国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八六年第三期　总第五十五期　No.3 1986 Sum. 55

有容量限制的运输问题

陈庆华

提　要　具有容量限制的运输问题可以用有界变量的线性规划问题求解[1]，但是问题的规模往往变得很大，给求解带来不便。本文给出求解这一问题的表上作业法。

一、问题的提出

假设给出了一张运输表；其中 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 为 m 个发点；$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 n 个收点；发点 $A_i (i=1,2,\cdots,m)$ 的发量为 a_i；收点 $B_j (j=1,2,\cdots,n)$ 的收量为 b_j；第 (i, j) 格子中，d_{ij} 表示流量的容量限制，c_{ij} 表示单位流量运价；且满足平衡条件

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{1}$$

使得 $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ 极小。见表 1.

表 1	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	发量
A_1							a_1
A_2							a_2
…							…
A_i				c_{ij} x_{ij} d_{ij}			a_i
…							…
A_m							a_m
收量	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$

本文 1985 年 10 月 24 日收到

当运输问题无容量限制时，通常用西北角法给出一组基可行解，然后再调整得最优解[2]。但当有容量限制时，按通常的西北角法给出的不一定是可行解。当 a_i，b_j 都是非负整数时，该问题可以化为偶图网络，把有容量限制的运输问题变成无容量限制的运输问题，然后求极小权的完美对集[3]。本文对一般的有容量限制的运输问题给出一个类似西北角法的解法，这一算法的关键是寻找第一个可行解。

二、寻找可行解

定义 1 称$\{x_{ij}\}$是问题(1)的一组解，如果

(i) $x_{ij}\leqslant d_{ij}$，$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,n$

(ii) $\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i$，$i=1,2,\cdots,m$.

又若条件(ii)中至少有某个 i_0，使得严格不等式成立，则称$\{x_{ij}\}$为未饱和的解。

对于问题(1)，采用西北角法给出一组解。对第一行，令

$$x_{11}=\min\{d_{11},\ b_1,\ a_1\}$$
$$x_{12}=\min\{d_{12},\ b_2,\ a_1-x_{11}\}$$
$$\vdots$$
$$x_{1n}=\min\{d_{1n},\ b_n,\ a_1-x_{11}-x_{12}-\cdots-x_{1,n-1}\}$$

对第二行，令

$$x_{21}=\min\{d_{21},\ b_1-x_{11},\ a_2\}$$
$$x_{22}=\min\{d_{22},\ b_2-x_{12},\ a_2-x_{21}\}$$
$$\vdots$$
$$x_{2,n}=\min\{d_{2n},\ b_n-x_{1,n},\ a_2-x_{21}-x_{22}-\cdots-x_{2,n-1}\}$$
$$\vdots$$

依次做下去，有

命题 1 如果原问题有可行解，上面做出的解的第一行、第一列是饱和的。如果各行都是饱和的，则$\{x_{ij}\}$是可行解。如果$\{x_{ij}\}$存在不饱和的行，则也存在不饱和的列。

定义 2 运输表上的格子$(s,\ t)$称为第Ⅰ类奇异格子，记为$\varDelta$，如果第 s 行是不饱和的行，第 t 列是饱和列，且其流量 $x_{st}<d_{st}$. 格子$(k,\ l)$称为第Ⅱ类奇异格子，记为$*$，如果第 k 行是饱和的行，第 l 列是不饱和的列，且其流量 $x_{kl}<d_{kl}$.

定义 3 运输表上的一条路$P=\{x_{st},\ x_{s_1t},\ x_{s_1t_1},\cdots,x_{kl_1},\ x_{kl}\}$称为增广路，如果满足下列条件：

(i) $(s,\ t)$是第Ⅰ类奇异格子，$(k,\ l)$是第Ⅱ类奇异格子。初始格$(s,\ t)$称为第1个格子，其余类推。

(ii) $(s_1,\ t)$与初始格子$(s,\ t)$同列，$(s_1,\ t_1)$与$(s_1,\ t)$同行。依次类推，最后$(k,\ l_1)$与$(k,\ l)$同行。

(iii) 路P上的偶序号的格子上，其流量大于0；奇序号的格子上，其流量小于容量。

命题 2 如果运输问题存在可行解，并且$\{x_{ij}\}$是使第一行、第一列饱和的一组未饱和解，则运输表上一定存在增广路；因而，当不存在增广路时，便得到了原问题的一组可行解。

命题 3 如果存在一条增广路P，则对于充分小的$\delta>0$，令

$$\bar{x}_{ij}=\begin{cases}x_{ij}, & (i,j)\text{不在}P\text{上}\\ x_{ij}+\delta, & (i,j)\text{是}P\text{的奇序号格子}\\ x_{ij}-\delta, & (i,j)\text{是}P\text{的偶序号格子},\end{cases} \tag{2}$$

则 $\bar{x}_{ij}$ 仍是一组解，且仍使第一行、第一列饱和。

令 $\delta_1=\min\{d_{ij}-x_{ij}|\ (i,j)\text{是}P\text{的奇序号格子}\}$

$\delta_2=\min\{x_{ij}\ |(i,j)\text{是}P\text{的偶序号格子}\}$

$$\delta_3=a_s-\sum_{j=1}^{n}x_{sj}$$

$$\delta_4=b_t-\sum_{i=1}^{m}x_{it}$$

取调整量$\delta=\min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$，显然当$\delta>0$时，按(2)式调整流量，得到$\{\bar{x}_{ij}\}$，使总流值增加。

三、最 优 解

定义 4 如果$\{x_{ij}\}$是一组可行解，其中不含有圈的$m+n-1$个格子特别被指定，而不被指定的格子上流量为0或d_{ij}，则称这组可行解为基可行解。特别指定的$m+n-1$个流量为基流量。

如果$\{x_{ij}\}$是一组可行解，则一定能够调整成一组基可行解。调整方法如下：

(i) 如果流量异于0与d_{ij}的格子个数恰为$m+n-1$，且无圈，则已是一组基可行解。

(ii) 如果流量异于0与d_{ij}的格子个数不足$m+n-1$；若无圈，则在保持无圈的情况下，再特别指定一些零流量或上界流量，补足个数为$m+n-1$；若有圈，则按情况(iii)处理。

(iii) 如果流量异于0与d_{ij}的格子个数超过$m+n-1$，则一定含有圈。任取一个圈，选取适当的$\delta>0$，利用奇序号格子上流量增加δ，偶序号格子上流量减少δ的办法，可使某些流量达到上界（即容量）或降为0，从而可甩去一些格子，直到无圈为止。转化为情况(i)或(ii)。

因而从一组可行解可以调整为一组基可行解。

由线性规划的理论可知，在运输表上给出一组基可行解后，可以求出运输表上每行、每列的位势。如果在所有非基变量的格子(i, j)上满足

$$c_{ij}-u_i-v_j\geqslant 0,\ \text{当}\ x_{ij}=0$$

$$c_{ij}-u_i-v_j\leqslant 0,\ \text{当}\ x_{ij}=d_{ij}$$

其中u_i是A_i行的位势，v_j是B_j列的位势，则该基可行解一定是最优解。

如果$\{x_{ij}\}$是一组基可行解，但不是最优解，可以对它进行调整，得到一个不比它坏的基可行解。调整办法如下：

若非基变量$x_{ij}=d_{ij}$，且$c_{ij}-u_i-v_j>0$，则存在以(i,j)为初始格子的圈，圈上的其它格子都是基变量格子。利用奇序号格子上流量减少δ，偶序号格子上流量增加δ的办法，使(i,j)格子进基，而把原来属于基的一个格子，由于其流量上升为上界或降为0，而安排其出基。

若非基变量$x_{ij}=0$，$c_{ij}-u_i-v_j<0$，类似处理。

命题 4　如果问题存在可行解，其中容量d_{ij}都是整数，则在非退化的情况下，有限次迭代可得流量都是整数的最优解。

命题 5　如果在执行本文二所叙述的算法过程中，出现下列情况之一，即可断定问题(1)不存在可行解。

(i)　第一组解给出以后，发现第一行、第一列至少其中之一不饱和。

(ii)　给出的一组解，至少有一行或列不饱和，但不存在增广路。

四、例　　子

求表2所给出的运输问题的最小运价方案。

表2	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	发量
A_1	$\boxed{10}$ 2	$\boxed{20}$ 3	$\boxed{5}$ 4	$\boxed{9}$ 1	$\boxed{10}$ 1	9
A_2	$\boxed{2}$ 2	$\boxed{10}$ 2	$\boxed{8}$ 1	$\boxed{30}$ 3	$\boxed{6}$ 3	4
A_3	$\boxed{1}$ 4	$\boxed{20}$ 2	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{10}$ 3	$\boxed{4}$ 1	8
收量	3	5	4	6	3	总和21

按本文给出的方法做出第一组解，得表3.

其中(3，1)，(3，2)为第Ⅰ类奇异格子，(1，4)，(1，5)，(2，4)，(2，5)为第Ⅱ类奇异格子。而

$$P_1=\{(3,1),\ (1,1),\ (1,4)\}$$
$$P_2=\{(3,1),\ (1,1),\ (1,5)\}$$
$$P_3=\{(3,2),\ (2,2),\ (2,4)\}$$
$$P_4=\{(3,2),\ (2,2),\ (2,5)\}$$

表 3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	发量
A_1	2 ╲ 2	3 ╲ 3	4 ╲ 4	* ╲ 1	* ╲ 1	9
A_2	1 ╲ 2	2 ╲ 2	╲ 1	1 * ╲ 3	* ╲ 3	4
A_3	△ ╲ 4	△ ╲ 2	╲ 0	3 ╲ 3	1 ╲ 1	8
收量	3	5	4	6	3	21

为四条增广路。在这四条增广路上调整流量得表 4 .

表 4	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	发量
A_1	╲ 2	③ ╲ 3	④ ╲ 4	① ╲ 1	▽1 ╲ 1	9
A_2	① ╲ 2	╲ 2	╲ 1	② ╲ 3	① ╲ 3	4
A_3	② ╲ 4	▽2 ╲ 2	▽0 ╲ 0	▽3 ╲ 3	▽1 ╲ 1	8
收量	3	5	4	6	3	21

其中画〇的为基流量格子，这是第一组基可行解。其中▽表示上界流量格子。

计算位势与检验数，得表 5 .

		$v_1=-19$	$v_2=20$	$v_3=5$	$v_4=9$	$v_5=-15$	
	表 5	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	发量
$u_1=0$	A_1	+	③	④	①	▽1 +	9
$u_2=21$	A_2	①	-	-	②	①	4
$u_3=20$	A_3	②	▽2 -	▽0 -	▽3 -	▽1 -	8
	收量	3	5	4	6	3	21

这时(2,2)，(2,3)，(1,5)格子不满足最优解条件。考虑格子(1,5)，$x_{15}=d_{15}$，$c_{15}-u_1-v_5=10-0-(-15)=25>0$，不满足最优解条件。把(1,5)进基，形成圈(1,5)—(1,4)—(2,4)—(2,5)—(1,5)，调整量$\delta=0$，让(1,4)出基，取上界流量 1．

经过一系列的调整，得表 6．

	表 6	B₁ ($v_1=1$)	B₂ ($v_2=20$)	B₃ ($v_3=7$)	B₄ ($v_4=40$)	B₅ ($v_5=16$)	发量
$u_1=0$	A_1	2 / 10 / +	3 / 20 / ③	− 4 / 5 / ▽4	− 1 / 9 / ▽1	− 1 / 10 / ▽1	9
$u_2=-10$	A_2	2 / 2 / +	2 / 10 / ①	1 / 8 / +	3 / 30 / ②	3 / 6 / ①	4
$u_3=0$	A_3	4 / 1 / ③	2 / 20 / ①	0 / 7 / ⓪	− 3 / 10 / ▽3	− 1 / 4 / ▽1	8
	收量	3	5	4	6	3	21

这时满足最优解条件，最小运价为 232.

参 考 文 献

[1] 陈庆华，有界变量线性规划问题的对偶算法，国防科技大学学报，1984 年第三期。

[2] 管梅谷，郑汉鼎，线性规划，山东科技出版社，1983 年。

[3] 刘振宏，马仲蕃，拟阵理论及应用，中国科学院系统科学研究所内部交流资料，1980 年。

A New Algorithm for Finding a Optimum Solution of the Transportation Problem with Capacity

Chen Qinghua

Abstract

The transportation problem with capacity can be solved by the simplex algorithm for solving linear programming problem with bounded variables; but, the scope of this problem is often very broad. This paper gives a new algorithm.