国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八六年第三期　总第五十五期　No.3 1986 Sum. 55

Fuzzy 数系数线性方程组求解初探

姜 华 彪

提　要　本文引入了Fuzzy数系数线性方程组的概念，它是分明线性方程组的一种自然推广。通过对区间数和区间数线性方程组的分析，得到了几类Fuzzy数系数线性方程组有解的充要条件，并在证明中给出了求解的方法。

一、引　言

众所周知，所谓Fuzzy数，是通常实数的一种自然拓广，它把通常的数作为其特殊情况。当然，Fuzzy数的产生是研究现实世界的必要，因为通常的数无法刻划自然界和社会界中存在的许多模糊现象。在[2]的第三部分第二章中，研究了离散时间线性Fuzzy系统，即它的Fuzzy状态转移函数为：

$$\tilde{S}_{t+1}=\tilde{A}\odot\tilde{S}_t\oplus\tilde{B}\odot\tilde{u}_t$$

其中 $\tilde{A}$，$\tilde{B}$ 为Fuzzy数矩阵，$\tilde{S}_t$ 为该系统在时刻 t 的Fuzzy状态，$\tilde{u}_t$ 是 t 时的输入。通常 $\tilde{A}$，$\tilde{B}$ 都是已知的，假如在 $t+1$ 时的Fuzzy状态 $\tilde{S}_{t+1}$ 也已知，那么是否能从Fuzzy状态转移函数中求出 $\tilde{S}_t$ 和 $\tilde{u}_t$ 呢？这就涉及到Fuzzy数系数线性方程组的求解问题。为便利起见，通常把Fuzzy数系数线性方程写成如下形式：

$$\begin{cases}\tilde{a}_{11}\odot\tilde{x}_1\oplus\tilde{a}_{12}\odot\tilde{x}_2\oplus\cdots\oplus\tilde{a}_{1n}\odot\tilde{x}_n=\tilde{b}_1\\ \tilde{a}_{21}\odot\tilde{x}_1\oplus\tilde{a}_{22}\odot\tilde{x}_2\oplus\cdots\oplus\tilde{a}_{2n}\odot\tilde{x}_n=\tilde{b}_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \tilde{a}_{m1}\odot\tilde{x}_1\oplus\tilde{a}_{m2}\odot\tilde{x}_2\oplus\cdots\oplus\tilde{a}_{mn}\odot\tilde{x}_n=\tilde{b}_m\end{cases}\qquad(\mathrm{I})$$

其中 $\tilde{a}_{ij}$，$\tilde{b}_i$ $i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$ 都是Fuzzy数。从[2]和[4]中，我们知道两个Fuzzy数进行广义加法和广义乘法仍然是Fuzzy数。又从[4]中可知，若 μ，ν 是两个Fuzzy数，则 $\forall\lambda\in(0,1]$，有 $(\mu*\nu)_\lambda=\mu_\lambda*\nu_\lambda$，$*$ 是广义加法或广义乘法。由此可知，若(Ⅰ)有Fuzzy数解的话，那么 $\forall\lambda\in(0,1]$ 对方程组(Ⅰ)的两边取入截集，则得到的是区间数系数线性方程，这时人们自然会想到Fuzzy数系数线性方程组是否可用一族区间数系数线性方程组来刻划呢？本文就想从这个方面作些探讨。为此在下节中将对区间数的情况来考虑。

本文1985年10月5日收到

二、区间数的运算及其区间数方程组

R是实直线，$[a,b]=\{x\in R,\ a\leqslant x\leqslant b\}$是实直线上的一线段，称之为区间。在此我们亦称之为区间数；若$a>0$，则称$[a,b]$为正区间数；若$b<0$则称$[a,b]$为负区间数；又若$a\leqslant 0\leqslant b$则称$[a,b]$为零区间数。

I_R——R的所有区间数的集合，P_R——R的所有正区间数的集合，N_R——R的所有负区间数的集合，Z_R——R的所有零区间数的集合。

易见：
$$I_R=P_R\cup N_R\cup Z_R$$

在I_R中规定运算加法"+"和乘法"·" $\forall[a,b],[c,d]\in I_R$
$$[a,b]+[c,d]=[a+c,\ b+d]$$
$$[a,b]\cdot[c,d]=[e,f]$$
其中$e=\min\{ac,\ ad,\ bc,\ bd\}$，$f=\max\{ac,\ ad,\ bc,\ bd\}$，则容易看出当区间数退化为实数时，是与实数中定义的加法和乘法是一致的。

又若把区间数写成特征函数的形式
$$\mu_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & x\notin[a,b]\end{cases}\qquad \mu_{[c,d]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[c,d]\\ 0 & x\notin[c,d]\end{cases}$$
则易验证 $(\mu_{[a,b]}\oplus\mu_{[c,d]})(x)=\mu_{[a,b]+[c,d]}(x)\quad \forall x\in R$
$$(\mu_{[a,b]}\odot\mu_{[c,d]})(x)=\mu_{[a,b]\cdot[c,d]}(x)\quad \forall x\in R$$

由此可见，这与[2]中定义的广义加法和广义乘法也是一致的。

命题 2.1 $(P_R,+,\cdot)$是一个有单位元的可换半环。

证明 $\forall[a_i,b_i]\in P_R$，$i=1,2,3$，因为$a_1>0$，$a_2>0$，所以$a_1+a_2>0$，故$[a_1,b_1]+[a_2,b_2]=[a_1+a_2,\ b_1+b_2]\in P_R$。同样有$a_1\cdot a_2>0$，所以$[a_1,b_1]\cdot[a_2,b_2]=[a_1a_2,\ b_1b_2]\in P_R$，由此可知$P_R$关于运算+、·是封闭的。

又因为$[a_1,b_1]\cdot[a_2,b_2]=[a_1a_2,b_1b_2]=[a_2a_1,b_2b_1]=[a_2,b_2]\cdot[a_1,b_1]$，故$P_R$对"·"是可换的。

P_R关于"+"和"·"的结合律是显然的。
$$\forall[a,b]\in P_R\quad [a,b]\cdot[1,1]=[a,b]$$
所以P_R关于"·"有单位元。下面只需证明分配律成立即可。

事实上：
$$[a_1,b_1]\cdot([a_2,b_2]+[a_3,b_3])=[a_1,b_1]\cdot[a_2+a_3,b_2+b_3]$$
$$=[a_1(a_2+a_3),\ b_1(b_2+b_3)]=[a_1a_2+a_1a_3,\ b_1b_2+b_1b_3]$$
$$=[a_1a_2,\ b_1b_2]+[a_1a_3,\ b_1b_3]=[a_1,b_1]\cdot[a_2,b_2]+[a_1b_1]\cdot[a_3,b_3]$$
所以分配律成立。 Q.E.D.

注：这个命题只是对P_R成立，若把P_R换成I_R，N_R或Z_R结论都不成立。因为对$(I_R,+,\cdot)$来说分配律不成立；对$(N_R,+,\cdot)$来说，乘法运算"·"不封闭；对$(Z_R,+,\cdot)$来说，分配律也不成立。

命题 2.2 $\forall[a,b]\in I_R$，$[c,d]\in I_R$，存在$[x_1,x_2]\in I_R$，使得$[a,b]+[x_1,x_2]=$

$[c,d]$的充要条件是 $a+d\geqslant b+c$. 若有解的话，解是唯一的。

证明 若有解，设为$[x_1,x_2]$，则 $a+x_1=c, b+x_2=d$，所以$x_1=c-a\leqslant x_2=d-b$，故$a+d\geqslant b+c$。

反之，若 $a+d\geqslant b+c$，则 $d-b\geqslant c-a$

令 $$x_1=c-a,\ x_2=d-b$$

则$[x_1,x_2]$便是方程$[a,b]+[x_1,x_2]=[c,d]$的解。 Q.E.D.

命题 2.3 设$[a,b]\in P_R$，1° $[c,d]\in P_R$，则存在$[x_1,x_2]\in I_R$，使得方程 $[a,b]\cdot[x_1,x_2]=[c,d]$成立的充要条件是 $ad\geqslant cb$. 若有解，则其解$[x_1,x_2]\in P_R$.

2° $[c,d]\in N_R$，则存在$[x_1,x_2]\in I_R$，使得方程$[a,b]\cdot[x_1,x_2]=[c,d]$成立的充要条件是 $ac\leqslant bd$. 在这种情况下，方程有解的话，解一定在 N_R 中。

3° $\forall[c,d]\in Z_R$，方程$[a,b]\cdot[x_1,x_2]=[c,d]$都有解，且解在 Z_R 中。

证明 1° 若解存在，则一定在 P_R 中。

事实上：若解在 N_R 中，则$[a,b]\cdot[x_1,x_2]\in N_R$ 与 $[a,b]\cdot[x_1,x_2]=[c,d]\in P_R$ 矛盾；若解在 Z_R 中，则$[a,b]\cdot[x_1,x_2]\in Z_R$，亦与$[c,d]\in P_R$ 矛盾。所以解只能在 P_R 中。

若存在$[x_1,x_2]$使得$[a,b]\cdot[x_1,x_2]=[c,d]$成立，由上面证明可知 $[x_1,x_2]\in P_R$.

所以$[a,b]\cdot[x_1,x_2]=[ax_1,bx_2]=[c,d]$

故 $ax_1=c \qquad bx_2=d \qquad$ 则 $x_1=\dfrac{c}{a}\leqslant x_2=\dfrac{d}{b}$

上面两式同乘 ab 得 $ad\geqslant bc$.

反之，若 $ad\geqslant bc$，那么 $c/a\leqslant d/b$，令 $x_1=c/a$，$x_2=d/b$，则$[x_1,x_2]$便是方程的解。

2° 由 1° 的前面一部分证明可知，若有解的话，则解一定在 N_R 中。若存在$[x_1,x_2]\in I_R$，使得

$$[a,b]\cdot[x_1,x_2]=[c,d]\text{成立}$$

则 $$[a,b]\cdot[x_1,x_2]=[bx_1,ax_2]=[c,d]$$

所以 $bx_1=c$，$ax_2=d$，那么 $x_1=c/b\leqslant x_2=d/a$，故 $ac\leqslant bd$.

反之，若 $ac\leqslant bd$，则 $c/b\leqslant d/a$.

令 $x_1=c/b$，$x_2=d/a$，则$[x_1,x_2]$就是解。

3° 由 1° 的前面一部分证明可知，有解的话，则解一定在 Z_R 中；令 $x_1=c/b$，$x_2=d/b$，因为 $c\leqslant 0\leqslant d, b\geqslant a>0$，所以 $c/b\leqslant d/b$，故$[x_1,x_2]$就是$[a,b]\cdot[x_1,x_2]=[c,d]$的解，反之，若$[x_1,x_2]$是该方程的解，那么$x_1=c/b$，$x_2=d/b$. 由此可见，若$[c,d]$是零区间数，则方程$[a,b]\cdot[x_1,x_2]=[c,d]$的解与 a 无关；即 $\forall a\in[0,b]$，$[a,b]\cdot[y_1,x_2]=[c,d]$的解都相同。 Q.E.D.

上面我们讨论了一元一次区间数方程，下面将研究 n 元一次方程组解的问题。

$$\begin{cases}[a_{11},b_{11}]\cdot[x_1,y_1]+[a_{12},b_{12}]\cdot[x_2,y_2]+\cdots+[a_{1n},b_{1n}]\cdot[x_n,y_n]=[c_1,d_1]\\ [a_{21},b_{21}]\cdot[x_1,y_1]+[a_{22},b_{22}]\cdot[x_2,y_2]+\cdots+[a_{2n},b_{2n}]\cdot[x_n,y_n]=[c_2,d_2]\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [a_{n1},b_{n1}]\cdot[x_1,y_1]+[a_{n2},b_{n2}]\cdot[x_2,y_2]+\cdots+[a_{nn},b_{nn}]\cdot[x_n,y_n]=[c_n,d_n]\end{cases}\qquad(\mathrm{I})$$

为方便起见，我们用下列记号：

$$|a_{ij}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad |b_{ij}|=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$A_i=\begin{array}{c} \text{第 } i \text{ 列} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \qquad B_i=\begin{array}{c} \text{第 } i \text{ 列} \\ \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & d_1 & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & d_2 & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & d_n & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$$

$$C_i=\begin{array}{c} \text{第 } i \text{ 列} \\ \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & c_1 & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & c_2 & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & c_n & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \qquad D_i=\begin{array}{c} \text{第 } i \text{ 列} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & d_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & d_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & d_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$$

命题 2.4　设在方程组(Ⅰ)中$[a_{ij},b_{ij}]$ $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$都是正区间数。(1)则方程组(Ⅰ)存在唯一的一组正区间数$\{[x_i,y_i],i=1,2,\cdots,n\}$使得方程组(Ⅰ)成立的充要条件为：$|a_{ij}|\neq0$，$|b_{ij}|\neq0$，并且

$$0<\frac{A_i}{|a_{ij}|}\leqslant\frac{B_i}{|b_{ij}|}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

此时易见$[c_i,d_i]$是正区间数。$i=1,2,\cdots,n$

(2) 方程组(Ⅰ)存在唯一的一组负区间数解的充要条件是$|a_{ij}|\neq0$，$|b_{ij}|\neq0$，并且

$$\frac{C_i}{|b_{ij}|}\leqslant\frac{D_i}{|a_{ij}|}<0\qquad i=1,2,\cdots,n$$

此时区间数$[c_i,d_i]$也一定在N_R中。$i=1,2,\cdots,n$

(3) 方程组(Ⅰ)存在唯一的一组零区间数解的充要条件是$|b_{ij}|\neq0$，并且对$i=1,2,\cdots,n$都有

$$\frac{C_i}{|b_{ij}|}\leqslant0\leqslant\frac{B_i}{|b_{ij}|}$$

此时区间数$[c_i,d_i]$ $i=1,2,\cdots,n$一定在Z_R中。

证明　仅证(1)，(2)和(3)的情况类似。

方程组(Ⅰ)有唯一的一组正区间数解当且仅当方程组$\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\ \sum_{j=1}^{n}b_{ij}y_j\right]=[c_i,d_i]$ $i=1,2,\cdots,n$，有唯一的解，并且$y_i\geqslant x_i>0$ $i=1,2,\cdots,n$，即方程组$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=c_i$ $i=1,2,\cdots,n$，与方程组$\sum_{j=1}^{n}b_{ij}y_i=d_i$ $i=1,2,\cdots,n$，都有唯一的一组正数解，并且$x_i\leqslant y_i$ $i=1,2,\cdots,n$，所以由线性代数中的结论可知，有满足上述解的充要条件是：

$$|a_{ij}|\neq 0,\ |b_{ij}|\neq 0 \text{ 并且 } 0<x_i=\frac{A_i}{|a_{ij}|}\leqslant y_i=\frac{B_i}{|b_{ij}|}$$

对$\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$都成立。 Q.E.D.

三、Fuzzy 数系数线性方程组

本节我们对系数是 Fuzzy 数的线性方程组进行讨论，本节的讨论是以前一节为基础，把 Fuzzy 数系数线性方程组转化为一族区间数系数线性方程组来研究。

定义 3.1 设μ是R上的 Fuzzy 子集，μ称为R的一个 Fuzzy 数，如果存在唯一的$x_0\in R$,使得$\mu(x_0)=1$,并且对任意的$\lambda\in(0,1]$，μ_λ均为闭区间[3]。μ称为R的一个强 Fuzzy 数,如果μ是R上的连续函数;Suppμ是有界集；$\mu(x)$是严格凸的 Fuzzy 集，并且存在唯一的x_0使$\mu(x_0)=1$.

命题 3.1 若μ是强 Fuzzy 数，则一定是 Fuzzy 数。 Q.E.D.

由此可见若μ是强 Fuzzy 数，$a_L(\lambda)$，$a_R(\lambda)$分别是μ的入截集的左、右端点函数，那么$a_L(\lambda)$是在$[0,1]$区间上的一个严格单调上升的连续函数，$a_R(\lambda)$是$[0,1]$区间上的严格单调下降函数，且$a_L(1)=a_R(1)$。反之，对这样的一对函数可唯一地确定一个强 Fuzzy 数。

事实上只要取

$$\mu(x)=\begin{cases} a_L^{-1}(x) & \text{若 } x=a_L(\lambda) \quad \lambda\in(0,1] \\ a_R^{-1}(x) & \text{若 } x=a_R(\lambda) \quad \lambda\in(0,1] \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

在本节中，若没有特别声明，我们所说的 Fuzzy 数都是指定义 3.1 中的强 Fuzzy 数。

设μ是 Fuzzy 数，

1° 若$\forall x\leqslant 0$ $\mu(x)=0$，则称μ为正 Fuzzy 数。

2° 若$\forall x\geqslant 0$ $\mu(x)=0$，则称μ为负 Fuzzy 数。

3° 若$\mu(0)=1$，则称μ为零 Fuzzy 数。

从[4]第一章$P28$的结果中，我们容易验证若μ，ν是 Fuzzy 数，$\mu*\nu$仍然是 Fuzzy数，其中$(\mu*\nu)(x)=\bigvee\limits_{\lambda\in[0,1]}[\lambda\wedge x_{\mu_\lambda*\nu_\lambda}(x)]$，$*$表示加法“+”或乘法“·”，并且$\forall\lambda\in[0,1]$有$(\mu*\nu)_\lambda=\mu_\lambda*\nu_\lambda$.

命题 3.2 设$\tilde{a}$，$\tilde{b}$是 Fuzzy 数，则存在 Fuzzy 数$\tilde{x}$，使得$\tilde{a}\oplus\tilde{x}=\tilde{b}$的充要条件是：

(1) $\forall t\in(0,1]$，$a_L(t)+b_R(t)\geqslant a_R(t)+b_L(t)$

(2) $b_L(t)-a_L(t)$，$b_R(t)-a_R(t)$分别是严格单调上升，下降的函数。$a_L(t),a_R(t)$；$b_L(t)$，$b_R(t)$分别是$\tilde{a}$、$\tilde{b}$的t一截集的端点。

证明 若存在 Fuzzy 数$\tilde{x}$，使得方程$\tilde{a}\oplus\tilde{x}=\tilde{b}$成立，那么$\forall t\in(0,1]$，有$[a_L(t),a_R(t)]+[x_L(t),x_R(t)]=[b_L(t),b_R(t)]$，那么

$$a_L(t)+x_L(t)=b_L(t),\quad a_R(t)+x_R(t)=b_R(t)$$

所以 $x_L(t)=b_L(t)-a_L(t)$ 严格单调上升，

$x_R(t)=b_R(t)-a_R(t)$ 严格单调下降。

又因为 $x_L(t)\leqslant x_R(t) \quad \forall t\in(0,1]$

故 $b_L(t)-a_L(t)\geqslant b_R(t)-a_R(t)$

所以 $a_L(t)+b_R(t)\geqslant a_R(t)+b_L(t)$

反之，只要取 $x_L(t)=b_L(t)-a_L(t)$，$x_R(t)=b_R(t)-a_R(t)$。因为 $x_L(1)=b_L(1)-a_L(1)=b_R(1)-a_R(1)=x_R(1)$。所以 $x_L(t)$和 $x_R(t)$可唯一决定一个满足方程的 Fuzzy数。故方程有解。 Q.E.D.

命题 3.3 若 $\tilde{a}$ 是正 Fuzzy 数，$\tilde{b}$ 也是正 Fuzzy 数，若方程 $\tilde{a}\odot\tilde{x}=\tilde{b}$ 有解，则解是正 Fuzzy 数；且该方程有解的充要条件是(1) $\forall t\in(0,1]$，$a_L(t)\cdot b_R(t)\geqslant a_R(t)\cdot b_L(t)$ (2)$b_L(t)/a_L(t)$严格单调上升，$b_R(t)/a_R(t)$严格单调下降。

证明 由命题2.3中的1°容易知道，若方程组有解，那么解一定是正 Fuzzy 数。

若有解，那么 $\forall t\in(0,1]$

$$[a_L(t),a_R(t)]\cdot[x_L(t),x_R(t)]=[b_L(t),b_R(t)]$$

则 $a_L(t)x_L(t)=b_L(t) \qquad a_R(t)\cdot x_R(t)=b_R(t)$

所以 $x_L(t)=\dfrac{b_L(t)}{a_L(t)}$ 严格单调上升，$x_R(t)=\dfrac{b_R(t)}{a_R(t)}$ 严格单调下降。因 $x_L(t)\leqslant x_R(t)$，故 $\dfrac{b_L(t)}{a_L(t)}\leqslant\dfrac{b_R(t)}{a_R(t)}$. 所以 $\forall t\in[0,1]$，有 $a_L(t)b_R(t)\geqslant a_R(t)b_L(t)$.

反之只要取 $x_L(t)=\dfrac{b_L(t)}{a_L(t)}$，$x_R(t)=\dfrac{b_R(t)}{a_R(t)}$

则由 $x_L(t)$和 $x_R(t)$决定的 Fuzzy 数满足方程。 Q.E.D.

命题 3.4 $\tilde{a}$ 是正 Fuzzy 数，对方程 $\tilde{a}\odot\tilde{x}=\tilde{b}$ (Ⅱ)

(1) 若 $\tilde{b}$ 是零 Fuzzy 数，则方程(Ⅱ)有解的话，只有零 Fuzzy 数解，并且(Ⅱ)有解的充要条件是$\dfrac{b_L(t)}{a_R(t)}$严格递增，$\dfrac{b_R(t)}{a_R(t)}$严格递减。

(2) 若 $\tilde{b}$ 为负 Fuzzy 数，则方程 $\tilde{a}\odot\tilde{x}=\tilde{b}$ 有解的话，只有负 Fuzzy 数解；并且有解的充要条件为：$\forall t\in(0,1]$，$a_L(t)b_L(t)\leqslant a_R(t)b_R(t)$，$\dfrac{b_L(t)}{a_L(t)}$严格单调上升，$\dfrac{b_R(t)}{a_R(t)}$严格单调下降。

证明 证明类似于命题3.3，故从略。 Q.E.D.

注：若 $\tilde{a}$ 是负 Fuzzy 数，对方程(Ⅱ)可以进行类似的讨论，但是如果 $\tilde{a}$ 是零 Fuzzy 数，若 $\tilde{b}$ 不是零 Fuzzy 数，方程(Ⅱ)一定没有解。

命题 3.5 设 $\tilde{a}_{ij}$ 是正 Fuzzy 数，$a_{ij}(t)$，$b_{ij}(t)$是 $\tilde{a}_{ij}$ 的 t 一截集的左、右端点，$\tilde{c}_i(t)$的 t 一截集的左、右端点记为 $c_i(t)$和 $b_i(t)$，$i,j=1,2,\cdots,n$，考虑方程组：

$$\begin{cases}\tilde{a}_{11}\odot\tilde{x}_1\oplus\tilde{a}_{12}\odot\tilde{x}_2\oplus\cdots\oplus\tilde{a}_{1n}\odot\tilde{x}_n=\tilde{c}_1\\ \tilde{a}_{21}\odot\tilde{x}_1\oplus\tilde{a}_{22}\odot\tilde{x}_2\oplus\cdots\oplus\tilde{a}_{2n}\odot\tilde{x}_n=\tilde{c}_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \tilde{a}_{n1}\odot\tilde{x}_1\oplus\tilde{a}_{n2}\odot\tilde{x}_2\oplus\cdots\oplus\tilde{a}_{nn}\odot\tilde{x}_n=\tilde{c}_n\end{cases}\qquad(\text{I})$$

则方程组(Ⅰ)存在唯一的一组正 Fuzzy 数解的充要条件是

$$\forall t\in(0,1],\qquad |a_{ij}(t)|\neq 0,\quad |b_{ij}(t)|\neq 0$$

$$0<x_i(t)=\frac{\begin{array}{c}\text{第 } i \text{ 列}\\ \begin{vmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & c_1(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & c_2(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & c_n(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{vmatrix}\end{array}}{|a_{ij}(t)|}\leqslant y_i(t)$$

$$=\frac{\begin{array}{c}\text{第 } i \text{ 列}\\ \begin{vmatrix}b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & d_1(t) & \cdots & b_{1n}(t)\\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & d_2(t) & \cdots & b_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & d_n(t) & \cdots & b_{nn}(t)\end{vmatrix}\end{array}}{|b_{ij}(t)|}\qquad(*)$$

并且 $x_i(t)$严格单调上升，$y_i(t)$严格单调下降。

证明 若存在唯一的一组正 Fuzzy 数解，设解的左、右端点函数为 $x_i(t)$，$y_i(t)$，那么 $\forall t\in(0,1]$，$\left[\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j(t),\ \sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}(t)y_i(t)\right]=[c_i(t),d_i(t)]\ i=1,2,\cdots,n$

即：

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j(t)=c_i(t)\\&\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)y_j(t)=d_i(t)\end{aligned}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

有唯一的一组解，由线性代数中的结论可知

$$|a_{ij}(t)|\neq 0\qquad |b_{ij}(t)|\neq 0$$

并且 $x_i(t)$，$y_i(t)$就是(∗)式中所表示的。

又因为 $x_i(t)$，$y_i(t)$是 Fuzzy 数的左、右端点函数，所以 $x_i(t)$严格单调上升，$y_i(t)$严格单调下降。

反之，每对 $x_i(t)$，$y_i(t)$（由(∗)式所表示的）可唯一决定一个正 Fuzzy 数，并且这n个 Fuzzy 数满足方程(Ⅰ)。 Q.E.D.

类似地可证以下两个结论：

命题 3.6 设 $\tilde{a}_{ij}$ 是正 Fuzzy 数，

(1) $\tilde{c}_j$ 是负 Fuzzy 数，则方程组(Ⅰ)有唯一的一组负 Fuzzy 数解的充要条件是

$$\forall t\in(0,1]\qquad |a_{ij}(t)|\neq 0\qquad |b_{ij}(t)|\neq 0$$

并且

第 i 列　　　　　　　　　　第 i 列

$$x_i(t)=\frac{\begin{vmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & c_1(t) & \cdots & b_{1n}(t)\\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & c_2(t) & \cdots & b_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & c_n(t) & \cdots & b_{nn}(t)\end{vmatrix}}{|b_{ij}(t)|}\leqslant\frac{\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & d_1(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & d_2(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & d_n(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{vmatrix}}{|a_{ij}(t)|}$$

$$=y_i(t)<0$$

而且 $x_i(t)$严格单调上升，$y_i(t)$严格单调下降。

(2) 若 $\tilde{c}_i$ 是零 Fuzzy 数，则方程组(Ⅰ)存在唯一的一组零 Fuzzy 数解的充要条件是：

$$\forall t\in(0,1] \qquad |b_{ij}(t)|\neq 0$$

第 i 列　　　　　　　　　　第 i 列

$$x_i(t)=\frac{\begin{vmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & c_1(t) & \cdots & b_{1n}(t)\\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & c_2(t) & \cdots & b_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & c_n(t) & \cdots & b_{nn}(t)\end{vmatrix}}{|b_{ij}(t)|}\leqslant 0\leqslant\frac{\begin{vmatrix} b_{11}(t) & \cdots & d_1(t) & \cdots & b_{1n}(t)\\ b_{21}(t) & \cdots & d_2(t) & \cdots & b_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1}(t) & \cdots & d_n(t) & \cdots & b_{nn}(t)\end{vmatrix}}{|b_{ij}(t)|}$$

$$=y_i(t)$$

并且 $x_i(t)$ 严格单调上升，$y_i(t)$严格单调下降。

我们可以完全类似地讨论 $\tilde{a}_{ij}$ 全部都是负 Fuzzy 数的情况。

四、L-R 型 Fuzzy 数系数的线性方程组

在前一节中对强 Fuzzy 数系数的线性方程进行了研究，本节将对另一类特殊的 Fuzzy 数系数线性方程来研究。它的系数都是 L-R 型 Fuzzy 数。人们知道 L-R 型 Fuzzy 数是由 D.Dubois 和 H.Prade 首先提出并进行了研究，这类 Fuzzy 数具有形式简单，计算方便，性质较好等特点。

定义 4.1[2] 函数 L 称为一个 Fuzzy 数的参考函数，如果满足下列条件：

(1) $L(x)=L(-x)$ 　　　(2) $L(0)=1$

(3) L 是在$(0,\infty)$上不增的。

常记满足定义4.1的这种参考函数为 L 或 R. Fuzzy 数 M 说是 L-R 型 Fuzzy数，当且仅当

$$\mu_M(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & \alpha>0 \qquad x\leqslant m\\[2ex] R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right) & \beta>0 \qquad x\geqslant m\end{cases}$$

记为 $M=(m,\alpha,\beta)_{L,R}$

若

$$\mu_M(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & \alpha>0 \quad x\leqslant m \\ 0 & x>m \end{cases}$$

则称M为L—0型Fuzzy数，记为$M=(m,\alpha,0)_{L,0}$

若

$$\mu_M(x)=\begin{cases} 0 & x<m \\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right) & x\geqslant m,\ \beta>0 \end{cases}$$

则称M为0—R型Fuzzy数，简记为$M=(m,0,\beta)_{0,R}$

从[2]的第二章B节中易知如下结果成立

$$(m,\alpha,\beta)_{L,R}\oplus(n,\nu,\delta)_{L,R}=(m+n,\alpha+\nu,\beta+\delta)_{L,R}$$

若 $m,n>0$，则$(m,\alpha,0)_{L0}\odot(n,0,\delta)_{0R}=(mn,n\alpha,m\delta)_{LR}$

若 $x>0 \quad x\odot(m,\alpha,\beta)_{LR}=(mx,x\alpha,x\beta)_{LR}$ (1)

若 $x<0 \quad x\odot(m,\alpha,\beta)_{LR}=(mx,-\alpha x,-x\beta)_{RL}$

命题 4.1 设 $(m_{ij},\ \alpha_{ij},\ \beta_{ij})_{LR}$，$(b_i,\ \alpha_i,\ \beta_i)_{LR}$ $i=1,2,\cdots,n$ $j=1,2,\cdots,m$ 都是L—R型Fuzzy数，则方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\oplus[(m_{ij},\alpha_{ij},\beta_{ij})_{LR}\odot x_j]=(b_i,\alpha_i,\beta_i)_{LR} \quad i=1,2,\cdots,m$$

有正数解的充要条件是$\sum\limits_{j=1}^{n}m_{ij}x_j=b_i$ $i=1,2,\cdots,m$与$\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j=\alpha_i$，$\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{ij}x_j=\beta_i$ $i=1,2,\cdots,m$有同解。

证明 由(1)式可知证明是显然的。 Q.E.D.

命题 4.2 设$(m_{ij},\alpha_{ij},0)_{L0}$ $m_{ij}>0$ $(b_i,\alpha_i,\beta_i)_{LR}$ $b_i>0$，$j=1,2,\cdots,n$，$i=1,2,\cdots,m$，则方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\oplus[(m_{ij},\alpha_{ij},0)\odot\tilde{x}]=(b_i,\alpha_i,\beta_i)_{LR} \quad i=1,2,\cdots,m$$

有正的0—R型Fuzzy数解的充要条件是$\sum\limits_{j=1}^{n}m_{ij}x_j=b_i$ $i=1,2,\cdots,m$与$\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_i=\alpha_i$，$i=1,2,\cdots,m$，有共同正数解组，并且方程$\sum\limits_{j=1}^{n}m_{ij}\nu_j=\beta_j$ $i=1,2,\cdots,m$，亦有非负解。

证明 若有正的0—R型Fuzzy数解，设为$(x_j,0,\nu_j)_{0R}$ $j=1,2,\cdots,n$，代入方程组得

$$\left(\sum_{j=1}^{n}m_{ij}x_j,\ \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j,\ \sum_{j=1}^{n}m_{ij}\nu_j\right)_{LR}=(b_i,\alpha_i,\beta_i)_{LR} \quad i=1,2,\cdots,n$$

那么

$$\sum_{j=1}^{n}m_{ij}x_j=b_i \quad i=1,2,\cdots,m$$

与

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j=\alpha_i \quad i=1,2,\cdots,m$$

有共同的正数解组。且方程组$\sum\limits_{j=1}^{n}m_{ij}\nu_i=\beta_i$ $i=1,2,\cdots,m$，有非负解组。

反之也显见结论成立。 Q.E.D.

参 考 文 献

[1] M. Mizumoto & K. Tanaka, Some Properties of Fuzzy Numbers, Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, Edited by M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager.

[2] D. Dubois & H. Prade, Fuzzy Sets and Systems—Theory and Applications, Academic Press, New York.

[3] D. Dubois & H. Prade, Operations On Fuzzy Numbers, Inter. J. Systems Sci 9,613—626(1978).

[4] 汪培庄，模糊集合论及其应用，上海科技出版社(1982).

The Approach to Solving the Simultaneous Linear Equations That Coefficieuts Are Fuzzy Numbers

Jiang Huabiao

Abstract

This paper first introduces the simultaneous linear equations that the co-efficients of which are fuzzy numbers. It is a natural generalization of the ordinary simultaneous linear equations. By means of the analysis of the interval numbers and simultaneous interval numbers linear equations, we have obtained the necessary and sufficient conditions under which solutions exist for several kinds of these equations. Moreover, the methods to get the solutions are given in the proofs.