国防科术大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八七年第四期　总第六十期　No.4 1987 Sum. 60

生成n元数的全体排列的一个算法

刘继勇　陈庆华
（系统工程与应用数学系）

摘要　许多组合问题可以表达为$\min\limits_{q} f(q)$，其中q为$1,2,\cdots,n$的任一排列[2]。关于排列生成的各种算法，文献[1]作了全面的介绍，并且进行了比较分析。本文从集合映射出发，得到了一个算法。在这个算法的基础上，对每个排列可以得到一个序号，对每个序号可以得到一个排列，并且可以从任一给定的排列开始生成全体排列。

关键词　排列；映射

1. 预备知识

我们先介绍一下文中所用到的几个符号：

集合$P=\{(p_1,p_2,\cdots,p_n)\mid p_k=1,2,\cdots,K;\ K=1,2,\cdots,n\}$；

集合$Q=\{(q_1,q_2,\cdots,q_n)\mid(q_1,q_2,\cdots,q_n)$为$1,2,\cdots,n$的一个排列$\}$；数组$N=\{1,2,\cdots,n\}$。

取定$p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in P$及实数$x,y,(x\neq y)$，$\sigma(p)=q$，$q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$，其中$q_k=(N/\{q_1,q_2,\cdots,q_{k-1}\})\big|_{p_{n-k+1}}$，$K=1,2,\cdots,n$

即在数组N中划去$q_1,q_2,\cdots,q_{k-1}$后所剩余的子数列中第p_{n-k+1}个元素取作q_k.

令

$$\omega(p)=(p_1-1)0!+(p_2-1)1!+\cdots+(p_n-1)(n-1)!+1;$$

$$\delta_{x,y}=\begin{cases}0 & x>y,\\ 1 & x<y,\end{cases}$$

令$[x]$表示不大于实数x的最大整数。

2. 排列的生成算法

Step 0：$N=(1,2,\cdots,n)$，$p^1=(1,1,\cdots,1)\in R^n$；$i=1$，

Step 1：$p^i=N$？

　　是，打印$(n,n-1,\cdots,1)$，停止；

　　不是，转Step 2 .

本文1987年8月5日收到

Step 2：记$p^i=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，

置$q_k=(N\backslash\{q_1,q_2,\cdots,q_{k-1}\})\mid_{p_{n-k+1}}$，$k=1,2,\cdots,n$；

打印$q^i=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$，转Step 3 .

Step 3：求出$j=\min\{k\mid p_k<k\}$

置$p^{i+1}=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{j-1个},p_j+1,p_{j+1},\cdots,p_n)$，$i\leftarrow i+1$；

转Step 1 。

命题 1：算法中得到的每个p^i和q^i分别属于P与Q。

证明：显然$p^1\in P$。假设$p^i\in P$且$p^i\neq N$，则对$j=\min\{k\mid p_k<k\}$，有$1<j\leqslant n$。因为$p_j<j$，所以$p_j+1\leqslant j$。又由假设$p^i\in P$，从而

$$p^{i+1}=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{j-1个},p_j+1,p_{j+1},\cdots,p_n)\in P$$

故对任意的p^i均有$p^i\in P$。

因为数组$(N\backslash\{q_1,q_2,\cdots,q_{k-1}\})$中有$n-k+1$位元素，而$p_{n-k+1}\leqslant n-k+1$，所以有$(N\backslash-\{q_1,q_2,\cdots,q_{k-1}\})\mid_{p_{n-k+1}}$ 存在。又因每个q_k与$q_1,q_2,\cdots,q_{k-1}$均不相同，并且是取自N中的元素，所以$q_1,q_2,\cdots,q_n$互不相同，故$q^i=(q_1,q_2,\cdots,q_n)\in Q$。

命题2 映射σ：$p^i\to q^i$是P到Q的1—1映射。

证明 任取p^{i_1}，$p^{i_2}\in P$. 由命题 1 ,$q^{i_k}=\sigma(p^{i_k})\in Q$，$k=1,2$。记$p^{i_k}=(p_1^k,p_2^k,\cdots,p_n^k)$，$q^{i_k}=(q_1^k,q_2^k,\cdots,q_n^k)$，$K=1,2$。

如果$q^{i_1}=q^{i_2}$，设$j=\min\{k\mid q_k^1\neq q_k^2\}$，则$(N\backslash\{q_1^1,q_2^1,\cdots,q_{j-1}^1\})=(N\backslash\{q_1^2,q_2^2,\cdots,q_{j-1}^2\})$。

由于$q_j^1\neq q_j^2$，即

$$(N\backslash\{q_1^1,q_2^1,\cdots,q_{j-1}^1\})\mid_{p_j^1}\neq(N\backslash\{q_1^2,q_2^2,\cdots,q_{j-1}^2\})\mid_{p_j^2}$$

所以$p_j^1\neq p_j^2$，故$p^{i_1}\neq p^{i_2}$. 又$|p|=n!=|Q|$，所以σ是1—1映射。

命题3：设在算法的第三步递推得到$p^1,p^2,\cdots$，则这些数组是互不相同的，并且$p^{(n!)}=N$。

证明 任取$p^i=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$。设$j=\min\{k\mid p_k<k\}$，则

$$p^i=(1,2,\cdots,j-1,p_j,p_{j+1},\cdots,p_n)$$
$$p^{i+1}=(1,1,\cdots,1,p_j+1,p_{j+1},\cdots,p_n)$$

所以有

$$\begin{aligned}w(p^{i+1})-w(p^i)&=(1-2)1!+(1-3)2!+\cdots+[1-(j-1)](j-2)!+(j-1)!\\&=-1\times1!-2\times2!-\cdots-(j-2)\times(j-2)!+(j-1)!\\&=1\end{aligned}$$

得
$$w(p^{i+1})=w(p^i)+1。$$

因为$\omega(p^1)=1$，所以，一般地我们有：$\omega(p^i)=i$。因此，若$p^{i_1}=p^{i_2}$，有$w(p^{i_1})=w(p^{i_2})$，即$i_1=i_2$，故$p^1,p^2,\cdots$是互不相同的，并且w是P到$\{1,2,\cdots,n\}$的单值映射。因为

$$w(p^{(n!)})=n!=(1-1)0!+(2-1)1!+\cdots+(n-1)(n-1)!+1$$

所以，$p^{(n!)}=(1,2,\cdots,n)=N$。证毕.

由以上命题知，根据给出的算法，我们能得到$1,2,\cdots,n$的所有排列，并且没有重复的。

3. 全排列的编序

根据算法打印出来的先后次序，我们得到Q的一个编序。任取$q\in Q$，由命题2，我们唯一地得到$p\in P$。再由命题3，我们唯一地得到$w(p)\in\{1,2,\cdots,n!\}$。所以q的序号就是$w(p)$，其中

$$p_{n-k+1}=q_k-\sum_{i=1}^{k-1}\delta_{q_iq_k}\ ,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

命题4 设给定$q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)\in Q$，则$\sigma(p)=q$，其中$p=(p_1,p_2\cdots,p_n)$，$p_{n-k+1}=q_k-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\delta_{q_iq_k}$，$k=1,2,\cdots,n$。

证明 实际上，我们只需证明：

$$q_k=(N\backslash\{q_1,q_2,\cdots,q_{k-1}\})|_{q_k-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\delta_{q_iq_k}},\quad k=1,2,\cdots,n$$

记$l=\sum\limits_{i=1}^{k-1}\delta_{q_iq_k}$，由$\delta_{x,y}$的定义知，这说明在$\{q_1,\cdots,q_{k-1}\}$中有$l$个元素小于$q_k$，也就是说在数组$N$中，$\{q_1,q_2,\cdots,q_{k-1}\}$里有$l$个元素排在$q_k$的前面。所以，$q_k$在$N\backslash\{q_1,q_2,\cdots,q_{k-1}\}$中是排在第$q_k-l$个位置，即

$$q_k=(N\backslash\{q_1,q_2,\cdots,q_{k-1}\})|_{q_k-l}=(N\backslash\{q_1,q_2,\cdots,q_{k-1}\})|_{q_k-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\delta_{q_iq_k}}$$

证毕

上述过程也可以反过来，任意给定一个序号$m(1\leqslant m\leqslant n!)$，存在唯一的$p\in P$，使得$w(p)=m$. 对于$p$，存在唯一的$q=\sigma(p)\in Q$。$q$就是序号$m$所对应的排列，其中$q=\sigma(p)$，而$p=(p_1,\cdots,p_n)$

$$p_k=\left[\frac{m-1}{(k-1)!}\right]\Bigg|_{\bmod k}+1,\quad k=1,2,\cdots,n$$

命题5 设给定m，$1\leqslant m\leqslant n!$，则$w(p)=m$，其中$p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，

$$p_k=\left[\frac{m-1}{(k-1)!}\right]\Bigg|_{\bmod k}+1,\ k=1,2,\cdots,n.$$

证明 由命题3知，对给定的m，存在$(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in P$，使得

$$\begin{aligned}m&=w[(p_1,p_2,\cdots,p_n)]\\&=(p_1-1)0!+(p_2-1)1!+\cdots+(p_k-1)(k-2)!\\&\quad+(p_k-1)(k-1)!+(p_{k+1}-1)k!+\cdots+(p_n-1)(n-1)!+1\end{aligned}$$

所以

$$\left[\frac{m-1}{(k-1)!}\right]\Bigg|_{\bmod k}=\Big[\frac{(p_1-1)0!+\cdots+(p_{k-1}-1)(k-2)!}{(k-1)!}+p_k-1+$$

$$+\frac{(p_{k+1}-1)k!+\cdots+(p_n-1)(n-1)!}{(k-1)!}\Bigg]\Bigg|_{\bmod k}$$

$$=\left[p_k-1+k\left((p_{k+1}-1)+\cdots+(p_n-1)\frac{(n-1)!}{k!}\right)\right]\Bigg|_{\bmod k}$$

$$=p_k-1 \qquad k=1,2,\cdots,n$$

故 $p_k=\left[\dfrac{m-1}{(k-1)!}\right]\Bigg|_{\bmod k}+1,\quad k=1,2,\cdots,n$. 证毕。

4. 算 例

以$n=6$为例，按照算法的步骤，写出 1 2 3 4 5 6 的前 8 个排列：

$p^1=(111111)\to(123456)=q^1$

$p^2=(121111)\to(123465)=q^2$

$p^3=(112111)\to(123546)=q^3$

$p^4=(122111)\to(123564)=q^4$

$p^5=(113111)\to(123645)=q^5$

$p^6=(123111)\to(123654)=q^6$

$p^7=(111211)\to(124356)=q^7$

$p^8=(121211)\to(124365)=q^8$

求(124653)在123456的全排列的序号：

首先我们令$q^m=(124653)$，先求$p^m=(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6)$，其中$p_6=1$，$p_5=2-1=1$，$p_4=4-2=2$，$p_3=6-3=3$，$p_2=5-3=2$，$p_1=3-2=1$；得到$p^m=(123211)\in P$。从而

$$\begin{aligned}m=w[(123211)]&=(1-1)0!+(2-1)1!+(3-1)2!+(2-1)3!+(1-1)4!\\&\quad+(1-1)5!+1\\&=1+2\times2+6+1=12\end{aligned}$$

求出序号为10的排列：

首先我们有

$$p_1=\left[\frac{10-1}{(1-1)!}\right]\Bigg|_{\bmod_1}+1=1,\qquad p_2=\left[\frac{10-1}{(2-1)!}\right]\Bigg|_{\bmod_2}+1=2$$

$$p_3=\left[\frac{10-1}{(3-1)!}\right]\Bigg|_{\bmod_3}+1=2,\qquad p_4=\left[\frac{10-1}{(4-1)!}\right]\Bigg|_{\bmod_4}+1=2$$

$$p_5=\left[\frac{10-1}{(5-1)!}\right]\Bigg|_{\bmod_5}+1=1,\qquad p_6=\left[\frac{10-1}{(6-1)!}\right]\Bigg|_{\bmod_6}+1=1$$

从而$p^{10}=(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)=(122211)$根据算法得$q^{10}=(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6)=(124563)$。

5. 结　束　语

不难看出，该算法得出的排列的编序是字典式的。但这并不重要，这里要着重说明：该算法所依赖的是两个部分（P到Q的1—1变换和P的编序）。算法的第二步和第三步就是这两个部分。所以，如果这两部分取另一形式，就得到了另一算法。例如在第二步中，N就可以取$1,2,\cdots,n$的任一排列，这样就得到了Q的许许多多种生成方式。

本文是在许国志老师的指导下完成的。

参　考　文　献

[1] R. Sedgeic irk, Permutation Generation Methods, Computing Summary Vol 9. No.2. June 1977.

[2] 管梅谷，陈庆华：次限制拟阵基的排序算法，科学通报，1985第7期 PP 488-490。

An Algorithm of the Generation of Complete N-permutation

Liu Jiyong　Chen Qinghua

Abstract

Many problems are denoted by $\min_{q} f(q)$, where q is any permutation of $1, 2,\cdots,n$.

In conference[1], every algoritnm is presented in full and analysed comparatively. An algorithm is obtained by setting about set mapping in this paper. Based upon this algorithm, every permutation may produce an order number and vice versa, and Complete permutation can be generated from any permutation given.

Key words: Permutation; Mapping.