国 防 科 技 大 学 学 报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八七年第四期　总第六十期　No.4 1987 Sum. 60

Toeplitz行列式的递推算法及其在系统辨识中的应用

王 伟 明

（电子技术系）

摘要：本文将Toeplitz行列式的递推公式，应用于Toeplitz 阵的秩的判定，因而就得到了在计算量方面具有明显优越性的系统定阶方法。本文还给出了几个应用实例。最后的模拟结果证明了此算法的可行性。

关键词　Toeplitz行列式；系统辨识

1. 前　言

Toeplitz阵在系统辨识中经常遇到,因而有关 Toeplitz 型方程组的快速算法在这领域内有着极为重要的意义。Levinson关于对称 Toeplitz阵的算法导致了谱估计方法的一个突破，即最大熵谱估计。近几年兴起的 ARMA 模型辨识和谱估计法，则是对一类非对称Toepli tz方程组的快速求解问题。Carayannis 在Trench 算法基础上推得了一类非对称Toeplitz方程组的快速递推算法[4]。本文则是注重于Carayannis 算法中关于 Toeplitz 行列式的递推算法。把这种递推用于模型系数阵的秩的判定，因而就完成了相当广泛的一类辨识问题中模型阶次的确定。和其它判阶方法相比，此种方法的主要优点就在于在没有增加参数估计运算量的情况下，达到了定阶目的。而其它定阶方法，如常用的对系数阵使用Gram—Shmidt正交化方法[1][2][3]，则需要相当一部分专门用于判阶的运算量。

2. 基 本 算 法

ARMA模型辨识问题中常遇到如下一类被称为扩展的Yule-Walker 方程：

$$\sum_{i=1}^{p} a_i h(n-i) = h(n) \quad (n=q+1, q+2, \cdots \text{均可}) \tag{1}$$

其中 q 常为MA 部分阶次。

设

本文1987年4月16日收到

$$H(n,k,l)=\begin{bmatrix} h(n) & h(n-1) & \cdots h(n-k+1) \\ h(n+1) & h(n) & \cdots h(n-k+2) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ h(n+l-1) & h(n+l-2) & \cdots h(n-k+l) \end{bmatrix}$$

$$\vec{h}_l(m)=[h(m),h(m+1),\cdots h(m+l-1)]^T$$

$$\vec{a}_p=[a_1,a_2,\cdots a_p]^T$$

其中$H(n,k,l)$一般为非对称非方Toeplitz阵。这样(1)式可以改写成

$$H(n,k,l)\cdot\vec{a}_p=\vec{h}_l(n+1) \qquad (n\geqslant q+1) \tag{2}$$

上式的最小二乘解为

$$\vec{a}_p=[H^T(n,p,l)\cdot H(n,p,l)]^{-1}\cdot H^T(n,p,l)\cdot\vec{h}_l(n+1) \tag{3}$$

其中：$p\leqslant l$，且假设求逆有意义。当取$p=l$时，得如下解：

$$\vec{a}_p=H^{-1}(n,p,p)\cdot\vec{h}_p(n+1) \tag{4}$$

关于方程(4)，Carayannis推得如下递推算法[4]：设已解得$\vec{a}_k=H^{-1}(n,k,k)\cdot\vec{h}_k(n+1)$，则

$$\vec{a}_{k+1}=H^{-1}(n,k+1,k+1)\cdot\vec{h}_{k+1}(n+1$$

的各分量可用下面各式求得：

$$a_{k+1}=\frac{1}{\alpha_k}\left(h(n+k+1)-\sum_{j=1}^{k}a_{k+1-j}\cdot h(n+j)\right) \tag{5}$$

$$a^*_{k+1}=\frac{1}{\alpha_k}\left(h(n-k-1)-\sum_{j=1}^{k}a^*_{k+1-j}\cdot h(n-j)\right) \tag{6}$$

$$a_i=a_i-a^*_{k+1-i}\cdot a_{k+1} \quad (i=1,2,\cdots k) \tag{7}$$

$$a^*_i=a^*_i-a_{k+1-i}\cdot a^*_{k+1} \quad (i=1,2,\cdots k) \tag{8}$$

$$\alpha_{k+1}=\alpha_k(1-a_{k+1}\cdot a^*_{k+1}) \tag{9}$$

初值：$\alpha_0=h(n)$，$a_1=\dfrac{h(n+1)}{h(n)}$，$a^*_1=\dfrac{h(n-1)}{h(n)}$ (10)

上式中，a^*_{k+1},α_k均为辅助递推变量，其中$\vec{a}^*_k$满足如下方程：

$$H^T(n,k,k)\cdot\vec{a}^*_k=\begin{bmatrix} h(n-1) \\ h(n-2) \\ \vdots \\ h(n-k) \end{bmatrix} \tag{11}$$

而α_k为

$$\alpha_k=h(n)-[a_k,a_{k-1},\cdots a_1]\cdot\vec{h}_k(n-k) \tag{12}$$

由Toeplitz阵性质可知

$$H(n,k+1,k+1)=\left[\begin{array}{c:c} H(n,k,k) & \vec{h}_k(n-k) \\ \hdashline [h(n+k),\cdots h(n+1)] & h(n) \end{array}\right]$$

因而由行列式分块求解公式[7]可得

$$\det\boldsymbol{H}(n,k+1,k+1)=\det\boldsymbol{H}(n,k,k)\{h(n)-[h(n+k),\cdots h(n+1)]\cdot\boldsymbol{H}^{-1}(n,k,k)\cdot\vec{h}_k(n-k)\}$$

注意到 $[h(n+k),\cdots,h(n+1)]\cdot\boldsymbol{H}^{-1}(n,k,k)=[a_k,\cdots a_1]$

因此就得到：

$$\det\boldsymbol{H}(n,k+1,k+1)=a_k\cdot\det\boldsymbol{H}(n,k,k) \tag{13}$$

这就是各阶Toeplitz行列式的递推公式。

对于1式给出的Yule-Walker方程，在预先不知阶数 p 时，就存在一个在参数估计过程中同时要定阶的问题。使用方程给出的相关性约束条件，从已知数据阵 $H(n,k,k)$ 中判出阶次 p 是可能的。Chow指出[5]在 $k,l>p$ 时，

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{H}(n,k,l)=p$$

且 $k\leqslant p$ 时，$\boldsymbol{H}(n,k,k)$ 为强非奇的，所以有

$$\det\boldsymbol{H}(n,k,k)=\begin{cases}0 & k>p\\ \neq 0 & k\leqslant p\end{cases} \tag{14}$$

因而可以从各阶行列式的数值中提取 p 的信息。显然，首次碰到的 $a_k=0$ 即为 $a_p=0$，这时 $k=p$. 这样，关于(1)式方程的参数估计和定阶过程可以用流程图表示，如图1所示。

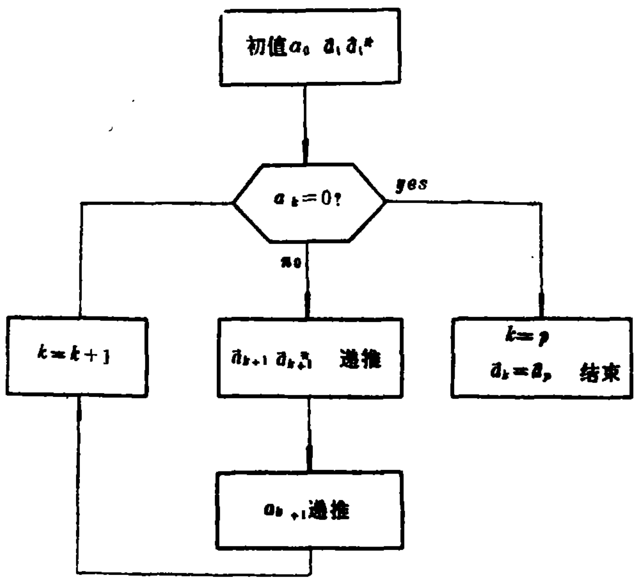

图 1 定阶与参数估计流程图

对于(3)式，也可以同时完成定阶与参数估计，其过程为

1) 使用图1流程递推直到 $a_k=0$，这时 $k=p$. 同时得到 $\vec{a}_p$；

2) 使用以下最小二乘递推在 $m\geqslant p$ 下继续计算，直到 $m=l-1$.

$$\vec{a}_p^{m+1}=\vec{a}_p^m+\boldsymbol{K}_m(h(n+m+1)-\boldsymbol{M}_{m+1}\vec{a}_p^m) \tag{15}$$

$$\boldsymbol{K}_m=\boldsymbol{P}_m\cdot\boldsymbol{M}_{m+1}^T(1+\boldsymbol{M}_{m+1}\cdot\boldsymbol{P}_m\cdot\boldsymbol{M}_{m+1}^T)^{-1} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{P}_{m+1}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_m\cdot\boldsymbol{M}_{m+1})\cdot\boldsymbol{P}_m \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{M}_{m+1}=[h(n+m),\cdots h(n+m+1-p)]$

递推初值：

$$\boldsymbol{P}_p=[\boldsymbol{H}^T(n,p,p)\cdot\boldsymbol{H}(n,p,p)]^{-1}, \tag{18}$$

$$\vec{a}_p^p=\vec{a}_p \tag{19}$$

$$\boldsymbol{K}_p=\boldsymbol{P}_p\cdot\boldsymbol{M}_{p+1}^T(1+\vec{a}_p^T\cdot\vec{a}_p)^{-1} \tag{20}$$

此种递推并不能减少多少运算量，但完成了定阶。一种更为行之有效的 Toeplitz 方程最小二乘解的方法是奇值分解法[6]，它也同时完成了定阶。

3. 具体辨识问题中的应用

1) 基于相关函数的 ARMA 模型系统辨识

对于一般 ARMA 模型，数学描述为

$$y(n)=\sum_{i=1}^{p}a_i\cdot y(n-i)+\sum_{i=0}^{q}b_i\cdot x(n-i) \tag{21}$$

其中$x(n)$为输入量，两边同乘 $y(n-m)$并求期望得：

$$r_y(m)=\sum_{i=1}^{p}a_i\cdot r_y(m-i)+\sum_{i=0}^{q}b_i\cdot r_{xy}(m-i) \tag{22}$$

此仅考虑输入$x(n)$为单位方差白色序列。待识系统为因果时，有

$$r_{xy}(m-i)=h(i-m)=h(i-m)\cdot u(i-m) \tag{23}$$

其中 $h(n)$为系统单位冲击响应，$u(n)$为单位阶跃序列。这样，当 $m\geqslant q+1$ 时，由因果性，(22)式后项为零，这时就得到如下扩展的Yule-Walker 方程：

$$r_y(m)=\sum_{i=1}^{p}a_i\cdot r_y(m-i)\qquad(m\geqslant q+1) \tag{24}$$

很明显，使用图 1 方法就可同时求得 p 和 $\vec{a}_p$ 值，因而完成AR部分辨识。在 $b_0\neq 0$ 这类ARMA模型中，有下式关系：

$$r_y(q)=\sum_{i=1}^{p}a_i\cdot r_y(q-i)+b_0\cdot b_q \tag{25}$$

因而在求得 p 后，可从上式定出MA阶次 q，即对(24)式，让m递减验证其成立与否，不成立时$m=q$。MA参数估计可用Cadzow 文献中方法求得[6]，从而整个模型的定阶和参数估计均能完成。

2) 基于单位冲击响应序列的ARMA模型辨识

对于(21)模型，当满足$p\geqslant q+1$时，文献[2]中已证得如下系数与冲击响应序列的关系：

$$\sum_{i=1}^{p}a_i\cdot h(n-i)=h(n)\qquad(n\geqslant q+1) \tag{26}$$

文献[2]中定阶与参数估计分别进行，定阶方法是使用 Gram-Schmidt 正交化，这样除参数估计外，需要在定阶上化费专门的运算量。然而很明显，(26)式与(23)式在数学意义上无甚区别，因而可用图 1 方法同时完成定阶与AR参数估计，所以减少了相当的运算量。MA部分参数估计和定阶可用文献[2]方法获得。

3） 基于单位冲击响应序列的二维ARMA系统辨识

对于如下一类二维ARMA系统

$$y(n,m)=\sum_{\substack{i=0\\ i+j\neq 0}}^{N}\sum_{j=0}^{M}a_{ij}\cdot y(n-i,m-j)+\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}b_{ij}\cdot x(n-i,m-j) \tag{27}$$

文献[3]推得了二维的Yule-walkes方程，

$$\sum_{\substack{i=0\\ i+j\neq 0}}^{N}\sum_{j=0}^{M}a_{ij}\cdot h(n-i,m-j)=h(n,m) \tag{28}$$

在$h(n,m)$不含冲击项时，文献[3]证得如下式子成立：

$$\sum_{j=1}^{M}a_{0j}\cdot h(0,l-j)=h(0,l)\qquad (l\geqslant M+1) \tag{29}$$

$$\sum_{i=1}^{N}a_{i0}\cdot h(k-i,0)=h(k,0)\qquad (k\geqslant N+1) \tag{30}$$

$$\sum_{j=1}^{M}a'_{ij}\cdot h(i,l-j)=h(i,l)$$
$$(l\geqslant M+1,i=1,\cdots N,a_{ij}=a'_{ij}\cdot a_{i0}) \tag{31}$$

则使用图1方法从(29)、(30)解得M, N和$\hat{a}_{0M}$、$\hat{a}_{N0}$，再使用常规Carayannis方法由(31)解得a'_{ij} $(i=1,\cdots N,j=1,\cdots M)$，最后由$a_{ij}=a'_{ij}\cdot a_{i0}$ $(i=1,\cdots N,j=1,\cdots M)$ 就完成了二维ARMA系统的AR部分定阶和参数估计。

4. 模拟结果及讨论

1） 非理想情况下强非奇判定

实际辨识和谱估计问题只能从有限个观察点中得到对$r_y(m)$或$h(n)$的估计值，因而(14)的强非奇判定式不可能绝对成立。在这种情况下，Chow提出了使用定阶阵$\boldsymbol{H}(n,k,k)$，用在$k>p$时其行列式值的期望应为零的特性进行定阶[5]，一些文章还提出了用下面的关系式进行定阶：

$$|\det\boldsymbol{H}(n,k,k)|=\begin{cases}>\delta & k\leqslant p\\ \leqslant\delta & k>p\end{cases}$$

其中δ为门限值。这两种方法在理论上均是可行的，但实际中却产生问题。因为：1° $r_y(m)$或$h(n)$可能为有偏估计，2°抽样数据的大小是相对的（如抽样前的放大等）这就造成估计值$r_y(m)$和$h(n)$绝对大小值的不确定；3° Yule-Walker 方程在两边同乘系数后仍成立。由于1°、2°、3°的原因，使得实际计算得到的行列式$\det H(n,k,k)$成为一个幂级数形式：

$$\{\det H(n,k,k)\cdot x^k\}_{k=1}^{p}$$

其中x为乘性干扰因子，它由原因1°2°引起。显然$x>1$时序列可能发散，所以一个较小的$\det\boldsymbol{H}(n,k,k)$值就可能被$x$的幂次淹没，因而使得前述两种非理想情况下判阶方法失效。模拟实验表明这种现象是存在的。鉴于这一问题，本文模拟实验用行列式比值检验法进行判阶。即：

$$|\alpha_k| = \left|\frac{\det H(n,k+1,k+1)x^{k+1}}{\det H(n,k,k)x^k}\right|$$

$$= \left|\frac{\det H\ (n,k+1,k+1)}{\det H(n,k,k)}\cdot x\right| = \begin{cases} >\delta & k<p \\ \leqslant\delta & k=p \end{cases} \tag{32}$$

其中 δ 为检验显著性水平。从上式可看出，x 对$\{\alpha_k\}$中每一元素的影响均是相同的，因而解决了由原因1°2°引起的问题。只要选定合适的水平因子，就可得到较准确的 p 值。

2) **模拟结果**

模拟主要验证使用行列式判阶的可行性，因而只就基于相关函数的一维 ARMA 辨识问题作如下模拟。

ARMA模型参数：

$[a_1, a_2, a_3, a_4] = [2.7607, -3.8106, 2.6535, -0.9238]$

$[b_0, b_1] = [1, 0.001]$

$\sigma_x^2 = 1$，$x(n) \sim N(0,1)$且为白噪序列

N（样点）$=300$，$n=4$

使用前述递推算法，可得α_k值变化如下：

$\alpha_1 = 251.5259$　　　$\alpha_2 = 9.814056$, $\alpha_3 = 4.712342$

$\alpha_4 = 9.118652\mathrm{E}-02$, $\alpha_5 = 0.4903565$, $\alpha_6 = 1.602539$

从上面数据可看出：1°干扰因子x的影响是明显的；2°α_k在$k=p$处有较明显的变化，只要选取显著性水平$\delta=1$，就可得到正确的定阶$p=4$. 这时递推到这一步的参数估计值为

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4] = [2.791987, -3.854284, 2.685385, -0.9239965]$$

模拟中也发现，在 q 值未知时，n 的选取很重要，一般要据先验知识作出 q 的最大可能值的估计，否则一旦取到$n \leqslant q$时，估计结果非真，没有理由接受这些结果。但 n 值取得过大也会降低估计的精度。

5. 结　论

1) 使用Toeplitz行列式递推能够在节省相当运算量的情况下，完成一、二维ARMA模型的AR阶次判定；

2) 在非理想情况下，应选用行列式比值作为检验量；

3) 需要由先验知识给出合适的 n 和 δ 值。

感谢导师孙仲康教授和老师李素芝讲师在本文形成和仿真试验过程中所给予的指导和帮助。

参 考 文 献

[1] Y.T.Chen, A new order determination technique for ARMA processes, IEEE, Trans. ASSP, Vol. ASSP-32, pp. 517-521 June, 1984.

[2] 吕锐：一维 ARMA 模型判阶及参数辨识的一种算法，国防科技大学学报，Vol.1, 1986。

[3] 吕锐：一类二维ARMA模型的判阶及参数辨识的一种算法，国防科技大学学报。Vol.2, 1986。

[4] G. Carayannis, Fast recursive algorithms for a class of linear equations, IEEE. Trans, ASSP. No.2, 1982.

[5] J.C.Chow, On estimating the orders of an ARMA process with uncertain observations, IEEE Trans, Vol. AC-17, Oct, 1972

[6] J.A.Cadrow, Overdetermined rational model equation approach, Proc. of IEEE, Vol. 70, No.9. Sept. 1982.

[7] 沈振康：估计理论讲义，国防科技大学，1981年12月。

A Recursive Algocithm of Toeplitz Determinents and Its Application in System Identification

Wang weiming

Abstract

A recursive formula of toeplitz determinents is derived in this paper. An order determination method which is excellent in amount of calulation is obtained by applying the formula to the rank determination of Toeplitz arrays. Its practical several examples are given later, and finally the simulated result shows the feasibility of the algorithm.

Key words; Toeplitz determinents; System identification