infty G(z-z')\phi(z')dz \tag{9}$$

其中$V(z)$和$G(z-z')$是已知的，$\phi(z)$是未知的。

(4) 解积分方程的近似方法也很多，但最适用电子计算机作数值计算的还是矩量法。这种方法被认为70年代对解边值问题的三大成就之一。

**7. 留数法和修改留数法**[2][9]

留数法可得严格解，此法是将解边值问题的无限线性联立方程组变成一围线积分形式

$$\oint_C \frac{F(\omega)}{\omega-\alpha_l}d\omega$$

根据线性方程组可以求出复变函数 $F(\omega)$，然后通过求 $F(\omega)$ 的留数得解。此法与Wiener—Hopf法等价。

对于一些不能得到严格解的问题，可以利用一个辅助形状，找到一个与严格解相联系的问题，从而得到一个近似解，称为修改留数法。

**8. 渐近解**[2][3]

(1) 低频渐近解（准静态法）

当频率$f\to0$时，波动方程退化为拉普拉斯方程。所以准静态法不仅适用于低频似稳場，且也广泛应用于高频传输线。这是因为许多传输线可传TEM 型波，其場滿足或近似滿足拉普拉斯方程。对于传输TE或TM 型波的波导，由于高次型波有 $\lambda>>\lambda_c$（截止波长），所以高次型波場可近似按拉氏方程求解。

解拉氏方程除前面已介绍的方法外，还可用复变函数法、保角变换、鏡象法、靜电模拟和奇异积分方程法求解。

(2) 高频渐近法

当物体尺寸远大于波长时，可近似认为$\lambda\to0$。此时，可用光学法来求解。最初常用的两种方法为几何光学法和物理光学法。前者比较直观和简单，能较准确预测天线主瓣性能，其缺点是对旁瓣或阴影区误差较大。后者稍复杂一些，准确性略有提高，但无质的变化。

近年来在某些典型问题的严格解的基础上，发展了几何绕射理论（GTD）和物理绕射理论（PDT）。GTD的优点是概念简单，有数学根据，其缺点是在阴影边界、反射边界和散焦处理论上给出无限大場，需加校正项，以及对具体形状根据严格解求绕射系数比较困难。PDT优点是一般都给出有限場；GTD能解决的问题PDT都能解决，反之则不一定。其缺点是积分比较困难，对附加面电流项如何选也不易确定。所以目前应用较广泛的还是GTD。

值得指出的是，70年代天线三大成就为矩量法、GTD和相控阵天线，三者实质上都是天线边值问题的成就。近几年还广泛采用几种方法组合起来应用的所谓混合法，例

如矩量法与GTD相结合等。

**9. 模匹配法**[10]

此法比较适合两个具有交界面的均匀区域问题，利用交界面連续条件和波型正交性，可得一组线性联立方程组．求解它得場。

需要指出，模匹配法所得方程组与变分法中用瑞利-里兹法，以及积分方程法中用矩量法的伽略金法所得结果相同。说明三种方法等价，它们都符合变分原理。

**10. 数值解法**[3][10]

在数值解法中目前常用的有有限差分法，有限元法和矩量法等。任何数值法的本质都是把連续函数加以离散化。对于用积分方程描述的电磁場，则往往离散对象位于边界面上，在微波中常用矩量法计算。对于用微分方程描述的电磁場，离散对象位于某一場域内部，此时常用有限差分法或有限元法。差分法较有限元法简单，但有限元法适用范围较广。这两种方法所得的系数矩阵具有对称、正定和稀疏的特点。而采用矩量法所得矩阵为满阵。但在研究幅射和散射问题时，还是常用矩量法。这是因为：(1)矩量法此时只需处理物体边界，而有限元法却要在整个空间离散化。(2) 矩量法采用全域基时可以利用波型或模的概念，而有限元法只能逐点计算。所以微波中矩量法用得更多一些，而在一些强电工程中差分法和有限元法用得较多。

数值法计算结果除实验检验外，目前还缺少充分必要的检验手段。目前常用的必要检验手段有：(1) 先验知识检验；(2) 能量守恒检验；(3) 对比检验；(4) 收敛试验检验等等。

解边值问题的方法还可列举许多，如广义散射矩阵法，复功率法等等。这里就不一一列举。。即使前面介绍的各种方法，限于篇幅，也只能简述，而不能展开讨论。

## 参考文献


[1] R.F.Harrington, Time-Harmonic Electromagnetic Field, 1961.

[2] R.E.Colln, Field Theory of Guided Wave, 1960.

[3] 任朗，天线理论基础，人民邮电出版社，1980.

[4] 林为干，微波理论与技术，科学出版社，1979.

[5] C.T.Tai, Dyadic Green's Function in Electromagnetic Theory, 1971.

[6] J.J.Bawman, T.B.A.Senior and P.L.E.Usienghi, Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes, 1969.

[7] 黄宏嘉，微波原理，卷I和卷II，科学出版社，1964.

[8] L.Lewin, Theory of Waveguides, 1975.

[9] R.Mittra, Computer Techniques for Electromagnetics. 1973.

[10] N.Amintay, V.Galindo and C.P.Wu, Theory and Analysis of Phased Array Antennas, 1972.

[11] J.A.Stratton, Electromagnetic theory, 1941.

# A Survey of Solution Methods for Boundary Value Problems of the Electromagnetic Field

Zhang Jun

**Abstract**

Solutions of boundary value problems for the timeharmonic electromagnetisc field are summarized in this paper. Based on both the properties of solution ana mathematical and physical methods, the properties of the solutions and their range of applications are surveyed.